GOTTLOB FREGE (8 Novbre 1848 – 26 Julio 1925)

Gottlob Frege centró su actividad profesional de la Universidad de Jena. En ella inició sus estudios universitarios en 1869, estudios que culmina en Göttingen donde realizó el doctorado en 1873. Vuelto a Jena, presenta su Habilitación para obtener la *venia docendi* en 1874 y, desde entonces, se dedica a la enseñanza en su Universidad por modo exclusivo.

La disertación doctoral lleva como título *Sobre una representación geométrica de las figuras imaginarias en el plano*. Mantiene la tesis clásica de que la Geometría reposa, en última instancia, en la intuición. En esa misma línea, puramente gaussiana, en la Habilitación que titula *Métodos de cálculo que se basan en una ampliación del concepto de magnitud*, sostiene que

> Los principios de la Aritmética no pueden ser derivados de la intuición

Si para Gauss la Aritmética era la reina de las matemáticas, lo era porque en ella la razón dicta, libre, sus leyes; lo que no ocurre con la Geometría. El problema es cómo se dictan esas leyes, en qué se fundan, porque no basta decir "en la razón". Frege, en su Habilitación, se plantea con nitidez la cuestión de averiguar

> Sobre qué se apoyan los principios a partir de los cuales la aritmética entera se engendra como a partir de su germen.

Y da, como respuesta,

> Sobre la adición.

El problema, si no resuelto, queda planteado.

El sueño de Frege La búsqueda de una mayor concreción de ese planteamiento y, sobre todo, de la respuesta correspondiente, se convierte en el *sueño*, en el objetivo total y único de Frege. No tendrá otro tema central y sólo se ocupará de resolver aquellas cuestiones que van surgiendo en el intento de solucionar este problema.

Frege cuenta cómo llega a su sueño en la breve *Introducción* a su primera gran obra, **Begriffsschrift**, que fecha en Diciembre de 1878 y se edita, a sus expensas, en 1879. Aquí expone la génesis, los motivos del programa al que dedicará su vida:

establecer los Fundamentos de la Aritmética y, con ello, de toda la Matemática. Fundamentos que permitan responder a la pregunta ¿qué es un número?

Por lo pronto, afirma que hay dos maneras o formas de responder a este tipo de preguntas: una genética por la que se indica cómo se llega al concepto; la otra es de carácter fundacional y se busca establecer la estructura interna de lo conceptual ya obtenido. La diferencia de enfoques descansa, según Frege, en que la segunda sigue el método demostrativo. Lo cual no es obstáculo para que el individuo alcance el contenido conceptual, tanto desde lo genético como desde lo fundacional mediante un proceso psicológico que se tiene que apoyar en la experiencia sensorial, en los sentidos.

El proceso de obtener el conocimiento por parte individual se le muestra carente de interés, secundario respecto al enfoque fundacional y, por ello, es el segundo enfoque el que Frege elige para su investigación.

El enfoque fundacional, el que permite asegurar la Aritmética, le lleva a abandonar la respuesta dada en la Habilitación y, si no es la suma, pasa a ver que la clave es la noción de sucesor en la serie. Pero el concepto de sucesor en la serie entraña la existencia de un primer elemento y la afirmación de que cada elemento posee un único sucesor inmediato. Analizando más, en el concepto de sucesión lo que está en juego, realmente, es la noción de iteración de una operación, de una función; la iteración del operador "sucesor de" que manifiesta, precisamente, la inferencia específica de la aritmética, el paso de n a n+1 y que ha de ser analizada, fundamentada. Concepto de sucesión, sí, pero ligado al de función.

Suprimida cualquier llamada a la intuición, sea lo que sea esta, eliminadas las llamadas a procesos genéticos y psicológicos siempre relativos y diferentes según los diferentes individuos, Frege cree que sólo le queda un recurso en el enfoque fundacional apoyado en la razón pura: el proceso demostrativo, derivativo, donde se hace abstracción de todas las características particulares de las cosas, proceso que se apoya "exclusivamente en las leyes que fundan todo conocimiento". Abstracción, generalidad deductiva que requiere, para ser llevada a cabo correctamente, de una elaboración puramente lógica. Lógica entendida como lo estrictamente conceptual, "analítico" y, por serlo, absolutamente general, universal y, consecuente, aplicable a toda circunstancia particular. Lógica constituida por "leyes que fundan todo conocimiento", leyes que Frege tendrá que organizar de alguna manera y, siguiendo su línea fundacional, lo hará a través de la axiomatización, y ello desde su creación.

En el fondo, Frege adopta la posición de Platón en el segundo fragmento matemático de *Menón*: razonemos como los geómetras. Enfoque veritativo condicional: a partir de unos primeros principios obtener sus consecuencias apoyándose única y exclusivamente en lo derivativo. Pero Frege elimina lo hipotético y, para él, esos primeros principios son leyes absolutas, válidas para todo ser pensante en todo tiempo y espacio.

Las leyes lógicas absolutamente generales subsumen la posible particularidad de las consideraciones aritméticas tanto en el enunciado proposicional como en el proceso derivativo inferencial que se condensa en el ya mencionado paso de n a n+1 y que culmina en la inducción completa. De aquí que termine afirmando que la Aritmética se ha fundamentado o, más bien, se ha identificado con la Lógica.

Esta razón fundacional requiere de un instrumento con el cual no sólo manifestarse, sino con el que construir y analizar lo conceptual pensado. La razón pura, para manejar el contenido conceptual de pensamiento, para elaborar las demostraciones correspondientes, requiere del lenguaje.

Y Frege encuentra, aquí, el primer gran obstáculo: la inadecuación del lenguaje ordinario. En la Introducción a la **Conceptografía**, al dar cuenta de cómo intenta plasmar su sueño, afirma:

> La marcha seguida ha consistido primero en reducir el concepto de sucesor en una serie al de sucesión lógica, para, desde aquí, pasar al concepto de número. A fin de que nada intuitivo aparezca subrepticiamente en esta marcha, importa reducir todo a una cadena deductiva carente de huecos. Pero cuanto más me esforzaba en satisfacer esta exigencia con el mayor rigor posible, más me chocaba con el obstáculo de la insuficiencia del lenguaje: a pesar de todas las pesadeces de expresión a las cuales estaba dispuesto a aceptar, tanto menos conseguía alcanzar la exactitud exigida por esta empresa cuando las relaciones a expresar se hacían más complejas.

Y ante esta insuficiencia Frege rompe con el lenguaje ordinario y crea un lenguaje artificial, la *Conceptografía,* en línea con lo que hacen los matemáticos. Afirma

> Tal fue la dificultad de la que surgió la idea de la ideografía presente.

Bien entendido que el objetivo no es esa creación sino que el “objetivo exclusivo de mis búsquedas” es lo que resume en los términos “contenido conceptual”. El lenguaje de signos es simplemente un instrumento al servicio de esa meta y si se ha detenido en su creación es porque no ha tenido más remedio que hacerlo: el lenguaje ordinario no sirve para manifestar ese contenido conceptual. Y si ha creado ese lenguaje ideográfico es como un instrumento que debe

> servir para controlar de la manera más infalible la validez de una deducción y desentrañar toda hipótesis que se deslice furtivamente a fin de examinarla en cuanto a su origen.

Además de esas dos funciones servirá para la expresión del contenido conceptual del pensamiento puro y, más en concreto, del contenido de la Aritmética porque, hay que subrayarlo una vez más,

> La Aritmética, como lo he indicado al principio, ha sido el punto de partida que me ha conducido a mi ideografía.

Creado y justificado el lenguaje ideográfico hay que desarrollarlo para mostrar su manejo y se aplique sin dificultad a lo que importa: caracterizar los conceptos básicos de la aritmética, convertidos en conceptos lógicos porque pueden expresarse en este lenguaje.

La inadecuación del lenguaje ordinario no es la primera dificultad que Frege encuentra para alcanzar su objetivo fundacional. Encontrará otras y, en todos los casos, no tendrá más remedio que centrarse en ellas para superarlas. Precisiones, rectificaciones, superación de obstáculos siempre en función de su objetivo central y, haciendo camino, crea lo que se denominará posteriormente la Lógica formal o matemática, sienta las bases para la lógica filosófica, para la Filosofía del Lenguaje, para una filosofía analítica del mismo, al igual que ha de precisar su epistemología. Filosofía lógica, filosofía del lenguaje que se han llegado a considerar como lo más relevante y actual de su trabajo siempre, por supuesto, con su creación de la Lógica formal o matemática.

En un inédito de 1919 reconocerá que, haciendo camino, llegó a la Lógica

> Arranqué de las matemáticas… Pronto me di cuenta de que una atribución de número hecha sobre la base de una enumeración comporta la aserción sobre un concepto. (.) Así fui llevado de las matemáticas a la Lógica.

…y su fracaso Los temas que han ido surgiendo son realmente importantes considerados en sí mismos, pero se muestran laterales al sueño de su vida que, insisto, sólo tiene un objetivo: fundamentar, y de manera definitiva y ya para siempre, la Aritmética y, con ella, el total de la Matemática. Sueño dogmático que, como sueño, es imposible de alcanzar en lo real, como las antinomias se lo mostraron justo cuando pensaba que lograba su realización.

Un sueño que era, en sí, imposible de alcanzar porque de obtenerlo equivaldría a cerrar, precisamente, a la misma razón que dice fundamentante y en la cual se apoya para lograrlo. Sería cerrar el paso a la propia razón, que es la creadora del Hacer matemático. Un cierre que en el caso de Frege se le presenta en 1903, con toda crudeza, y viene originado por la antinomia, por la paradoja que le hace ver por carta Russell. Cierre por el cual llega a abandonar la idea de fundamentar la Aritmética en las “leyes que fundan todo el conocimiento”, en las que ha elegido como axiomas y en las que están subyacentes a los mismos. Le lleva al abandono de esas leyes lógicas y, todavía más, de la Lógica como fundamentante único del Hacer matemático.

El fracaso del Logicismo no implica que Frege abandone su sueño de lograr un Fundamento definitivo para la Matemática. Si el Logicismo fracasa en 1903 al aparecer las paradojas, las antinomias inherentes a ese Programa, Frege como en el caso del lenguaje ordinario lo deja a un lado. Fiel a su sueño, a su dogmatismo, busca otra roca en la cual apoyar, fundacionalmente, la Aritmética, la Matemática. Otra roca en la cual interviene la Geometría y la intuición pero, quizá ya es tarde, y Frege sólo esboza unas oscuras sugerencias.

Independiente a cualquier tipo de antinomia en un sistema formal, el Hacer matemático es un hacer proteico que no se deja encerrar en unos moldes o marcos por muy amplios que se pretendan. Incluso los llega a subsumir y transformar en pequeñas piezas sectoriales internas: cuando el lenguaje ideográfico se convierte en algoritmo y en sistema formal, cuando de lenguaje se pasa a Lógica, desde el Hacer matemático se convierte esa Lógica en un sistema formal, en una estructura que cabe considerar cerrada cuando se dan sus propiedades características, aquellas que ni soñó Frege: compacticidad, propiedad de Löwenheim-Skolem-Tarski ascendente para L_1...

El dogmatismo fregeano Si en el enfoque fundacional Frege manifestó con rotundidad su dogmatismo, también lo sostuvo en sus convicciones políticas radicalmente conservadoras. Enemigo de los “avances socialistas” hacia la democracia que se esbozaron tímidamente en unos primeros momentos del Imperio; enemigo de los judíos que según él deberían ser expulsados de Alemania o desposeídos de sus derechos políticos; enemigo de los católicos, de los franceses…

En el pensamiento, su dogmatismo lo pretende justificar inscribiéndolo en el racionalismo fundacional al que atribuye el deseo de obtener conocimiento absoluto sin dudas escépticas de tipo alguno. Escepticismo y relativismo que Frege asocia con el psicologismo y, en cierta manera, con el enfoque genético porque en él, y según la interpretación fregeana, cada uno puede dar la respuesta que más le agrade.

Quiere que desde Descartes una de las exigencias, una seña de identidad por decirlo así, de la filosofía y de la civilización occidental, sea la obtención de un conocimiento seguro y objetivo qué podemos conocer y cómo-; pero también que se justifique ese conocer. Es lo que se refleja en el tópico *more geometrica demonstrata*. Exigencia por la cual la civilización occidental ha convertido en seña de identidad no sólo el método experimental con el que obtener conocimiento, sino la cuestión epistemológica por la que se asegura y se justifica que lo obtenido es lo “verdadero”. Giro epistemológico que tiene en Kant la figura clave.

Frege adopta con radicalidad total lo que considera marca propia de la civilización occidental. Es lo que le lleva polémica con los escépticos, con los psicologistas, con todos aquellos que mantienen enfoques genéticos y empiristas y que tienen en Stuart Mill uno de sus máximos representantes. Enfoques que, según Frege, conducen al relativismo y, con ello, al escepticismo.

Pero también critica a los matemáticos que serían los auténticos representantes de esa marca de identidad occidental porque se quiere que el matemático no acepte nada sin su demostración correspondiente. Sin embargo, y de hecho, las demostraciones de todos los matemáticos contienen lagunas, no son completas, dejan huecos por lo que, en realidad, y para Frege, no demuestran nada. Como escribirá en 1884, exigiendo la ausencia de todo hueco en las derivaciones aunque estas se hagan muy largas: las demostraciones no se miden por la vara.

Atribuye al psicologismo que el significado de los términos se de a través de los procesos mentales que se producen en quien pronuncia dichos términos y en quien los escucha. Frente a esta posición Frege mantiene que las imágenes mentales que una palabra pueda originar en el espíritu de quien habla o de quien escucha son irrelevantes para su significado. Lo único que importa es el papel que ese término o palabra juegue en la oración pronunciada, papel con el cual se determinan las condiciones veritativas de dicha oración. Y lo mínimo que se puede decir de la afirmación de que una palabra representa una “idea” es que es afirmación totalmente confusa y que forzaría, en todo caso, a aceptar que el significado de la palabra está en la imagen mental que la misma suscita.

Elementos como los anteriores se ligan a las circunstancias particulares, concretas, de las cosas y de los hablantes. Si lo que importa es el contenido de pensamiento, entonces todas esas circunstancias han de ser eliminadas, suprimidas. La búsqueda de rigor, de objetividad, obliga a eliminar cualquier llamada a la intuición, los procesos mentales, las imágenes, los elementos psicologistas de cada individuo.

En esta situación, y desde el propio racionalismo, el conocimiento básico, donde no puede haber duda alguna, el matemático. Fundamentar la matemática es, en el fondo, fundamentar el conocimiento racional, conceptual. Las partes más elementales, las más inmediatas, son las de la Aritmética, las que tratan del número natural. Precisamente las más necesitadas de análisis conceptual porque todos los autores pasan, por ellas, sin detenerse. Exigencia primera, y para Frege, centrarse en dichas partes elementales, en caracterizar el número natural, la inferencias que van de n a n+1. Y a partir de ahí, todo lo demás.

El sueño de Frege, el dogmatismo que subyace al mismo, justificados en lo que se considera la marcha propia del racionalismo occidental. Lo que importa, la fundamentación definitiva, sea en la roca que sea. Frente al *ignoramus*, *ignorabimus* lanzado por Emil Du Bois Reymond en 1872, para Frege no hay tal cosa en la Matemática, en ella reina la certeza absoluta.

El contexto Si el mismo Frege cuenta la génesis de su sueño fundacional y, con él, su creación de la *Conceptografía* como lengua característica y no como simple cálculo lógico, es de justicia señalar que la necesidad de un lenguaje ideográfico para la expresión del Hacer matemático estaba en el aire. No ya la certeza de que la lógica aristotélica-escolástica era inservible como vehículo para el pensamiento y expresión matemáticos, que ya era tópico aceptado desde al menos el s. XVII, sino la necesidad de unas notaciones adecuadas para expresar las nociones matemáticas que desde ese siglo se habían ido creando y, más en concreto, en el s. XIX. Exigencia que se hacía desde frentes muy diferentes: desde el originado por Boole con su algebrización de la Lógica hasta Dedekind que requiere nuevos signos para expresar los conceptos que se venía creando en la inversión del Hacer matemático.

En el último tercio del siglo XIX se estaba produciendo una inversión epistemológica con su ruptura asociada y se pasaba de un Hacer Figural a uno Global donde el punto de partida era el sistema o conjunto constituido por unos elementos que pertenecen al mismo. Y hay que dar cuenta de esa pertenencia, pero también de cuando un sistema es parte o está incluido en otro, de si una propiedad es de todos los elementos del sistema, de algunos de sus elementos, de uno o de ninguno; de cómo expresar las operaciones que pueden realizarse entre esos conjuntos y de las relaciones funcionales entre los mismos…

José Peano elabora una *lingua characterística*, la *pasigrafía*, con la que expone los **Principios de la Aritmética expuestos según un nuevo método**, donde establece la axiomatización de la Aritmética elemental que hoy lleva su nombre. La notación de Peano, con leves modificaciones, es la que siguen los lógicos, como en concreto Russell y Whitehead, y no la notación, el lenguaje ideográfico de Frege, aunque incorporen alguna de las concepciones fregeanas como en particular la cuantificación, que se le manifestaba muy “abstrusa” a Peano.

Hay otras corrientes preocupadas por el lenguaje, por la torre de Babel que están engendrando las nuevas naciones. Es lo que lleva a la creación de lenguajes artificiales como el esperanto, por ejemplo, y que se realicen búsquedas de una lengua ancestral; pero quizá lo más importante en lo conceptual académico sea la creación de la filología comparada. Preocupaciones por la lingüística, por el problema del lenguaje y el significado que culminan en lo filológico en Saussure, por ejemplo.

Lo mismo ocurre en cuanto a la búsqueda de una fundamentación del Hacer matemático y, en concreto, de la Aritmética. Búsqueda que se hace imprescindible al materializarse la inversión conceptual porque ahora ya no se parte del número natural, de la función dada por su característica o de la ecuación diferencial, sino del sistema o conjunto y hay que definir, de alguna manera, lo que antes era el dato primario, lo dado que era precisamente ese número natural. Se hace necesario justificar, de alguna manera, el nuevo tipo de Hacer que parte del infinito en acto y, desde ese infinito, se llega, se alcanza lo finito.

Y a fundamentar la matemática y, en concreto, su base más primaria, la aritmética, se dedican Kronecker desde un enfoque finitista puramente constructivo, Helmholtz desde una línea empirista naturalista que se plasma en la epistemología genética, Paul du Bois-Reymond afirmando la existencia de problemas indecidibles o enigmas en la Matemática, Cantor desde el conjuntismo, Dedekind desde un constructivismo logicista, Peano desde la axiomática formal pasigráfica, Husserll creando la fenomenología para dar cuenta de la Aritmética sin atender a psicologismo alguno, Thomae y Heine desde un formalismo inscripcionista, Schröder desde su algebrización de la Lógica continuadora de Boole… Constructivistas, formalistas, fenomenólogos, logicistas… y, con ellos, Frege.

Y, todo hay que decirlo, un Frege que queda un tanto aislado en la elaboración de su *Conceptografía* y su Logicismo axiomatizador, con su aparente formalismo pero, a la vez, con su mantenimiento de lo conceptual como propio del pensamiento. Aislamiento que le llega a producir cierta amargura, cierto resentimiento que explicita una y otra vez al ver que ninguno de los autores que se centran en la fundamentación de la matemática le mencionan, salvo Schröder y Husserll. Amargura que sube de tono cuando quien lo va a mencionar, Russell, lo hace para darle, a la vez, la noticia de que su sistema es contradictorio, de que su objetivo de fundamentación en la Lógica, su programa Logicista, era un castillo construido sobre la arena movediza de la playa que ha sido destruido por una simple dificultad antinómica.

Todo esto no implica quitar méritos a Frege por supuesto. Sí tratar de situarlo en su contexto adecuado.

Conceptografía

El libro de 1879 en el que Frege formula el lenguaje que considera apto para expresar el contenido de pensamiento puro, pensamiento que por su generalidad y abstracción se encuentra marginado y es independiente de las características particulares de las cosas, es una pequeña obra maestra. El título completo **Begriffschrift, un lenguaje de fórmulas, modelado sobre el de la aritmética, para el pensamiento puro**.

La *Conceptografía* es algo más que un simple lenguaje de signos como permanentemente lo enfoca Frege. Supone la creación de la Lógica formal o matemática y ello en dos grandes apartados: El Cálculo proposicional en su versión semántica y en su versión axiomática y el Cálculo de predicados con identidad. Para ello establece, en primer lugar, que los juicios en los que se expresa el contenido de pensamiento puro no tienen la forma gramatical Sujeto-Predicado sino la que adoptan en el Hacer matemático: Función-Argumento; en segundo lugar, la cuantificación.

Precisamente las dos nociones centrales de lo que va a ser, a partir de este momento, la Lógica. Lógica formal, apoyada en el signo, que contiene los juicios de pensamiento puro, las leyes más generales del pensamiento y que ha sido construida para justificar fundacionalmente la Aritmética. Aritmética que, por ello, se identifica con la Lógica a la que da nacimiento para justificarse a sí misma. Identificación porque sus juicios se expresan en la Conceptografía, marginados a cualquier circunstancia particular, y se conectan entre sí derivativamente a partir de unos que se adoptan como axiomas simplemente por su potencia engendradora.

El ensayo de Frege se estructura en Introducción y tres capítulos. En la Introducción o Prólogo, además de exponer la génesis y la marcha de su sueño, señala el origen de la *Conceptografía*: el lenguaje natural no permite dar cuenta del contenido de pensamiento. Los inconvenientes no los enumera, realmente, aquí; los da por sabidos o reconocidos. Es tema al que volverá, reiteradamente; hay, en este punto, algo más que un capricho.

El lenguaje ordinario no sólo no da cuenta adecuada del pensamiento puro: para Frege hay un inconveniente más profundo: lo aprisiona. El pensamiento ha seguido la gramática y, en ella, la oración o juicio adopta la forma Sujeto-Predicado; es la que se tiene en el lenguaje ordinario. Pero no es la apropiada para la expresión del contenido conceptual. Como reafirma en el parágrafo 3 del Capítulo I:

> En el primer borrador de mi lenguaje de fórmulas me vi engañado por el ejemplo del lenguaje ordinario componiendo los juicios en la forma sujeto y predicado. Pronto me convencí de que esto era un obstáculo en mi camino, que me conducía a una prolijidad inútil.

Y contra esos obstáculos se alza, radical, Frege. Su exigencia, rotunda: el papel de la filosofía se centra en "quebrar el dominio del lenguaje sobre el pensamiento puro" y este es el papel que asigna a su *Conceptografía*. No basta complementar el lenguaje ordinario con unos cuantos signos específicos como se hace en la Matemática tradicional: hay que crear, siguiendo el sueño de Leibniz, una auténtica *lingua characteristica* y no un simple cálculo. Es lo que reconoce de modo explícito en 1882 y en respuesta a Schröder al remarcar sus diferencias con Boole

> Mi intención no era representar una lógica abstracta en fórmulas sino expresar un contenido a través de signos escritos de una manera más precisa y clara de lo que es posible hacer a través de palabras. De hecho, lo que yo quería crear no era un mero *calculus ratiocinator* sino una *lingua característica* en el sentido de Leibniz

Frege compara su lenguaje de fórmulas, de signos, con el lenguaje ordinario y esboza su posible importancia para las demás ciencias, desde la Geometría a la Química y, por supuesto, la Lógica. Son disciplinas que han realizado, parcialmente, el sueño de Leibniz de un lenguaje de signos, de un cálculo, pero todos ellos se quedan en dominios sectoriales del saber.

La comparación la apoya en una metáfora de analogía: la *Conceptografía* es al lenguaje natural como el microscopio lo es al ojo. Metáfora no original, por cierto: ya la empleó, y en el mismo sentido, Leibniz. Para la vida ordinaria, el instrumento óptico básico, perfecto, el ojo; para el microcosmos, el ojo es, sin embargo, inservible. Y es aquí donde el microscopio tiene su papel, aunque sea inservible para la vida ordinaria. De la misma manera, la *Conceptografía* tiene su papel específico y no hay que confundirse en su manejo ni confundir a los demás: debe ser utilizada en su terreno propio, el del pensamiento puro, conceptual y, más en concreto, para reconstruir lógicamente la Aritmética.

En el Capítulo I –*Definición de los Símbolos*- comienza justificando el manejo de dos tipos de signos. La Aritmética, una vez más, da la línea a seguir: en ella se manejan dos tipos, los correspondientes a indeterminadas –Frege evita el uso matemático de variable, porque no hay números "variables", como insistirá en ensayo posterior- y a constantes. En analogía con este tipo de escritura, pero con mayor radicalidad, Frege acepta la existencia de dos tipos, también, de signos. Con sus palabras, siendo él quien subraya:

> *Adopto la idea fundamental de distinguir dos tipos de signos* (.) *para usarla en el dominio más amplio del pensamiento puro en general*. Divido todos los signos que manejo en *aquellos bajo los cuales se pueden representar cosas diferentes* y *aquellos que tienen un sentido completamente determinado*. Los primeros son *letras*; su función esencial es expresar la *universalidad*. A pesar de su indeterminación, debemos insistir en que una letra debe *conservar*, a través de un contexto dado, el significado que se le de al principio.

Radicalidad que le lleva a adoptar como punto de partida el juicio sin analizar. Con una precisión: hay que diferenciar lo pensado en el juicio y que representa mediante los signos ─ p, y el contenido de lo pensado que representa por ├ p.

> Llamamos *línea de contenido* la línea horizontal, y *línea de juicio* la línea vertical. (.) Lo que sigue a la línea de contenido debe llegar a ser siempre un juicio. ($ 2)

Con lo cual, las líneas horizontal y vertical unidas, ├, conforman el predicado común a todos los juicios, aquello que, desde lo ideográfico, indica que los signos que aparecen a su derecha tomados como un todo constituyen un juicio.

Los juicios se clasifican en dos únicas categorías: universales y particulares, afirmativos y negativos. Las distinciones de la lógica tradicional entre categóricos, hipotéticos, disyuntivos sólo tienen una significación gramatical por lo que carecen, al igual que los llamados apodícticos, de papel alguno en la lógica fregeana.

La radicalidad también se expresa, como he indicado, en dejar a un lado la forma gramatical S-P sustituida por Función-Argumento que es la que adoptan los juicios del pensamiento puro:

> Una distinción entre *sujeto* y *predicado* no tiene lugar en mi manera de representar un juicio. ($ 3)

Y reconoce que sigue la práctica matemática en la cual se hace violencia para distinguir estos dos elementos. No se dan, realmente, más argumentos directos, no se discute más atentamente el papel del lenguaje ordinario.

Su radicalidad, por otro lado, le lleva a una innovación en la escritura: eliminar la discretización horizontal lineal con la que se escribe en el mundo occidental y establecerla en bloques planarios gráficos de abajo-arriba. No lo justifica, simplemente lo muestra en su proceso, haciendo camino.

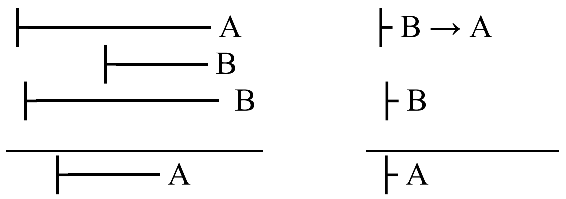
Los distintos tipos de juicios se conectan unos con otros mediante operadores que no son independientes entre sí. Frege elige el condicional o implicación (material) y la negación como primitivos. En su escritura

Que se escriben en notación actual como B →A y ┐A, respectivamente.

Los dos conectivos adoptados como primitivos los caracteriza Frege en términos veritativos, en términos que desde los entornos de 1920 “inventarán” Wittgenstein y Lukasiewicz, de modo independiente entre sí, bajo el nombre de *tablas veritativas*. Así, para Frege, el juicio “├─ B → A” es el “que no tiene lugar únicamente en el caso en el que A esté negado y B afirmado”, después de analizar los cuatro casos posibles.

A partir de estos dos conectivos, y por estudio de casos, determina los de conjunción –B/ A ≡ ¬ (B→¬A) -, disjunción no excluyente –BVA ≡ ¬B → A- y “Ni A ni B son hechos” por ¬(¬A→B), insistiendo en que “las palabras “o”, “y” y “ni – ni – “se aplican, por supuesto, únicamente cuando conectan contenidos que *puedan llegar a ser juicios*” (& 7).

De la misma manera semántica justifica la regla de derivación en el Párrafo 6. Es la única regla de derivación que adopta, y es la de separación o la clásica del *modus ponens*:



Con lo cual establece, realmente, una diferencia sustancial con los procesos deductivos anteriores: es la demostración, la derivación la que queda sometida a reglas explicitadas junto a los juicios que se adopten de partida. Hasta aquí, los matemáticos acudían a la expresión “se demuestra” pero no se daban de manera explícita –salvo en el caso de la demostración por inducción completa- las reglas de demostración a utilizar.

El Cálculo Proposicional bivalente queda, de esta manera, establecido en su versión semántica.

Inmediato, la noción que Frege considera básica, la de “igualdad de contenido” y que, sorprendentemente, no hace referencia a los contenidos sino a los nombres. El análisis fregeano es, aquí, bastante débil. Se queda, finalmente, con la afirmación de que "$\vdash$ (A ≡ B)" indica el juicio de que los símbolos A y B tienen el mismo contenido conceptual y se pueden reemplazar uno por otro allí donde aparezcan. Tema lateral para ser debatido, y muy debatido, años después.

A continuación, las nociones básicas de Función y Cuantificador. Son las que permiten analizar el juicio no ya en Sujeto y Predicado que es una escisión puramente gramatical y que no tiene papel alguno en Lógica. En ese análisis, comienza indicando que en la expresión que refleja la circunstancia de que el hidrógeno es más ligero que el dióxido de carbono se puede reemplazar hidrógeno por oxígeno, por nitrógeno. Lo cual significa que dicha expresión se puede escindir en dos claros componentes: hidrógeno, que es lo que puede ser reemplazado por otro término como oxígeno o nitrógeno y que hace el papel, por consiguiente, de indeterminada o argumento, y una componente estable que hace el papel de función. De modo análogo "Catón mató a Catón" es la expresión de un juicio en el cual el primer "Catón" se puede reemplazar por cualquier otro nombre y, por ello, tiene el papel de una indeterminada o, lo que es igual, es el término que ocupa el lugar del argumento en la función "x mató a Catón".

En general, para expresar una función de argumento A se escribe F(A) y si se pone $\vdash$ F(A) se ha convertido en el juicio que se puede leer diciendo "A tiene la propiedad F". Si una función ψ tiene dos argumentos, A y B, se escribe ψ(A,B) y si se pone $\vdash$ ψ(A,B) este juicio se puede leer diciendo "B se encuentra en la relación ψ con A" o B es el resultado de una aplicación del proceso ψ al objeto A". Por supuesto, son diferentes ψ(A,B) y ψ(B,A).

La cuantificación universal se aplica a las indeterminadas, es decir, a aquellos signos que ocupan el lugar de argumentos en una función dada. La notación de Frege es gráficamente impecable, pero tipográficamente complicada de escribir. En simbología actual es la clásica Vx(Fx) que permite establecer el juicio expresando que, cualquiera que sea su argumento, la función es un hecho para el mismo. Con ella y con la negación caracteriza el cuantificador existencial, que también puede leerse "hay algún a tal que", "hay un F" o "existe un F" y que viene dado por ¬Vx¬F(x).

Manejando la regla de separación proposicional, la de instanciación y la que permite derivar de A → F(x), cuando x no ocurre libre en a, el juicio A → VxF(x), Frege ha establecido por un lado el Cálculo proposicional bivalente y, por otro, un esbozo del de Predicados de primer orden con igualdad. Va a manejar de manera implícita la regla de sustitución simultánea que exhibe escribiendo una tabla a la izquierda de la derivación correspondiente. El Capítulo lo cierra dando el clásico cuadro de oposiciones lógicas escritas en la Conceptografía.

El *Capítulo II* lo dedica a representar en la Conceptografía algunos juicios del pensamiento puro pero, quizá más importante, la derivación de los mismos: "Parece natural derivar los juicios más complejos de los más simples" no para asegurar su certeza sino para manifestar las relaciones que esos juicios tienen entre sí. Y esto porque se le muestra claro que conocer las leyes de ese pensamiento no es lo mismo que conocer las conexiones que guardan entre sí, que tienen unas con otras. Es la clave fundacional fregeana apoyada en el proceso deductivo, derivativo. Pero esa conexión obliga adoptar algunos juicios como primeros "por su potencia" y los demás vendrán derivados deductivamente de ellos. Es la manera con la que Frege justifica la adopción de la axiomática para exponer los juicios del pensamiento puro.

Los axiomas o "juicios más simples" se eligen *por su potencia,* carecen de cualquier otra nota dado que aquí está prohibido acudir a la intuición, a la captación de su verdad. Con ello, realmente, la verdad de los axiomas, que se transmite mediante la derivación, se fundamenta en la fertilidad de los mismos.

Los juicios que constituyen el sistema de axiomas, junto a las reglas de derivación, de deducción explicitadas, constituyen el instrumento que permite obtener cualquier juicio que pueda ser expresado en la **Conceptografía**.

Frege elige nueve axiomas adoptando los conectivos proposicionales implicación y negación como primitivos y como cuantificador el universal además de aceptar dos axiomas que expresan la identidad.

Los axiomas los escinde en grupos de tres: los que regulan la implicación, la negación y la identidad y la cuantificación. Los proposicionales son los siguientes en notación actual, no en la fregeana, y donde el número a la derecha entre paréntesis indica el orden en el que aparecen en la obra de Frege:

$a \rightarrow (b \rightarrow a)$ (1)
$[c \rightarrow (b \rightarrow a)] \rightarrow [(c \rightarrow b) \rightarrow (c \rightarrow a)]$ (2)
$[d \rightarrow (b \rightarrow a)] \rightarrow [b \rightarrow (d \rightarrow a)]$ (8)
$(a \rightarrow b) \rightarrow (\neg b \rightarrow \neg a)$ (28)
$\neg\neg a \rightarrow a$ (31)
$a \rightarrow \neg\neg a$ (41)

Los tres siguientes se apoyan en la identidad y en la instanciación del cuantificador universal:

$c \equiv d \rightarrow (f(c) \rightarrow f(d))$ (52)

$c \equiv c$ (54)
$\forall x\, f(x) \rightarrow f(c)$ (58)

Las reglas de derivación, las ya señaladas en el Capítulo I. Y, a partir de aquí, toda una cadena de derivaciones.

El *Capítulo III* introduce, ya, lo que considera primeros pasos para la consecución de su sueño: elaborar una teoría de las sucesiones matemáticas donde la intuición a priori nada tiene que hacer. A pesar de su brevedad, Frege reconoce que las proposiciones que acerca de las sucesiones elabora en este Capítulo sobrepasan en generalidad a todas las que se puedan derivar de cualquier intuición sobre las mismas. Frege, además, va a indicar que los juicios que en esta sección se exponen no son sintéticos como quería Kant, sino estrictamente analíticos, de naturaleza lógica.

Para ello introduce la noción de "propiedad hereditaria" en el parágrafo 25 y las de relación *ancestral* y antecesor en los parágrafos 26 y 29. Las últimas las utiliza para justificar la inducción completa que atribuye a Bernoulli y que traduce en los términos

> *Si x tiene la propiedad F que es hereditaria en la f-sucesión, y si y sigue a x en la f-sucesión, entonces y tiene la propiedad F.*

Frege insiste que este Capítulo sólo es un esbozo y promete volver al tema. En la Conceptografía no ha fundamentado, aún, la Aritmética pero ha dado el primer paso para ello, para llegar a realizar su sueño.

El **Begrisffschrift** es una obra, realmente, magnífica. En ella se ha construido no ya un lenguaje de signos, de fórmulas con las cuales expresar el contenido de pensamiento puro, sino el Cálculo Proposicional y el de Predicados con su justificación semántica y su elaboración axiomática. Como toda construcción conceptual ha dejado, al paso, una serie de problemas, unos internos que le llevan a "retrasar la ejecución de mi proyecto", como escribe en la página siguiente a la última cita, y que se ligan a las nociones de extensión de un concepto, a sentido y referencia básicamente, y otras más aparentemente laterales al objetivo final de logificar la Aritmética, la Matemática pero que son de importancia radical para los terrenos conceptuales, además de ser básicos para la clarificación del objetivo final fundacional de la Aritmética, de la Matemática.

En alguno de ellos, precisamente, se cimentará la fama posterior de Frege mucho más que en su proyecto Logicista que, como programa, él mismo llegó a reconocer que estaba condenado al fracaso, a pesar de los esfuerzos realizados posteriormente por Russell para mantenerlo en pie. Tan condenado al fracaso que Frege no cumplió su proyecto de escribir el tercer volumen de sus **Leyes de la Aritmética**.

Serán los campos de la Filosofía del Lenguaje, de la Lógica filosófica los de repercusión posterior, los que se consideren temas vivos al día de hoy.

En lo que sigue voy a detenerme en mero esbozo en estos campos sobre los cuales la Bibliografía es impresionante. Esbozo que sitúe con la mayor claridad y rigor posibles, la figura de Frege en el panorama aquí compuesto.

Filosofía del Lenguaje

Desde una crítica al lenguaje ordinario, pero desde la praxis matemática, Frege establece lo que considerar las tres grandes categorías en este dominio: Función-Argumento, Sentido-Referencia, Principio del contexto.

Ya he indicado que hay una problemática que se hace común en la época fregeana: la del lenguaje. El estudio del sánscrito, de las lenguas aborígenes americanas, los nacionalismos con sus lenguas como elemento diferenciador… llevan a la creación de la filología comparada, a plantear el papel de la estructura del lenguaje, su incidencia en el pensamiento y la organización social…

Para Frege el lenguaje ordinario es el medio universal en el que estamos inmersos y, por ello, se hace difícil discutir las relaciones que lo conectan a la realidad extralingüística. Como medio universal comporta un número finito de términos susceptibles de expresar un número ilimitado de cosas, por lo que cada término puede tener más de una significación.

Esto último implica que en ese medio aparecen junto a reglas lógicas elementos psicológicos, pragmáticos, emocionales… que hacen que, en tal mezcla, se presenten no sólo vaguedades, ambigüedades, sino trampas continuas. Surgen trampas porque en un acto ilocutorio hay dos aspectos: la expresión y la sugerencia que esa expresión comporta pero que no se explicita y se sugiere lo que no se pronuncia. Es trampa en la que se incardina, también, la distinción entre el acto de pensar y lo pensado, entre lo expresado y lo querido expresar…

Habría que purgar, por ello, el lenguaje ordinario: algo imposible para Frege. De aquí la necesidad de pasar a la creación de un lenguaje ideográfico en el cual se muestren únicamente los rasgos de contenido conceptual. Rasgos de carácter lógico centrados en lo verdadero y lo falso. Valores atribuibles por modo exclusivo a los juicios de contenido conceptual y no a los conceptos.

El lenguaje ideográfico tiene como punto de partida los juicios y no ya los conceptos. Es lo que Frege remarcará en réplica a Schröder:

> Una de las diferencias más notables entre mi concepción y la de Boole y, puedo añadir, la de Aristóteles, proviene de que yo no parto de conceptos sino de juicios.

Los juicios no adoptan la forma Sujeto-Predicado que es la propia del lenguaje ordinario y de la Gramática que estudia y codifica ese lenguaje. Forma gramatical inapropiada para la expresión del contenido de pensamiento puro por los motivos, ya tópicos, y que se pueden resumir en puntos como los siguientes:

1. No todos los juicios adoptan esta forma, en particular los existenciales y, sobre todo, los que expresan relaciones y condicionales;
2. El lenguaje matemático no parece que sea expresable en la estructura gramatical clásica ni en la propia de la silogística aristotélica;
3. La forma S-P no capta adecuadamente los matices de la negación, especialmente cuando se trata de manejar juicios con cuantificador. Si bien al negar un juicio como "Napoleón venció en Austerlitz" se obtiene "Napoleón no venció en Austerlitz" que es correcta, cuando se tiene una expresión como "Todos los paraguayos son guaraníes" su negación no sería "Todos los paraguayos no son guaraníes" o "Ningún paraguayo es guaraní" que son incorrectas, sino "No todos los paraguayos son guaraníes" que equivale a afirmar "Algunos paraguayos no son guaraníes".

Lo que está en juego, aquí, es la relación de la negación con la cuantificación y, subyacente, el enfoque extensional distributivo del dominio de una función, de la posterior noción de extensión de un concepto. Un enfoque discretizador que Frege mostrará explícitamente y con radicalidad cuando discute el término variable que rechaza como atribuible a cualquier tipo de argumento de una función. No hay variables, sino indeterminadas. Frege se alinea con el enfoque discretizador que se manifiesta en el Análisis a partir de los trabajos de Weiertrass. Un enfoque que la forma gramatical S-P no puede poner de relieve y, consecuente, manejarlo. Un enfoque desde el cual un juicio como "Los paraguayos son guaraníes" se traduce en la Conceptografía de Frege como $Vx(Px \rightarrow Gx)$ y su negación como $\neg Vx(Px\rightarrow Gx)$ que se transforma en $Ex\neg(Px\rightarrow Gx) \equiv Ex(Px / \neg Gx)$.

4. Aristóteles y la lógica clásica partían de la terna Concepto-Juicio-Raciocinio. Los conceptos eran, obligatoriamente, intercambiables en el juicio como Sujetos y Predicados en el caso del silogismo, por lo cual se identifica, realmente, concepto con objeto y con propiedad. Pero una cosa es ser propiedad de un sujeto como objeto y otra el objeto en sí. Aquí, una precisión: concepto se utiliza como idea general o término y

no en el sentido técnico que le dará Frege. Además, nada hay en el concepto que le obligue a componer un juicio.

La identificación anterior se apoya en que no se diferencia, en ocasiones, especie e individuo: así cuando se habla de "ballena" y se dice que es un mamífero, o de "caballo" y se dice que es herbívoro, se realizan actos ilocutorios en los cuales se hace referencia bien a individuo, bien a especie.

Son elementos que conducen a Frege a establecer su primera gran categoría en los terrenos de la Filosofía del lenguaje:

Todo juicio es de la forma Función-Argumento: f(x)

En la expresión ideográfica uno de los términos será la función f( ) y el otro el argumento con la diferencia de que la función ha de tener un lugar vacío –o dos o tres o más si es de dos, tres o más variables- que han de ser completados por el –los- argumentos mientras que el argumento carece de huecos, de lugares vacíos.

> Desde que se admite todo objeto sin restricciones como argumento o valor de una función, la cuestión es saber lo que se entiende por objeto. Una definición según la escuela es imposible desde mi punto de vista, porque topamos con algo cuya simplicidad impide cualquier análisis lógico. Sólo puede decirse brevemente: un objeto es todo lo que no es función, es aquello que no comporta vacío alguno.

Si se pone f(x) se tiene, realmente, una función proposicional, no un juicio, ya que x representa el argumento de la función que hace el papel de variable –término matemático-, indeterminada –en la terminología de Frege-. Función proposicional que se convierte en juicio por dos procesos: reemplazando la indeterminada x por un término, una constante, nombre propio, es decir, por un elemento del dominio de la función; o indicando que todo elemento x pertenece al dominio es decir, cuantificando la indeterminada x.

Desde la praxis matemática, al lenguaje conceptual: Frege convierte una oración como "la manzana es roja" en una expresión función-argumento como f(m) donde m es "manzana" y f( ) es "ser rojo". La oración es verdadera cuando el argumento m pertenece al dominio de la función. El ejemplo fregeano es, ya, tópico: "Julio César conquistó las Galias". "Julio César" aparece como argumento de la función "conquistador de las Galias", juicio que es verdadero pero si en él se pone "Alejandro Magno conquistó las Galias" resultará falso, porque "Alejandro Magno" no pertenece al dominio de la función "conquistador de las Galias".

Y aquí se tiene un paso más: si en lugar de mantener la terminología matemática se trata de generalizar a un campo pretendidamente más amplio, la Categoría Función-

Argumento se convierte en Concepto-Objeto. Concepto es, en el fondo, la función cuyo valor es, siempre, un valor de verdad sea cual sea su argumento, su objeto. Y los objetos que hacen que el juicio posea valor de verdad se dice que caen bajo la extensión del Concepto y no serían otra cosa que los elementos pertenecientes al dominio de la función.

Por otro lado, dar una función en el Hacer matemático obliga a indicar en qué contexto está definida la misma. No es lo mismo una función aritmética que una de variable real o una analítica. El argumento y los valores son radicalmente diferentes. En el paso del hacer matemático al más general fregeano, esto equivale a decir que la verdad de un juicio depende de los elementos que lo componen; que, además, esos elementos sólo tendrán significado en el contexto, en el interior del juicio en el que se encuentren.

Si se escribe $x \rightarrow f(x)$ y se pone c por x, el valor f(c) depende no sólo de c sino de la característica de f, del contexto funcional en el que se está trabajando. De aquí que haya que precisar si la función es aritmética, real, compleja, lógica… Si se escribe sin más $f(x) = x^2+1$ se tiene una función que no está plenamente caracterizada porque falta indicar dónde está definida. Si su dominio es N entonces x ha de tomar como argumento un número natural, 3 por ejemplo, y el valor de la función sería $f(3) = 9+1 = 10$. Si la función es de variable real entonces x se puede tomar como argumento π y el valor de la función sería $f(\pi) = \pi^2+1$.

Es remarcar el papel del contexto en la formación y significado de una función, en la estructura Concepto-Objeto. El principio del Contexto, otra de las grandes Categorías de Frege, asegurado a través de la praxis matemática. Una categoría, la del Contexto, que vendrá soportada en dos principios: las palabras sólo tienen significado en el contexto de una proposición y a cada expresión significativa le corresponde un elemento de la realidad. Este último es el que permite hablar del significado de un juicio como su valor de verdad.

Junto a estas dos grandes categorías, la praxis matemática impone otra: diferenciar entre Sentido y Referencia. Un objeto geométrico se puede caracterizar de múltiples maneras. Una circunferencia se define como una sección o corte especial en un cono específico, o como el lugar geométrico de los puntos de un plano equidistantes de uno exterior llamado centro, o como el lugar de los pares de puntos que satisfacen una ecuación cuadrática homogénea en el plano… Ocurre lo mismo con los números y, así, operaciones diferentes como la suma, el producto, la potenciación… pueden dar el mismo número, como en los casos 3+6 = 3^2 = 3.3 = 9. El sentido, en cada una de estas caracterizaciones, es diferente: no es lo mismo una sección cónica que un lugar geométrico, una suma que una potencia o un producto. Sin embargo, todos los casos mencionados hacen referencia al mismo objeto –la circunferencia, el número 9-. Expresiones distintas poseen el mismo referente, remarcando siempre una diferencia: no es lo mismo sentido que referencia.

En lenguaje ordinario, el ejemplo de Frege es ya tópico: “estrella matutina” no tiene el mismo sentido que “estrella vespertina”. La referencia en ambos casos es, sin embargo, la misma, el planeta Venus. Con una precisión: saber que la referencia es la misma en cuanto a los términos, a los objetos, puede suponer un auténtico avance cognoscitivo como lo muestra que la identificación del lucero matutino con el que aparece al atardecer sólo se admitiera en Grecia a partir del s. –IV, por ejemplo. Pero el avance cognitivo, por importante que sea, no se debe identificar con el aspecto estrictamente conceptual, único terreno que importa a Frege.

El paso de términos –como argumentos, como objetos- a función o Concepto, inmediato. Hay funciones que se definen mediante características distintas y poseen, sin embargo, el mismo referencial. Una parábola puede venir dada por expresiones funcionales diferentes como ejemplificará Frege.

Al pasar al contenido de pensamiento, la estructura Concepto-Objeto posee un significado que se identificará con su referente: su valor veritativo. Y una cosa es el pensamiento que se expresa –que haría el papel del sentido- y otra es el valor veritativo del juicio de ese pensamiento –que equivale a la referencia de ese pensamiento-.

En el esquema anterior no entro en las dificultades que se van acumulando y que van desde el hecho de que Frege, realmente, toma como objeto de estudio los nombres y los juicios y se sitúa, de esta manera, en un enfoque metalingüístico, hasta la caída en la circularidad por la inmanencia de actuar en el interior del lenguaje. En medio, los problemas con la identidad que aparecen en la gran categoría de sentido y referencia al igual que el enlace de la verdad con el significado de un juicio… Problemas a los que se enfrenta Frege y, como no son estrictamente matemáticos, no resuelve aunque se incardinan en su obra. Cuestiones abiertas y, por ello, auténticamente enriquecedoras para el pensamiento posterior que los sigue debatiendo.

Epistemología

Frege afirma que las cuestiones epistemológicas le vinieron motivadas, como no podía ser de otra manera, por sus investigaciones en los fundamentos de la Aritmética.

Investigaciones en las cuales, según reitera, sigue la matriz kantiana en las dicotomías analítico-sintético, a priori-a posteriori. Muestra su acuerdo con Kant respecto al estatuto de las proposiciones geométricas que estima como juicios sintéticos a priori, aunque no en cuanto a los juicios aritméticos que se le muestran como analíticos.

Ahora bien, Frege ha variado radicalmente el sentido que da a términos como analítico o sintético porque el juicio ya no es de la forma S-P como en Kant y no tiene sentido, entonces, hablar de que las notas del sujeto están o no contenidas en las notas del predicado. Y no tiene más remedio, por ello, que replantear esa matriz y es lo que va a hacer, entre otras cosas, en **Fundamentos de la Aritmética** de 1884.

Dicotomías que, una vez más, no atañen al contenido del pensamiento puro, al contenido del juicio sino a la legitimidad del acto de juzgar. Así, en el párrafo 3 de este libro, indicará que para saber si una proposición es analítica o sintética hay que acudir a la demostración y retrotraerla "hasta las verdades originarias".

Y una proposición será *analítica* cuando tales verdades originarias sean, por modo exclusivo, "leyes lógicas generales" y definiciones; será *sintética* cuando esas verdades "no son de naturaleza lógica general, sino que están relacionadas con un campo particular del conocimiento". Serán *a posteriori* cuando su demostración sólo puede ser validada atendiendo a los hechos, a verdades sin universalidad, mientras serán *a priori* cuando esa demostración sólo puede hacerse partiendo de leyes generales que no pueden ni precisan ser demostradas a su vez.

De este modo, y como en Kant, se eliminan las analíticas a posteriori por tener características incompatibles entre sí. También elimina las sintéticas a posteriori con lo que muestra que el empirismo de Mill es insostenible. Sólo permanecen las analíticas a priori y las sintéticas a priori. Ahora bien, decidirse por estas últimos no es posible más que apelando a

> Una intuición pura como fundamento último del conocimiento, si bien es difícil decir aquí si se trata de una intuición espacial o temporal, o de qué otro tipo puede ser.

Apelar a la intuición implica un previo conocimiento claro y preciso de qué sea la misma y Frege observa que el mismo Kant se muestra confuso al utilizar el término intuición en sentidos diferentes en **Crítica de la razón pura** y en **Lógica**. Además, una llamada a la intuición, y por lo ya dicho, se le muestra fuera de lugar cuando se trata de fundamentar la Aritmética, aunque se pueda admitir para los terrenos geométricos. Y esto le lleva a remarcar la diferencia que había asumido en sus primeros trabajos entre Aritmética y Geometría. En el párrafo 14 de **Fundamentos de la Aritmética** escribe

> Las verdades geométricas rigen el dominio de lo espacialmente intuitivo, ya sea realidad o producto de la imaginación.

Y repite un argumento ya dado por Hume aunque no lo cite: ninguna representación puede liberarse del espacio y, con él, de la geometría, en la medida en que es intuible y ello aunque el sujeto esté soñando o delirando. Sólo el pensamiento conceptual se puede liberar de los axiomas geométricos y de la intuición que contienen cuando se acepta un espacio de cuatro dimensiones por ejemplo o una medida de curvatura positiva, en cuyo caso "se aparta totalmente del terreno de la intuición".

Frege, no se si con auténtico conocimiento, mantiene una posición radicalmente opuesta a Helmholtz, a los primeros trabajos de Poincaré sobre las geometrías no-euclídeas, aunque ya estamos en 1884. Y lo más sorprendente es que afirma, en términos totalmente semejantes a los que escribiera Kant en **Prolegómenos**:

> Si en estos casos también se echa mano de ella (de la intuición), se trata, en cualquier caso, siempre de la intuición del espacio euclídeo, del único de cuya estructura tenemos una intuición.

Una intuición que se tomaría, entonces, como símbolo de algo distinto

> Se llama, por ejemplo, recta o plano lo que se intuye curvo

La geometría no-euclídea, así, eliminada en beneficio de una geometría apoyada en una pretendida intuición espacial que, realmente, y a pesar de lo afirmado por Kant o Frege, no se tiene, porque no se capta intuitivamente el paralelismo, es decir, no se capta la característica básica de la geometría euclídea.

En cualquier caso, aquí, todavía parece que la no-euclídea puede ser aceptable conceptualmente aunque no sea intuible y se manejen sus términos, en este caso, como símbolos. Más radical, en escritos que hace entre 1899 y 1906, Frege mantendrá:

> Si la geometría euclídea es verdadera, entonces la geometría no-euclídea es falsa, y si la geometría no-euclídea es verdadera, la geometría euclídea es falsa…
> Una vez estuvimos persiguiendo una ciencia que llamamos Alquimia, pero cuando reconocimos que esta llamada ciencia era un tremendo error, la eliminamos de los dominios de la ciencia… Ahora la cuestión es si expulsamos a la geometría euclídea o a la no-euclídea al igual que la Alquimia y la Astrología.

Cuestión retórica porque para Frege es claro que sólo hay una geometría verdadera y esa es la euclídea. Única, además, que proporciona la intuición del espacio y que viene establecida, desde lo proposicional, a partir de los axiomas euclídeos.

Desde lo conceptual los axiomas euclídeos pueden ser, sin embargo, negados y aceptar el opuesto a uno u otro axioma sin entrar en contradicción aunque las conclusiones obtenidas sean contrarias a la intuición. Para Frege

> Esta posibilidad muestra que los axiomas geométricos son independientes entre sí y de las leyes lógicas primitivas; o sea, que son sintéticos.

Todo lo contrario ocurre con los juicios aritméticos que son tales que

> Rigen el dominio de lo numerable. Este lo abarca todo, pues no solo le pertenece lo real, no sólo lo intuible, sino también todo lo pensable

y negarlos sería, en el fondo, negar, destruir el pensamiento. Los juicios de la aritmética no pueden ser, por ello, sintéticos. La intuición no puede fundamentarlos porque el carácter de un número no viene dado de antemano y, por otro lado y frente a Kant y Mill, no captamos, ni podemos captar, números muy grandes. Además Frege pasa a rechazar que sean analíticos en el sentido de Leibniz como puras identidades formales sino que, en todo caso,

> las verdades de la Aritmética serían a las de la Lógica lo que los teoremas son a los axiomas de la geometría

en el sentido de que se obtendrían únicamente a partir de las leyes más universales, más generales del pensamiento, de aquellas que no requieren ni pueden ser demostradas. Los juicios de la Aritmética serían analíticos pero en el nuevo significado que inicia Frege.

Matriz kantiana, sí, pero radicalmente modificada porque ahora los juicios analíticos no son neutrales epistemológicamente sino que extienden el conocimiento como lo hacen los juicios aritméticos aunque se demuestren a partir de leyes lógicas por modo exclusivo. Consecuente, Frege afirmará, en el párrafo 17, que la Lógica no es estéril.

De la misma manera, y haciendo referencia a la gran Categoría de Sentido-Referencia, indicará que las ecuaciones dan conocimiento, dan información. Si se pone “a=b” esta ecuación indica que a y b se refieren al mismo objeto, al mismo número aunque con sentidos o maneras distintas. La analiticidad, para Frege, posee un auténtico valor epistemológico, como el ejemplo de Venus atestigua claramente.

Al igual que en Kant, en Frege se entremezclan en la distinción de esta matriz criterios diferentes de manera implícita: por un lado, el de la captación o no intuitiva de lo geométrico y de lo aritmético y, por otro lado, el de la posibilidad o no de negar los axiomas geométricos y los juicios aritméticos. Y precisamente la no posibilidad de negar los juicios aritméticos conduce a mantener que estos juicios son más generales que los geométricos y, por ello, se encuentran en íntima conexión con las leyes absolutamente generales del pensamiento.

Y subrayo que, para Frege, *todo es numerable*: también cae bajo su dominio, bajo lo numerable, bajo la Aritmética, las mismas leyes del pensamiento. De aquí que, en el fondo, no puedan desgajarse unas leyes de otras como primeros puntos de partida para realizar las demostraciones correspondientes. Elección siempre relativa al sistema que se maneje porque la propiedad de ser axioma no es algo absoluto como ya había establecido en la *Conceptografía*: se eligen unos juicios u otros por su potencia generadora, nada más.

Si desde la Lógica no hay criterio absoluto para caracterizar una ley como ley lógica, como ley absolutamente general del pensamiento, sí lo hay para diferenciar lo analítico de lo sintético. Ese criterio se apoya en la existencia de la demostración: lo analítico y lo sintético se diferencian en el punto de partida de la misma, si los axiomas adoptados son o leyes lógicas universales o principios de conocimiento sectorial. La clave, por ello, la noción de demostración.

En polémica con Hilbert en 1899 explicita con nitidez lo que entiende por demostración y donde expone, una vez más, su oposición frontal con todo tipo de formalismo. Muy brevemente, y remitiéndome a otros escritos, indico que para Frege la demostración no es una simple sucesión de palabras o signos sino un auténtico proceso de pensamientos de los cuales se puede predicar, siempre, que son verdaderos. La demostración no es cadena de formas vacías de contenido sino proceso en el cual se va de pensamiento a pensamiento y, realmente, constituye un análisis conceptual que refleja el enlace de unos con otros contenidos de tal pensamiento. Decir que la proposición A se ha demostrado es decir que el pensamiento expresado por A se ha obtenido enlazado con otros pensamientos que constituyen las premisas y los pasos intermedios de la demostración.

De modo consecuente, cuando se habla de la independencia de unas proposiciones respecto de otras lo que se quiere decir es que el pensamiento de las primeras no depende o está contenido en las segundas. Y todos los pensamientos son verdaderos o falsos.

> Una inferencia no pertenece al dominio de los signos, sino que es más bien una cuestión de hacer un juicio que está basado sobre juicios previamente hechos de acuerdo con leyes lógicas. Toda premisa es un pensamiento definido que ha sido reconocido como verdadero y la conclusión también es un pensamiento definido que es reconocido como verdadero.

Por ello, los axiomas que Hilbert plantea en **Fundamentos de Geometría** de 1899 son proposiciones impropias que no expresan pensamientos y es por lo cual Hilbert los adopta unas veces como axiomas y otras no.

Es claro que si una proposición manifiesta un pensamiento, este también puede ser reflejado por otra proposición diferente. Hay, en Frege, una insistencia más, dos planos: el contenido del pensamiento, la expresión de ese contenido. Se puede poner

pensamiento	expresiones de su contenido	
Π conjunto de pensamientos	Σ conjunto de proposiciones	Σ’ conj. de expresiones
p pensamiento consecuencia	s propn. consec.	s’ propn. cons.

Y la derivación de s de Σ garantiza que p es consecuencia de Π, lo mismo que haría s’ si es derivable de Σ’. Pero si s no es derivable de Σ, no por ello se puede afirmar que p no sea consecuencia de Π porque puede ocurrir que s’ sea derivable de Σ’. Esto último garantiza que p sí es consecuencia del conjunto de pensamientos.

En otras palabras, la derivación asegura la demostrabilidad en el aspecto positivo pero si en lo derivativo formal se llega a una contradicción, no se asegura que los pensamientos sean contradictorios entre sí. Para Frege la garantía sintáctica derivativa no basta, porque aunque se demuestre que Σ no sea contradictorio puede ocurrir que Σ’ sí lo sea; no se garantiza que el conjunto de premisas sea, en sí, consistente.

Es claro que apoyar todo el criterio en los procesos demostrativos y que los pensamientos sean, en esos procesos, verdaderos, hace surgir muchas cuestiones al igual que el dotar de valor epistemológico a la analiticidad, especialmente en cuanto al sentido-referencia. Entre otras cuestiones, reducir el criterio de verdad a lo demostrativo, pero partiendo de leyes que no pueden ser demostradas, hace quedar el criterio en el aire. Y cuestiones más elementales: se harían inviables procesos demostrativos como los condicionales y, sobre todo, las demostraciones por reducción al absurdo.

Frente a Frege, los axiomas pueden cumplir otra función que, de hecho, poseen en el Hacer Global: caracterizar una estructura sin que se tengan que admitir como verdaderos o falsos en sí, con independencia al sistema que determinan. Esto supone admitir como instrumento conceptual la definición implícita o por postulados. Algo que Frege rechaza de manera explícita y que, sin embargo, se va a constituir en uno de los instrumentos claves del Hacer Global como le indicará, en la polémica, Hilbert.

Son temas para discutir tras los análisis conceptuales iniciados en este terreno por Frege. Una vez más, campo abierto.

De la Aritmética y sus Fundamentos

Con su obra **Fundamentos de la Aritmética**, que publica en 1884, inicia, realmente, la ejecución de su sueño. Como afirmará en el primer volumen de **Leyes fundamentales de la Aritmética**, publicado en 1893:

> Con este libro llevo a ejecución un proyecto que tenía planeado desde mi *Begrisffschrift*, de 1879, y empecé en mis **Fundamentos de la Aritmética** de 1884.

Los **Fundamentos** se editan una vez que Frege ha construido el lenguaje ideográfico en el que expresar el contenido de pensamiento puro; una vez que ha adoptado como forma básica del juicio la de Función-Argumento transformada en Concepto-Objeto y la distinción Sentido-Referencia tanto para términos como para juicios, y una vez que ha precisado algunos rasgos de su epistemología transformando la matriz kantiana que, sin embargo, dice mantener.

A partir de estos elementos en este libro, que está escrito en lenguaje ordinario, llega a esbozar de manera radical y explícita su programa. Insistirá, una vez más, en la necesidad del rigor y en que las definiciones han de ser fértiles pero, lo que se le muestra más importante, rigurosas para que al final de todo el proceso no se encuentre una contradicción que derrumbe el edificio mal construido.

Es un esbozo que realiza muy hábilmente en etapas que se van superponiendo. Por lo pronto, establece que para lograr su objetivo hay que seguir los tres principios metodológicos que considera fundamentales:

> hay que separar tajantemente lo psicológico de lo lógico, lo subjetivo de lo objetivo;
> el significado de las palabras debe ser buscado en el contexto de todo el enunciado, nunca en las palabras aisladas;
> hay que tener siempre presente la diferencia entre concepto y objeto. (1884, p. 20)

El primero indica la nítida oposición a cualquier forma de psicologismo; la segunda, el principio del contexto; el tercero, el establecimiento de su "nueva" forma de estructurar los juicios, con todo lo que eso conlleva.

Y, junto a estos principios, una crítica realmente dura y mordaz, en ocasiones no muy bien intencionada, a cuantas posturas contrarias se han ido manifestando respecto a los Fundamentos de la Aritmética, en cuanto a la noción de número natural. Una crítica por la cual, y en contraposición, sólo queda su posición como la única coherente, posición que el lector no tendrá más remedio que aceptar dado el cuadro presentado. Formalismo, empirismo, cualquier tipo de intuicionismo, de epistemología genética, de psicologismo, de constructivismo… han de ser rechazados desde la crítica fregeana.

Por mero ejemplo, el empirismo de Stuart Mill se pretende que salga, realmente, muy mal parado lo mismo que el psicologismo que le acompaña. Sin embargo, hay acusaciones que, realmente, rozan ese empirismo y otras pueden ser rechazadas con cierta facilidad. Lo mismo ocurre con la caricatura de formalismo sintáctico que hace sostener a Hankel y Thomae y según el cual, como el fundamento último es el signo gráfico, si se escribe 2 con grafía mayor que 3 se tendría que afirmar que 2 es mayor que 3, o si se escriben los signos con tinta roja se tiene que admitir que una propiedad de los números es la de ser rojos… No es quitar méritos a la capacidad crítica y dialéctica de Frege pero, en muchas ocasiones, lo mínimo que se puede decir es que hace caricaturas de los oponentes para destrozarlos con mayor facilidad…

En contraposición, y desde esa crítica, se van desgajando propiedades atribuibles a los números naturales, eliminando algunas que se ven como mal predicadas. En esquema, y entre las que aparecen en el escrito, enuncio las siguientes:

1. Los números no son propiedades al estilo de los adjetivos. Decir de un árbol que es verde es lo mismo que decir que cada una de sus hojas es verde –no se indica por qué no se atribuye a las ramas o al tronco la propiedad de ser, también, verdes-, pero si se afirma que el árbol tiene mil hojas, no se puede decir sin falsedad que cada hoja tiene mil hojas... Una crítica dirigida, en principio, contra la idea de Stuart Mill de que a lo numérico se le podría atribuir la propiedad distributiva.

2. Frente a una caricatura de empirismo, Frege sostiene que no sólo las manzanas, piedras, caballos…, los objetos materiales en general son los únicos numerables, sino que también lo son los conceptos, los teoremas, las leyes lógicas… Retoma lo que hubiera indicado Locke en Ensayo sobre el Entendimiento humano, que el número es

> la idea más universal que tenemos. Porque el número se aplica a los hombres, a los ángeles, a las acciones y a los pensamientos y a todo lo que puede existir o imaginarse. (Libro II, cap. XVI, 1)

Como consecuencia surge un principio que considero esencial en el pensamiento fregeano: *Todo es numerable*. Principio en el que se condensa, realmente, la identificación de la Aritmética con la Lógica, constituida por las leyes más generales del pensamiento válidas para todo; generalidad que aparece también como propia de lo numerable que, por esa universalidad omnicomprensiva, abarcaría también a lo pensable.

3. El número es lo que responde a la pregunta básica: ¿cuántos hay? Lo cual indicaría que en Frege, y frente a Kronecker, du Bois-Reymond, Helmholtz, frente a los

constructivistas intuicionistas y frente a los empiristas, primará lo cardinal sobre lo ordinal. Consecuente, se sabrá cuántos hay pero no se sabrá especificar ese cuántos porque no se sabe contar.

Un enfoque en el cual surge, inmediato, un problema: la búsqueda de criterios para saber contar; es decir, establecido el número como cardinal, y de manera previa a saber contar, se tienen que establecer las reglas del orden o de los órdenes en el que situar esa cardinalidad para poder responder a la pregunta que se considera base: la de cuántos hay.

4. Una misma situación da lugar a posibles numeraciones diferentes: una caja de zapatos puede verse conteniendo *dos* zapatos o conteniendo *un* par de zapatos. Esto supone que no es desde la simple observación empírica desde la que se obtiene el número: hay que establecer criterios previos para su determinación adecuada, para llevar a cabo esa observación empírica.

Si estas son algunas de las propiedades primarias, en el programa de Frege hay otras que constituyen las tesis centrales del mismo. Son las que reflejan más adecuadamente su sueño de fundamentar de una vez y para siempre la Aritmética en leyes generales, universales y válidas para todo pensamiento y lugar. Tesis que, por ello, son leyes lógicas que, por la propiedad 2 anterior, se identifican con las leyes aritméticas.

Estas tesis, que se pueden estimar esenciales y constitutivas de lo que entender por el *Logicismo de Frege*, son las tres siguientes:

1. *Las proposiciones de números contienen aserciones sobre conceptos*. Esto quiere decir que el número no es una propiedad de ideas o de palabras, ni se puede adscribir a objetos o a colecciones de objetos, sino que hay que relacionarlo con conceptos. En el parágrafo 46 Frege analiza esta tesis: Decir "Venus tiene 0 lunas" quiere decir que al concepto "luna de Venus" se le atribuye la propiedad de que nada cae bajo él; se afirma que la extensión correspondiente a ese concepto carece de elementos, de miembros, lo cual se expresaría como una proposición que viene precedida por el artículo "el" de la forma siguiente,

El número de lunas de Venus es 0

Si se afirma "El carruaje del rey va tirado por cuatro caballos" lo que se hace es asignar el número 4 al concepto "caballos que tiran del carruaje del rey". O también, en una expresión como "El número de satélites de la Tierra", el término "el" va ligado al concepto “satélites de la Tierra” y como hay un objeto que cae bajo este concepto esa expresión puede completarse afirmando “es 1”.

El número es, así, la contestación a la pregunta por cuántos objetos caen bajo un Concepto, por lo cual son los que dan la cardinalidad de la extensión ligada a ese Concepto. De esta manera, y desde el terreno lingüístico, no se puede hablar de números cardinales sin introducir términos singulares que son los que obligan a que la forma lingüística venga precedida por el artículo *el*.

Naturalmente, y una vez más, el Concepto equivale a Función y el Objeto a Argumento, por lo cual se pueden representar en su *Conceptografía* las expresiones del tipo “El número de objetos que caen bajo el concepto F”, se pueden representar las definiciones clave de todo su sistema.

Frege discute la cuestión de que una expresión como la anterior parece depender, en el fondo, del tiempo. Hablar de “el número de habitantes del Imperio alemán” puede contestarse con números distintos según el tiempo en el que se formule la pregunta. Al igual que si se indica “el número de libros escritos por Frege”. Un error porque no afecta lo temporal, en el fondo, a la cuestión conceptual, no son los números los que varían sino la situación fenomenológica o histórica a la que representan. Situación que puede aclararse agregando la fecha del momento del cual se establece la cantidad o número.

2. *Los números son objetos*. Por supuesto, objeto en el sentido fregeano que implica, por lo pronto, que no es un objeto o fenómeno físico ni cae bajo la intuición en el sentido kantiano del término. Como objeto es independiente a intuiciones, sensaciones, imaginación de quien piense en ellos. Los números como objetos no son entes ideales, ni ideas, ni palabras: son entes lógicos. No tiene sentido preguntarse, por ejemplo, por su situación espacial:

> No tiene ningún sentido una determinación local del número 4; pero de ello solamente se sigue que no es un objeto espacial, no que no sea ningún objeto en absoluto (1884, p. 85)

Es tesis que conlleva la problemática epistemológica de cómo alcanzar el conocimiento de lo que no es captable por los sentidos ni por la imaginación ni pertenece a un mundo eidético especial: cómo alcanzar el conocimiento de los objetos lógicos, de los objetos abstractos. Y Frege la convierte en tesis, realmente, acerca de la forma lógica y semántica de las palabras y oraciones sobre números. La convicción fregeana es que el conocimiento que se puede tener acerca de los números se obtiene a través del contexto de un juicio, de una proposición en la cual los elementos poseen un significado. Y por ello la captación del número ha de hacerse a través del sentido de las proposiciones en las cuales aparecen las palabras sobre números.

En otras palabras, la táctica de Frege es hacer ver que la captación de los objetos abstractos, lógicos, de los números en este caso, se logra a través de la comprensión de las proposiciones que contiene los nombres de tales objetos abstractos, de los números. Es lo que desarrollará al elaborar técnicamente la siguiente tesis a partir de la definición por abstracción, al caracterizar la equinumericidad.

3. *La Aritmética es Lógica*. Es la tesis que condensa el sueño de Frege. Es tesis que, para mayor precisión, se escinde en dos:

a. Los conceptos de la Aritmética pueden ser definidos en términos lógicos por modo exclusivo; es decir, se pueden expresar o escribir mediante la Conceptografía;

b. Los teoremas aritméticos pueden ser demostrados por medio de definiciones y leyes puramente lógicas, los axiomas aritméticos, que han de ser escritos de manera explícita y por medio de reglas de derivación igualmente explicitadas.

Para Frege no basta enunciar estas tesis, el programa que encierran. Su objetivo no es retórico sino que hay que llevar a cabo, lo más íntegramente, este programa. Es lo calificable como *parte técnica* del mismo. Parte técnica con la cual se establecen, por un lado, los criterios para que las expresiones ideográficas correspondientes permitan referir a objetos y, por otro, se consiga demostrar el principio de inducción completa, el que posibilita el paso de n a n+1 que es como lo cita Frege. Desde esta base, como paso siguiente, establecer los números restantes, tanto los cardinales transfinitos como los enteros, racionales, reales y, con ellos, las nociones básica de la Teoría de funciones, del Análisis, así como el Algebra y, en general, toda la Matemática.

Por lo pronto, se pueden escribir los números naturales en la Conceptografía. En ella, aunque no en la notación fregeana, se puede simbolizar la expresión “El número n de los objetos x que caen bajo el concepto F” por $N_x^n Fx$. Y se van expresando los primeros números como 0, 1 de la manera siguiente:

$$N_x^0 Fx \equiv Vx \neg Fx \equiv \neg Ex\, Fx$$

que, en la traducción que da Frege en el párrafo 55, equivale a la expresión: “a un concepto le corresponde el número 0 cuando, sea lo que sea a, vale con toda generalidad el enunciado de que a no cae bajo ese concepto”.

El número 1 viene simbolizado por

$$N_x^1 Fx \equiv \neg Vx \neg Fx \,/\; VxVy(Fx \,/\; Fy \rightarrow x = y) \equiv ExFx /\; VxVy(Fx / Fy \rightarrow x = y)$$

Y el sucesor de n a n+1 viene dado por

$$N_x^{n+1}Fx \equiv Ex\ (Fx\ /\ N_y^{n}\ Fy\ /\ y \neq x)$$

Un tipo de simbolización que permite expresar la suma de dos naturales, por ejemplo, lo mismo que todos y cada uno de los números naturales mediante un proceso de definición vía la cuantificación. Una simbolización que, sin embargo, para nada asegura la existencia, por un lado, de una cota respecto al cardinal, para nada permite afirmar cuántos números hay. Por otro lado, y no menos importante, este tipo de caracterización de los números naturales a través de la cardinalidad hace surgir el problema que se ha denominado, en la literatura posterior, *el problema de Julio César* porque, como escribe Frege,

> mediante nuestras definiciones, nunca podremos decidir –para dar un ejemplo burdo- si a un concepto le corresponde el número *Julio César*, ni si este famoso conquistador de las Galias es un número o no. (p. 82)

Pero también el problema de que es imposible demostrar cualquier tipo de igualdad numérica porque con los medios de los que se dispone no se puede concebir ningún número específico, determinado: ya he mencionado que no se sabe, todavía, calcular el valor de un número, aunque se de la definición conceptual del mismo. En otras palabras, las definiciones dadas para 0, para 1, para n+1 son, para Frege, definiciones sólo aparentes que permiten, por modo exclusivo, fijar el sentido de “el número 0 corresponde a…” pero no se especifica en momento alguno qué tipo de objetos independiente son 0, 1… si es que lo son. Así

> cada uno de los números aparece como objeto autónomo, precisamente porque constituye únicamente una parte de la afirmación ($ 57, p. 82)

y esto es una falta porque se está atentando al principio del contexto. Hay que completar la expresión y, para ello, Frege acude a resolver las ecuaciones numéricas, es decir, a resolver la cuestión de si *a* que representa la expresión “el número de conquistadores de las Galias” es igual o no a *b* que representa la expresión “el número de satélites de la Tierra”. Es sus palabras, hay que determinar el sentido de un enunciado como

> El número que corresponde al concepto F es el mismo que el que corresponde al concepto G

La táctica clásica se centraba en estudiar la extensión de F, es decir, contar los objetos que caen bajo F, los objetos pertenecientes al dominio de la función F por un lado; contar los elementos que caen bajo la extensión del concepto G por otro y ver si los dos números obtenidos son o no iguales: si lo son, las extensiones serán iguales en cuanto al número de sus elementos. Estrategia imposible para Frege porque supone que se sabe calcular, es decir, se sabe qué son y cómo funcionan los números: se sabe calcular el valor de $N_x^n Fx$ y el de $N_y^m Gy$ por lo que se pueden comparar ambos valores. El número se fundamentaría en el contar, en el propio número y se tendría, para Frege, un proceso circular.

Frege busca otra salida: manejar la definición por abstracción o por relación de equivalencia. Un tipo de definición de la cual indicará que no ha sido apreciada por los lógicos pero sí por los matemáticos. De hecho, es la manejada por Cantor para dar la potencia, la definición de cardinal transfinito, al menos en 1883 como cita Frege, pero también la utilizan años antes Schröder, Kossak… y, todos, en la línea posterior cantoriana: caracterizar el número cardinal mediante correspondencias biyectivas entre conjuntos. Y Frege acude a Hume, a quien atribuye haber establecido este tipo de correspondencias con las palabras:

> Si se combinan dos números de manera que el uno tenga siempre una unidad que corresponda a toda la unidad del otro, entonces los declararemos iguales. (p. 86-87)

Con esta estrategia, llega a la definición

> El concepto F es *equinumérico* al concepto G ssi existe una aplicación biyectiva entre los objetos que caen bajo F y los que caen bajo G (1884, p. 96)

Definición que se puede escribir en la forma

$Vx[Fx \to E!y(Gy / Hxy)] / Vy[Gy \to E!x(Fx / Hxy)] \equiv Fx \text{ Eq } Gy \equiv N_xFx = N_yGy$

naturalmente sabiendo que el cuantificador existencial E! –creado posteriormente por Russell- es abreviatura de que sólo existe un elemento x que satisface las condiciones impuestas.

Todo ello obliga, por supuesto, a dar la caracterización o definición de qué se entienda por número. Y Frege establece

> ‘el número que corresponde al concepto F’ es la extensión del concepto ‘equinumérico al concepto F’

Con lo cual el número natural, como cardinal, aparece como una extensión, aunque una extensión un tanto especial: el número natural es la clase de todos los conceptos equinuméricos a un concepto dado F. En nota a pie de página, nota 13, insiste en su afirmación de que el número es una extensión y no un concepto para evitar posibles objeciones y, además, escribe

> Presupongo que se sabe lo que es la extensión de un concepto. (p. 92)

Una suposición radicalmente arriesgada para quien trató de definir todo lo definible y, aquí, no sigue su propio criterio de rigor. Se tiene un hueco caracterizador que va a ser esencial porque Frege se encierra en uno de los grandes problemas: el número como extensión, como clase o, para los matemáticos, como conjunto, pero una clase de clases, un conjunto de conjuntos. Es decir, y para Frege, la clase de todas las clases que son biyectivas o equinuméricas entre sí; para Cantor, el conjunto de todos los conjuntos biyectivos entre sí. Clase de clases, conjunto de conjuntos… La antinomia, la paradoja, servida: el sistema de Frege, desde esta definición, contradictorio. No hay que seguir mucho más…

Un abandono de la parte técnica que es lo ocurrido desde que Russell pusiera de relieve su antinomia: la parte técnica fregeana quedó radicalmente marginada e, incluso, toda su teoría pasó a ser absorbida por el enfoque conjuntista cantoriano desde la posición marcadamente matemática como la que sostuvo Bourbaki.

En todo caso, un problema como el de Julio César, el de la indeterminación de los objetos aritméticos si se hace a través de la definición mediante cuantificadores a los que satisfacen, queda resuelto. Una solución no directa, sin embargo. Lo que se tiene es que cualquier determinación no aritmética de objetos que resuelva este problema da paso a propiedades calificables de superabundantes en el sentido de que son propiedades que no siguen las aritméticas establecidas de entrada y serán propiedades, por decirlo de alguna manera, ajenas a la Aritmética.

Pero hay que seguir porque la antinomia no se le muestra a Frege hasta 1902, cuando ya ha escrito los dos primeros volúmenes en los cuales plasma su sueño: **Las leyes de la Aritmética**.

Y así, desde las definiciones anteriores, Frege esboza en **Fundamentos** el camino a seguir. Retoma, con leves modificaciones, la definición de sucesor en una serie dada en **Bregriffsschrift** que tiene el significado "y sigue a x en la Φ-sucesión" o también "x precede a y en la Φ-sucesión". Desde esta definición considera plausible reducir la inferencia de n a n+1 que, "aparentemente, es peculiar de la matemática, a leyes lógicas generales". Aunque señalará

> Nos llevaría demasiado lejos aquí realizar la demostración misma. Sólo indicaremos brevemente las líneas a seguir. (p. 105)

En todo caso Frege muestra cómo la sucesión numérica carece de acotación, de límite. Y eso porque esta sucesión es la que comienza por 0 que es el número que pertenece al concepto "objeto que no es igual a sí mismo", el número 1 se puede definir como la extensión de todos los conceptos equinuméricos con el concepto "idéntico con 0"; 2 como el número que pertenece al concepto "idéntico con 0 o con 1", y así se pueden ir definiendo todos y cada uno de los números que componen la succión numérica natural. Con lo cual, si el número n es finito, el número que pertenece al concepto “número natural menor o igual que n” es siempre n+1. En otras palabras, todo número finito posee sucesor y la sucesión es, por ello, ilimitada. (1884, & 82-83).

Pero esto es otra manera de caracterizar los números naturales: son aquellos que, esencialmente, son inductivos, es decir, son aquellos para los cuales siempre que se tenga n, se tiene n+1. Dos maneras distintas de caracterizar los naturales que explicitó por vez primera Poincaré en su polémica con los cantorianos y con Hilbert poniendo de relieve, a la vez, que la demostración de la equivalencia de las dos sólo puede hacerse manejando la inducción completa, por lo cual esa demostración sería circular o impredicativa…

Fundamentar la Matemática no es limitarse a la Aritmética, a los números naturales por modo exclusivo. Aunque no lo cite, Paul du Bois-Reymond ha establecido escalas de números infinitos y, sobre todo, Cantor maneja los números transfinitos. Frege alude a estos números manteniendo que, realmente, su línea es la misma que la de Cantor: también él, desde el enfoque cardinal, ha de admitir el infinito en acto y, consecuente, los números transfinitos. Su definición de equinumericidad, la relación de equivalencia en la clase de todas las clases, no hace distinción de números cardinales finitos –los naturales- y números cardinales transfinitos. La caracterización de lo finito vendrá después, si llega.

Aunque simple mención, Frege hace referencia a los restantes números, a la necesidad de prolongar su trabajo. Pero, en cualquier caso, hay que precisar otros elementos que los ensayos de Cantor, los de Helmholtz, han puesto de relieve: hablar de números transfinitos, de geometrías no-euclídeas no significa que aquello de lo que se habla exista, y se ha planteado la cuestión de que pueden ser elementos contradictorios, por lo que, en principio, tendrían que dejarse a un lado. Frege escribe:

> Hay que replicar a la afirmación de que el matemático considera imposible sólo lo que se contradice a sí mismo (p. 116)

Pero del hecho de que el concepto no contenga en principio contradicción alguna no permite inferir que algo caiga bajo él. Incluso puede ocurrir que a largo plazo no aparezca contradicción alguna, lo que no significa que esa contradicción no exista y algún día llegue a aparecer. Ello obliga a demostrar siempre la no-contradicción de lo definido. Para Frege, como antes para Beltrami en el caso de las geometrías no-euclídeas, la única manera de hacerlo es mostrando la existencia de lo definido, dar una realización o modelo del mismo. Y no por traducción a mero símbolo como se hace con las geometrías no-euclídeas donde se pasa a hablar de recta cuando se está con una curva. En este caso se mantiene en el símbolo, que no es referente existencial. Con palabras de Frege

> En rigor, la no contradictoriedad de un concepto, sólo puede establecerse, sin duda, mostrando que algo cae bajo él. Lo inverso sería un error. (1884, p. 117)

Error en el que caen, precisamente, formalistas como Hankel, en el que caerá posteriormente Hilbert al adoptar como criterio previo de existencia la demostración de la no-contradicción. Tema abierto, al que volverá en su polémica con Hilbert a finales, ya, del s. XIX.

La parte técnica ha sido esbozada en 1884: a elaborarla íntegramente dedicará Frege sus esfuerzos, que empiezan a culminar en 1893, en **Las Leyes de la Aritmética** donde enuncia sus axiomas y desarrolla técnicamente su programa, y donde el Axioma V explicita lo que se ha denominado el Principio de Hume: la equinumericidad como biyección entre clases. Un Axioma que, por ello, encierra la contradicción, la antinomia que hunde todo el sueño logicista fregeano.

Y algunos problemas abiertos Por supuesto, en todo lo dicho hasta ahora surgen muchos problemas y no sólo la aparición de la contradicción en ese Axioma V. Así, el de la objetividad ($ 26) que plantea un experimento mental apoyado en la Geometría Proyectiva, en su principio de dualidad con una especie de inmersión en los mundos imaginarios de Helmholtz; las discusiones en torno al Principio de Hume retomadas a finales del s. XX; o las que se pueden realizar respecto a las estrategias que se incardinan en la definición por abstracción y al papel de estas definiciones respecto a lo existencial y las pruebas ontológicas –la definición no debe implicar la existencia de lo definido-; las discusiones en cuanto al realismo ontológico atribuible a Frege…

Son algunos de los problemas que han sido, y siguen, en discusión y que, aquí, simplemente enumero. Existencia de problemas, y contra el deseo expreso de Frege, que han quedado afortunadamente abiertos. No todo está fundamentado de una vez y para siempre.

En concreto considero interesante destacar el hecho de que al estudiar la parte técnicas en sí, la que se había marginado tanto por su escritura como por considerar que no valía la pena entrar en ella por haberse declarado su inconsistencia, se ha llegado a observar que, en realidad, la antinomia no aparece: ni la definición explícita ni el Axioma V se utilizan en la demostración de los teoremas aritméticos. Estos se demuestran empleando, de modo casi exclusivo, el Principio de Hume y, por supuesto, la lógica clásica de orden dos, la lógica L_2. Analizar la parte técnica ha ofrecido, a finales del s. XX, unos aspectos un tanto inéditos del trabajo de Frege que han podido ser recuperados y poner de relieve la existencia de lo que calificar un neo-Frege. Como consecuencia, algunos estudiosos como Boole llegaron a revitalizar el intento de Frege de fundamentar la Aritmética, la Matemática, en la lógica, revitalizar un nuevo Logicismo o *Logicismo renovado*.