LA MATEMÁTICA: DE SUS FUNDAMENTOS Y CRISIS

JAVIER DE LORENZO

LA MATEMÁTICA: DE SUS FUNDAMENTOS Y CRISIS

tecnos

Ilustración de cubierta:
Manuscritos medievales procedentes de la Bodleian Library
de Oxford, donde se exponen los principios de la trigonometría.

Impresión de cubierta:
Gráficas Molina

Juan Ignacio Luca de Tena, 15 - 28027 Madrid
ISBN: 84-309-3167-8
Depósito Legal: M- 13497 -1998

Printed in Spain. Impreso en España por Rigorma.
Pol. Ind. Alparrache, 28600 Navalcarnero (Madrid)

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

1. En el último tercio del siglo XIX se produce una profunda inversión en la praxis matemática: surge una manera de concebir y hacer Matemática que califico de Hacer global, junto a, y enfrentado a, la praxis que se venía haciendo desde el siglo XVII, un Hacer matemático figural; Hacer al que, muy paulatinamente, irá reemplazando en la comunidad matemática.

Son nuevas concepciones ontológica y epistemológica, unidas a lo metodológico, que toman como punto de partida, como conceptos-núcleo constitutivos, los de sistema, agregado o conjunto de objetos y función o aplicación. Sistema y función que reemplazan al objeto dado en su singularidad concreta —la ecuación algebraica, el sistema de ecuaciones diferenciales, la serie trigonométrica, el poliedro, la curva...—, objeto representante de un elemento, un problema o un fenómeno también concreto y singular de la naturaleza.

Nueva concepción que se impone no sólo en la Matemática sino en áreas muy distantes, como la Biología, donde se habla de especies y su evolución; la Termodinámica estadística, donde se manejan los gases como entidades en sí; las Ciencias Sociales y Políticas, cuando surgen las nacionalidades y, en ellas, se comienza a hablar de clases sociales, partidos, sindicatos... Nueva concepción desde la cual se adoptan como objetos totalidades a las que se atribuyen propiedades como evolucionar, oprimir, liberar...; comportamientos como supervivencias, pugnas, luchas de clases..., y donde los miembros de cada sistema, globalidad o agregado poseen las notas características de la globalidad a la que pertenecen y a la que, en última instancia, se van a subordinar.

Es una inversión epistemológica que, en el Hacer matemático, provoca desarrollos conceptuales que conducen a la aparición de nuevas teorías y disciplinas —Teorías como la Topología, el Análisis de variable real, el Análisis funcional, la Teoría axiomática y formal de conjuntos, la Teoría de la medida, el Álgebra que termina bautizándose «moderna»...—, pero también a la búsqueda de precisiones conceptuales en campos como el metodológico, en el cual se propicia la aparición de mecanismos originales de definición y demostración; el ontológico, donde se plantea la cuestión existencial de los elementos matemáticos, si objetos, clases, estructuras..., sus niveles objetuales, con repercusiones en lo epistemológico de cómo alcanzar el conocimiento de los mismos; el lingüístico y notacional, donde se ve aparecer la cuantificación tanto existencial como universal, así como una ideografía que conduce a la creación de una «nueva» lógica, la Lógica formal o matemática.

Búsqueda de precisiones y análisis conceptuales que provocaron polémicas entre los matemáticos en torno a la aceptación o no del nuevo modo de Hacer, al papel de la demostración y de las definiciones, a qué considerar rigor, al enfoque constructivo y definicional del método axiomático, a las relaciones entre la Matemática y las restantes disciplinas y, en general, a la situación de la Matemática en cuanto al conocimiento.

La aparición de algunas dificultades o antinomias en el Hacer matemático en los primeros años del siglo XX, apoyadas en la ausencia de una caracterización o definición precisa y explícita inicial de qué entender por sistema, agregado o conjunto y de qué entender por función, llevó a que algunos, de formación filosófica principalmente, calificaran las antinomias o paradojas como la clara manifestación de una «crisis de los fundamentos». Visión catastrofista que, de modo inmediato, provocó el desarrollo de alguna de las previas posiciones que mantenían los matemáticos respecto a este nuevo tipo de Hacer. Posiciones que algunos plasmaron en visiones globales, ideológicas de la naturaleza de la Matemática.

La imagen de discusión en cuanto a la búsqueda de unos posibles «fundamentos» que superaran las crisis, se ha mantenido durante este siglo como tópico en los textos de orientación, más especulativa que interior, a la praxis matemática. Praxis matemática en la cual —con cierta independencia a cualquier pretensión fundacional y sus posibles crisis y enfrentamientos— se consolidó el Hacer global hasta el extremo de considerarlo algunos como el único modo de Hacer matemático, mostrando que los intentos fundacionalistas globalizadores son, como visión ideológica, defectuosos e inoperantes para dicha praxis.

2. Desde los entornos de 1930 el término «fundamentos», que tuvo un auge especial desde finales del XIX hasta bien entrado el XX, ha cambiado de significado y se ha ligado a una problemática interna, a la Teoría formal de conjuntos o al enlace de ésta con la Teoría de Categorías. Teoría desde la cual se ha vuelto a hablar de «fundamentos de la matemática», en el sentido de que la Teoría de Categorías parece

posibilitar un marco justificador y reduccionista de la misma. El cambio se ha ido reflejando en los títulos que tratan filosófica y especulativamente de la Matemática: se ha pasado de «Fundamentos de...» a «Filosofía de...». Incluso esos términos han desaparecido desde hace relativamente poco tiempo y se ha pasado a hablar de Pensamiento matemático, Pensar la Matemática, el Espacio de la Matemática, la Naturaleza de la...

Es cambio de significado que refleja el hecho de que desde los entornos señalados de 1930 se produjo una cierta atonía en el pensamiento acerca del Hacer matemático, y no por parte de los matemáticos sino de quienes los entornan, centrados en discutir aspectos de los sistemas formales, de sus limitaciones y consecuencias.

Situación de atonía que, a partir de los años setenta, ha cambiado produciéndose una inflexión con una revitalización por la problemática del Hacer matemático. Inflexión que algunos ven provocada por las consecuencias que últimamente se han ido obteniendo de las limitaciones formales reflejadas en los teoremas de Gödel, Tarski, Türing... y que han interpretado como la señal de que el Hacer matemático es un hacer sin fundamentos.

Revitalización de la problemática acerca de la praxis matemática que, desde mi punto de vista, se debe a dos factores, interno el uno, externo el otro. En el interior de la Matemática, y desde el espectacular desarrollo que ha tenido en este siglo, han ido apareciendo teorías y disciplinas, en las que incluyo distintos sistemas formales de Lógica y no únicamente la bivalente, en las cuales se ha potenciado un acentuado finitismo formalista; finitismo formalista que ha propiciado la elaboración, desde la Teoría de funciones recursivas en su versión de computabilidad, de algoritmos y programas que encuentran una materialización en los computadores... En el exterior, se ha producido el paso a un Ámbito Tecnológico que ha propiciado un cambio en el sistema ecológico del Hacer matemático...

Cuestiones, entre otras, que obligan a plantear lo que algunos consideran «nueva» problemática y que es la misma de siempre: preguntarse por la naturaleza de la Matemática, sus tipos, su papel, su metodología, su relación con otros haceres..., y se vuelve a muy viejos problemas: el conocimiento de objetos abstractos, el modo de existencia de los conceptos, de los entes de ficción.

En terrenos filosóficos, la paradoja de Gettier y la formulación de la teoría del conocimiento causal lleva al dilema de Benacerraf, en 1973, en el que se plantea que lo que posibilita el conocimiento causal matemático imposibilita alcanzar ese conocimiento. Dilema que ha dado paso, en el mundo anglosajón, a cierta preocupación por algunos problemas de la Matemática, originando líneas como la del realismo de Maddy, nominalismo-realista de Field, estructuralismos a lo Hellmann o Shapiro, logicismos a lo Boolos...

Por su lado, en el continente europeo y junto a las revisiones del platonismo matemático llevadas a cabo por autores franceses como Salanskis, Petitot, Panza..., figuras como Appel, Hintikka, las ligadas a Lorenzen y la Escuela de Erlangen... intentan renovar enfoques fundacionalistas que justifiquen las pretensiones del conocimiento matemático. Para ello, parten básicamente de una Filosofía del Lenguaje sesgada, aceptando que los enunciados se «fundan» al deducirlos de premisas, lo que conduce a un regreso al infinito o a un círculo vicioso que obliga a buscar un «punto de Arquímedes» fundacional. Punto de Arquímedes fundacional que encuentran en la «pragmática trascendental del lenguaje» —Appel—, «en la situación ideal del discurso» —Habermas—, en afirmaciones sobre las acciones...

Tendencias críticas y fundacionalistas que, salvo en el caso de Lorenzen, tienen muy poco que ver con la praxis matemática.

3. Es en el interior de la praxis matemática —y no por especulaciones entre filósofos— donde se plantea la manifestación de una crisis, de una «crisis en la matemática contemporánea» como la denomina Erret Bishop en 1975, muy distinta a la clásica de fundamentos, en disputa finitista y computacional con el Análisis no-estándar de Robinson, infinitista y global. En la misma línea, Arthur Jaffe se ha llegado a preguntar, en 1997, si la matemática que el matemático practica —la surgida hace algo más de un siglo, la que califico de Hacer global— puede sobrevivir al WEB y, de hacerlo, cómo.

Es crisis que aparentemente se liga con el constructivismo y, enlazado, con la computabilidad y, es consecuente, con el papel que pueda tener el ordenador en la praxis matemática, en la demostración de teoremas, en la resolución de problemas matemáticos, en la elaboración de algoritmos criptográficos, en la heurística metodológica... Crisis que, en principio, nada tiene que ver con dilemas cognitivos más o menos causales, logicismos de segundo orden, situaciones ideales de discurso alguno...

Crisis como manifestación de que en la praxis matemática se ha originado un nuevo tipo de hacer, el Hacer computacional, que busca su terreno propio junto a, pero también enfrentado a, el Hacer global considerado ahora como el hacer básico.

Nuevo tipo de hacer en el que parece obligatorio que el matemático «humano» conviva con otro tipo de matemático en su dominio propio, con el intruso, como ha denominado Steen al ordenador. Intruso que ha permitido obtener «demostraciones» de conjeturas como la de los cuatro colores que permanecían como tales desde hace años y que, sin él, seguirían como conjeturas, en principio, durante años futuros. Con la pregunta de si, de modo efectivo, el intruso hace demostraciones o más bien verificaciones...

Convivencia con el intruso, ciertamente. Pero algo más profundo: los medios de comunicación desarrollados en el Ámbito Tecnológico han llevado a que puedan plantearse y resolverse problemas a través de Internet, con la colaboración de matemáticos de todos los países, trabajando y comunicando simultáneamente sus intentos, sus ideas «felices» o conjeturas, sus demostraciones... Y ello implica un cambio radical en los modos tradicionales de trabajar los matemáticos, en su praxis, pero también un cambio en su producto, en lo que estimar resultado final, acabado, con su «demostración rigurosa» frente al enunciado y al mero esquema demostrativo...

No sólo el intruso ha modificado la ecología del sistema matemático, como quería Steen y le atribuyen Tymocko y otros, por modo exclusivo. Más radical, la praxis matemática está siendo transformada por los medios de intercomunicación.

Modificación del Hacer matemático en estos últimos años que ha provocado cierta inquietud entre algunos matemáticos, como lo reflejan las afirmaciones de Bishop, Jaffe, Steen... Inquietud o más bien manifestación de sentir la presencia de una auténtica inversión en la praxis matemática. Inversión condicionada por el Ámbito Tecnológico en el que los matemáticos se encuentran inmersos y en el que, como un producto humano más, el Hacer matemático viene condicionado por dicho Ámbito, al que, a su vez, ha colaborado en cuanto a su aparición.

4. Y a finales del siglo XX, y desde la visión que propicia la nueva inversión en el Hacer matemático, desde la vivencia práctica de experimentar cómo se transforma ese hacer, cabe una reflexión crítica en cuanto al mantenimiento o no del tópico señalado de que hubiera una auténtica crisis de los fundamentos de la Matemática en el último tercio del siglo pasado, crisis manifestada en los primeros años de éste con la aparición de las antinomias o paradojas. Existencia de una crisis de fundamentos que, sin embargo, no impidió que el Hacer matemático global propiciara uno de los mayores desarrollos

conocidos en el Hacer matemático, desarrollo que se ha mantenido y se mantiene hasta ahora.

5. Reflexión crítica que me lleva a sostener —y es una de las tesis que subyace desde el principio al fin de este trabajo— que no hubo ni hay crisis de fundamentos en la praxis matemática, sino que en dicha praxis se producen inversiones respecto a los tipos de Hacer anteriores. Inversiones tanto epistemológicas como metodológicas, con sus consecuencias en el plano ontológico así como en las relaciones constitutivas y regulativas del Hacer matemático. Inversiones por las cuales se replantean las relaciones del nuevo hacer respecto a otras disciplinas, respecto a otros sectores de captación, comprensión y transformación del entorno. Y son esas inversiones las que obligan a precisiones conceptuales en el nuevo hacer con sus diferentes niveles, pero también a pugnas —en ocasiones nada conceptuales— entre quienes pasan a manejar la nueva praxis y quienes continuan con la anterior.

Es tesis enfrentada, ciertamente, a la visión tópica que quiere la existencia de una auténtica crisis de fundamentos en la Matemática de fines del siglo XIX —y es punto por el que principian numerosos trabajos de lo que se califica «filosofía de la matemática»—.

Reflexión crítica apoyada en lo que calificar Historia del Hacer matemático pero historia de sus elementos conceptuales. Reflexión centrada en una sistemática de los elementos conceptuales del Hacer global, de sus notas constitutivas. Desde esta sistemática se percibe con nitidez que no hubo, ni hay, «crisis» alguna, sino otra manera de hacer matemática con un aumento en la riqueza conceptual de su producto que tiene reflejo en sus estilos correspondientes.

Reflexión que voy a limitar, aquí, al momento de los llamados «fundamentos» de finales del siglo XIX y principios del XX. No me detengo en lo que, por otros aspectos, pudiera tener igual interés y que en el tópico queda englobado en el mismo apartado aunque corresponde a un segundo momento, ya muy de este siglo: las polémicas producidas desde los veinte entre Hilbert y su escuela y los constructivistas intuicionistas como el radical Brouwer, de quien se podría decir, parafraseando lo que Poincaré achacó a Kronecker, que su éxito en los trabajos de topología, y en los que se centró hasta dar su lección inaugural en octubre de 1912 como profesor de la Universidad de Amsterdam, lo debió al temporal olvido de su doctrina filosófica, o los más moderados Weyl o Skolem... Polémicas centradas en la clarificación y manejo o no del infinito actual y que llevó a Weyl a indicar que se había planteado una nueva crisis fundamental en la Matemática. Polémicas que conducen a Brouwer a desarrollar su matemática intuicionista y a Hilbert a proponer el «Programa de Hilbert», en el que entran, en sorprendente mezcla, finitismo formalista, axiomatización, defensa del «paraíso de Cantor» con sus cardinales transfinitos y, por supuesto, el Hacer global como marco constitutivo...

Tampoco me detengo en el momento actual a discutir el papel del ordenador y algunas notas que se quieren derivar de su empleo —experimentalismo, aleatoriedad...— y que se generalizan como consecuencia del principio de banalidad como propias de todo tipo de Hacer matemático.

6. Hay una segunda tesis que se muestra al ir haciendo esta reflexión crítica: la praxis científica, en particular el Hacer matemático, no se lleva a cabo como quiere el tópico y aceptan quienes no la practican. Hasta en los textos de Lengua, en aquellos que «enseñan» lo que es el lenguaje científico, se mantiene que la praxis científica, la matemática en particular, tiene como punto de partida conceptos plena y claramente definidos, proposiciones iniciales explícitas, maneja un lenguaje unívoco, con proposiciones o teoremas demostrados en su totalidad de forma rigurosa y donde la opinión de los matemáticos no cuenta para nada... El Hacer matemático, es desde sus orígenes o al menos desde Euclides, un saber absolutamente objetivo, manifestación de lo verdadero —o de lo puramente formal, sintáctico en el peor de los casos—, dado de una vez para siempre y ante el cual el matemático, el observador, no tiene más remedio que hacer una inflexión reverencial...

Desde la reflexión crítica como método o criterio aquí impuesto, y haciendo camino, aparece una tesis radicalmente contraria a la visión anterior: los conceptos-núcleo no están delimitados o precisados en sus puntos de partida, sino que se muestran difusos y se van delimitando, precisando a lo largo de la praxis. Las proposiciones no están plenamente demostradas y hay teoremas que han de aceptarse por un acto de fe porque muy pocos matemáticos pueden llegar a entender, dominar y controlar su demostración; demostración que jamás se presenta como una derivación sintáctica, mera sucesión de proposiciones formales; hay teoremas que se demuestran una y otra vez utilizando en cada ocasión contenidos conceptuales diferentes, porque en la praxis matemática lo que interesa no es el teorema en sí, sino las ideas, analogías y los posibles nuevos instrumentos metodológicos y conceptuales que puedan asociarse a cada una de las demostraciones del teorema. Las pugnas entre los matemáticos han sido y son permanentes, los intentos demostrativos rechazados o no aceptados en todos los casos, y no porque los teoremas estuvieran «mal» demostrados, precisamente...

En otras palabras, el Hacer matemático no es un saber ya plenamente cristalizado sino un saber vivo, en constante proceso, un saber manifestación de la razón constructiva matemática en la que se incardina, también, una imaginación ensoñadora. Cristalizan algunas teorías, algunos conceptos y teoremas en el interior de esas teorías: cristalizan algunos resultados, no el Hacer en sí.

Quizá lo que quede fosilizado sea lo que se plasme en algún libro de texto, más bien elemental, donde las definiciones se presenten con radical precisión y como punto de partida, las demostraciones se muestren «completas» y sólo una por teorema, la estructura del texto aparece cerrada y de tal forma que se llega a la convicción de que en la Matemática ya no queda nada nuevo por hacer.

La imagen de fosilización de la Matemática quizá sea la más general y difundida de la disciplina «exacta» por excelencia. Tan exacta y verdadera que, como exclamara Hobbes, ni Dios puede modificarla. Una imagen que ha producido confusiones y que ha conducido a que se tomen las antinomias o paradojas como crisis de un hacer que «tiene que ser» exacto, preciso, verdadero, atemporal..., y no como simple consecuencia de la no delimitación previa de sus conceptos-núcleo... Confusiones entre quienes se han planteado cuestiones en torno a la naturaleza y papel de las demostraciones matemáticas, por ejemplo, identificando la derivación formal con la demostración matemática o, peor aún, con lo que en algún texto se presenta como tal noción.

Frente a esta imagen se alza la segunda tesis central de este trabajo: la Matemática es un trabajo, un producto y una producción de la especie humana o, más bien, de parte de esa especie y, como tal, con sus altibajos, sus imperfecciones, sus logros, entre los que destacan algunas obras maestras..., pero también su dependencia y su influjo en el desarrollo de sólo cierto tipo de sociedades —industrial, capitalista, tecnológica—. Tesis que, con la anterior, se va mostrando al realizar una reflexión crítica sobre el Hacer matemático.

* * *

Debo señalar que algunos temas se tratan, aquí, muy abreviadamente: a algunos he dedicado otras páginas, en otros lugares. Así, la precisión de dónde situar la Matemática, los diferentes ámbitos en los que se practica y sus notas, el papel del ideograma, los estilos en los cuales los diferentes haceres se plasman, su papel constitutivo y regulativo para otras disciplinas, o lo que calificar como elaboración de modelos posibles de lo real, el ordenador y su papel de matemático intruso... A esas páginas remito al lector interesado en completar los pensamientos aquí expuestos.

1. DE CRISIS Y FUNDAMENTOS

La llamada «crisis de los fundamentos de la Matemática» hace referencia a algo aparentemente ya pasado, aunque no por ello menos apasionante. Referencia a lo que desde una visión que se quiere ortodoxa de Historia del pensamiento matemático sufrió la considerada fundamentación de la Matemática hace, ahora, un siglo. Crisis que se manifestó en la existencia de las paradojas o antinomias en los cimientos de esa Matemática y que provocó, según esa visión, la aparición de tres grandes corrientes de fundamentación, corrientes que pretendieron subsanar el derrumbre de dichos fundamentos. Y, aunque parezca tema pasado, es siempre interesante volver a él, con la perspectiva que da el tiempo transcurrido. Un volver, como he indicado, no histórico-descriptivo, sino de análisis básicamente conceptual.

I. LAS METÁFORAS ARQUITECTÓNICAS

En esta vuelta, y lo primero, es preguntarnos qué se entiende por «crisis» y a qué puede atribuirse la misma.

De modo clásico, el término «crisis» se va a interpretar no como cambio brusco, favorable o desfavorable, en el curso de una enfermedad —sólo Poincaré adoptará esta versión del término—, o en la situación de un gobierno que le lleve a dimitir y plantear nuevas elecciones —si es democrático—, o en la aparición de un momento difícil, incluso grave en un terreno determinado, sino como la aparición de grietas en la base sustentante de un edificio, grietas que pueden llevar al derrumbamiento del mismo y que exige de un apuntalamiento inmediato con mejora de sus estructuras o, de lo contrario, a su derribo.

De modo clásico, y en el sector acotado del pensamiento que aquí nos ocupa, esa acepción del término «crisis» se atribuye a los Fundamentos de la Matemática, porque en ésta se trata de realizar construcciones y toda construcción requiere o precisa de unos cimientos, de una base sustentante.

Los términos «fundamentos», «construcción», «edificio» son metafóricos. Proceden, básicamente, de la arquitectura. Metáfora que manejan de modo constante los matemáticos, aunque en ese manejo va cambiando de significado.

En un ensayo de 1888, publicado en *Lecciones sobre Electromagnetismo*, 1890, Poincaré señalará, respecto a la «construcción» de la Teoría electromagnética por parte de Maxwell:

> no trata de construir un edificio único, definitivo y bien ordenado, sino más bien parece edificar un gran número de construcciones provisionales e independientes, entre las cuales las comunicaciones parecen difíciles y algunas veces imposible.

Frente a construcción de edificio único, bien fundamentado por unos cimientos que lo hagan definitivo, como parecía ser la Mecánica clásica newtoniana, diferentes construcciones o edificios entre los cuales hay que establecer vías de comunicación. Frente a edificio «agrietado» en sus cimientos de la Mecánica clásica, la Teoría electromagnética como «construcciones provisionales»...

Referido al Hacer matemático, más en concreto, me limito a mencionar a un autor: Hilbert. En 1900, en el II Congreso de Matemáticos de París, y al plantear el Problema VI, retomará una afirmación de Weiertrass:

> El principio final que se debe tener a la vista es la búsqueda de un juicio exacto sobre los principios fundamentales de la ciencia [...]. Para penetrar en el dominio de la Ciencia también es indispensable, sin duda, ocuparse de problemas particulares.

A lo que Hilbert agrega:

> En efecto, para poder examinar con provecho los principios de una ciencia, es necesario estar familiarizados con sus teorías particulares; únicamente el arquitecto que conoce a fondo, en todos su detalles, los distintos destinos de un edificio será capaz de poner con seguridad los fundamentos.

En 1905, cuando según la visión canónica ha surgido la crisis de los fundamentos, de los cimientos, Hilbert invertirá la visión anterior manteniendo la metáfora:

> La construcción de la ciencia no se hace como una vivienda, en la cual los fundamentos se ponen firmemente en primer lugar y sólo después se procede a construir y ampliar las habitaciones. La ciencia prefiere asegurar tanto como sea posible espacios confortables para deambular y sólo posteriormente, cuando aparecen signos aquí y allá de que los fundamentos no son capaces de sostener el desarrollo de las habitaciones, se

> decide a sostener y fortificarlos. Esto no es una debilidad, sino más bien el camino razonable y saludable de su desarrollo.

En estas palabras Hilbert viene a reconocer que la relación estructural entre la reflexión filosófica, que daría paso a los fundamentos, y la praxis matemática y experimental es poco significativa. La praxis matemática es autónoma respecto a la reflexión filosófica fundamentante y, en el fondo, es la que provoca y actúa sobre dicha reflexión. Es decir, el matemático resuelve sus problemas, formula sus teorías y es después cuando se plantea la cuestión de los cimientos, una vez avanzado en su praxis y comprobada la validez de la misma. Incluso los postulados de partida, las hipótesis que conducen a la resolución de los problemas, al enunciado de los teoremas, pueden ser oscuros, vagos. Es lo ocurrido con la Teoría de los números reales, por ejemplo: manejada por todos los matemáticos de manera no muy clara hasta que, finalmente, en 1872, se encuentran unas definiciones ya precisas de lo que considerar número real.

De esta manera parece que la cuestión de fundamentos sólo se plantearía como justificación de la teoría construida y en el sentido de manifestar que esa teoría es suficientemente cognoscitiva. Desde la teoría, que se admite válida, se buscan justificaciones racionales, justificaciones que constituyen los fundamentos para la misma. Un enfoque, el de Hilbert aquí apuntado, que no suele citarse así en las historias al uso y que, en plan irónico, indicaría que se construye una vivienda empezando por el tejado.

La metáfora procedente de la arquitectura se mantiene, y Dieudonné, escribiendo en nombre de Bourbaki, titulará un ensayo acerca de la naturaleza de la Matemática, en su versión estructuralista, bajo el rótulo «La arquitectura de las Matemáticas», publicado en la antología de Le Lionnais de 1948.

Bourbaki realiza una inflexión, un cambio de papel en la metáfora enlazándola con las palabras de Poincaré: la Matemática no es un templo o edificio único, la Matemática se enfoca como una ciudad, con sus avenidas, sus barrios, sus edificios y zonas viejas y abandonadas, sus zonas modernas en expansión, sus permanentes derribos y reconstrucciones... No es edificio único y, por ello, carece de sentido la búsqueda de unos fundamentos materiales sobre los cuales sostenerlo, porque la ciudad no posee tal fundamentación material. Ahora serán más bien principios funcionales y organizativos, formales y estructurales, en una palabra urbanísticos, los que den cuerpo a la gran ciudad. Es una visión de acuerdo con lo que indiqué en el cambio y pérdida de significado del término «fundamentos».

II. DEL TÉRMINO «FUNDAMENTOS»

Antes de llegar al urbanismo bourbakista y según la visión aceptada, tópica pero ortodoxa, en los momentos de Weiertrass, Dedekind, Frege, en los de Hilbert, en los momentos en los que aquí nos vamos a centrar, último tercio del siglo XIX y primeros años del XX, se trata de fundamentar un edificio único: la Matemática como unidad. Y es la primera suposición que se atribuye a los matemáticos de esta época frente a la posterior noción urbanística bourbakista: que considera que sólo hay una Matemática, un edificio único; y si los cimientos del mismo fallan, es el edificio el que se tambalea. La crisis se atribuye, por ello, no sólo a unos fundamentos que soportan el edificio matemático, sino que llegan a afectar al edificio en sí, a la Matemática en su totalidad. De aquí la importancia atribuible a la posible existencia de una crisis en los cimientos.

Es atribución que no tiene en cuenta la diferencia que los matemáticos establecen entre la reflexión racionalizadora y justificativa, por una parte, y por otra la praxis de su hacer. Es diferencia nítidamente establecida en las palabras señaladas de Hilbert y que podría avalarse con la de otros matemáticos como Poincaré. Distinción que, por otro lado, se encuentra incardinada en este ensayo: la praxis matemática cambia a lo largo del XIX, surge otro hacer matemático que da origen a la búsqueda de su justificación cognoscitiva y donde el término «construcción», también tomado metafóricamente de la Arquitectura, va cambiando de significado.

En la metáfora arquitectónica —construcción, fundamentos de esa construcción, edificio, urbanismo...— se presenta un problema: averiguar a qué se considera «fundamento» de una construcción conceptual como lo es, en este caso, la Matemática.

El término «fundamento» puede aplicarse a la existencia de unas nociones y principios de los que derivar el total del conocimiento matemático o, de no derivarse el conocimiento matemático de modo directo de tales nociones y principios, afirmar que ese conocimiento sólo puede justificarse, en última instancia, en los mismos.

En ambos casos, y como inmediato problema, hay que analizar la naturaleza de esas primeras nociones y principios, sus diferentes tipos, procedimientos posibles para captarlos y distinguirlos de otros, y alcanzar que, de modo efectivo, son los elementos fundamentantes.

Hay una tercera postura: rechazar la existencia de unas nociones y principios absolutos y dados de una vez para siempre, de unas nociones y primeros principios fundamentantes. En este caso se plantea la cuestión de si al seguir hablando de fundamentos lo que se hace es una referencia a otros elementos en los cuales realizar tal apoyatura, intentando evitar que la Matemática se considere mera construcción arbitraria, convencional.

Problema inmediato, aquí, analizar qué aspectos hay que considerar como fundamentales o primarios —ya que no fundamentantes— para la praxis matemática. Así, cuál de entre los aspectos Cognitivo-Epistemológico, Metodológico, Formal, Ontológico..., puede estimarse central y si los demás pueden o no reducirse al mismo. De no reducirse, cuál es su papel o, de lo contrario, si pueden eliminarse en beneficio del aspecto considerado clave para la praxis matemática. Elección de uno u otro aspecto que hará factible la existencia de distintas posiciones no fundacionales dentro de la misma postura de base.

Admitir la existencia de unas nociones y principios primeros —que tendrán que expresarse de manera lingüística si se apela a proposiciones, o de otra forma si se apela a intuiciones o creencias— de los que derivar todo el edificio matemático o de los que posibilitar su justificación, o no admitir tales nociones y principios sino afirmar que la praxis matemática se apoya en otros elementos, implica posiciones muy diferentes que divido en Fundamentalismos y Construccionismos, con sus distintas escuelas.

1. Fundamentalismos

Admitir una fundamentación expresada en nociones y principios supone la metáfora de construcción de edificio sobre base única. Cimientos o fundamentos que pueden ser enfocados de maneras distintas y que darán paso a visiones globalizadoras también diferentes dentro del mismo cuadro. En esencia encuentro dos líneas: Ontológica y Metodológica.

A) *Fundamentalismos ontológicos*

En el primer caso, el fundamento se pretende en paralelo absoluto con lo que se estima el fundamento material de un edificio, aunque ahora dicho fundamento ha de ser ideal. El Hacer matemático se basa en la previa existencia de unos entes u objetos ideales o conceptuales que el matemático tiene como misión descubrir. De esos entes ideales los primeros principios, que han de expresarse en un cierto lenguaje —de manera tópica u ortodoxa, y desde Skolem en los veinte de este siglo, un lenguaje de primer orden—, únicamente indican sus propiedades esenciales o cómo manejarlos. Los demás aspectos, epistemológico-cognitivo, metodológico, formal... se supeditan al ontológico. De aquí que sea una posición que entraña un reduccionismo ontológico radical.

Los exponentes más claros de este tipo reduccionista son los intentos elaborados por Zermelo, por un lado, y por Frege y después Russell, por otro, a fines del siglo pasado y principios de este. Intentos a los que agrego el muy posterior originado en la Teoría de Categorías.

a) Fundamentos conjuntistas

Para Zermelo la Matemática trata, de modo exclusivo, de conjuntos. Son las nociones básicas, y si alguien utiliza términos como los números no hace otra cosa que emplear formas abreviadas de expresarse. Los primeros principios son los axiomas conjuntistas que indican cómo manejar adecuadamente el objeto propio del Hacer matemático, manejar correctamente los conjuntos. De esas nociones, cuyas propiedades y posibles operaciones se plasman en los primeros principios o axiomas, deriva —y por ello fundamentan— toda la matemática, que se muestra unificada conceptualmente de modo absoluto. Todo en ella se reduce a conjuntos, estructuras conjuntistas, lenguajes formales acerca de esas estructuras...

Esta fundamentación «conjuntista» de la Matemática no sólo da una visión unificadora global de la misma, sino que pretende ser normativa en el sentido de regular el lenguaje matemático por el cual se obtienen, de unos conjuntos, otros conjuntos según las operaciones establecidas en los axiomas.

b) Fundamentos lógicos

En la misma línea que Zermelo se tiene el intento de una fundamentación ahora lógica de la Matemática. Es lo pretendido por Frege, después por Russell..., y es el denominado Logicismo. La Matemática se reduce a la Lógica, es decir, se tiene un lenguaje —que termina por ser formalizado después de ser axiomatizado— que reduce el conocimiento matemático al carácter formal de las teorías que, mediante su esqueleto axiomático, permite definir y demostrar teoremas, de forma que los únicos resultados que pueden denominarse matemáticos son los que se demuestran mediante un proceso finito lógico-deductivo.

Desde esta posición hay que precisar lo que se denomina demostración, porque es este concepto el clave para hacer que un enunciado sea o no matemático. Y la demostración se convierte en una derivación lógica:

> Sucesión de proposiciones en la cual la primera o las primeras son los axiomas, las restantes se obtienen de las anteriores por mera aplicación de las reglas de derivación y la última es la proposición a demostrar o teorema.

Es un concepto de demostración en el cual se exige no saltar etapas o realizarse sin lagunas, sin intromisión de elemento epistemológico, cognitivo, psicológico, de contenido, heurístico..., alguno. En la demostración no importa para nada la longitud que finalmente alcance; las derivaciones no se miden por la vara, afirmará Frege.

En cualquier caso los objetos matemáticos son objetos puramente lógicos y los principios matemáticos son leyes lógicas o derivados de leyes lógicas.

En el logicismo hay distintos matices. Así, para Frege, junto a unas leyes o primeros principios lógicos se requiere el empleo de unas definiciones adecuadas para el Hacer matemático, por lo que, en el fondo, éste no puede derivarse de sólo unos primeros principios lógicos. Sin embargo, de esos primeros principios y definiciones se obtiene el total del conocimiento matemático, por lo que puede admitirse que los mismos son los únicos que permiten justificar dicho conocimiento. Justificación que conlleva la suposición de que la Matemática queda fundamentada, como una parte propia, en la Lógica.

Con leve inflexión, un primer Russell pretenderá que los principios lógicos son verdaderos por su forma lógica, sin afirmaciones existenciales o de contenido. Y desde los primeros principios lógicos puede derivarse el total de la Matemática. Es una pretensión que le obliga a aceptar principios como el de infinitud y el de reducibilidad para alcanzar su fin propuesto, principios que de manera evidente no pueden ser estimados como lógicos o formales en el sentido de que estos últimos no han de tener relación alguna con afirmaciones de existencia, por ejemplo.

Los dos reduccionismos anteriores se plasmaron en los últimos años del siglo XIX por Frege y primeros años de este siglo por Russel, Peano, Couturat... Plasmación, en ambos casos, incompleta y que obligaron a su sistematización y completitud en los años siguientes. El logicismo de Russell, en *Principia Mathematica*, escrito con —o por— Whitehead. El conjuntismo, precisado por Skolem y Fraenkel a partir de los años veinte, culmina en teoría definitiva en el sistema axiomático formalizado de primer orden ZFS, aunque surgirán otros sistemas conjuntistas como el NBG, también a finales de los veinte.

Desde la Teoría de Categorías, creada en los años cuarenta por Eilenberg y Mac Lane, se va a proponer por Lawvere, ya en 1966, una vuelta a los fundamentalismos reduccionistas ontológicos que habían quedado un tanto obsoletos como intentos de fundamentación definitiva. En esta vuelta, y en principio, se sitúa un reduccionismo que pretende sustituir, básicamente, al conjuntista. En esencia, es un reduccionismo del tipo siguiente.

c) Fundamentos categóricos

Para Lawvere las propiedades clave de los objetos matemáticos se caracterizan, de modo exclusivo, en términos de estructuras abstractas y no en términos de propiedades que puedan tener esos objetos pensados en sí. Lo que permite derivar y justificar, y por ello fundamentar, el Hacer matemático en su totalidad es, por modo exclusivo, la estructura. Y Lawvere precisará:

> Aquí entendemos por «fundamento» un sistema único de axiomas de primer orden en el que se pueden definir todos los objetos usuales matemáticos y demostrar todas sus propiedades usuales [Lawvere 1966, p. 1].

En este terreno de fundamentación se han tenido algunas modificaciones posteriores: en lugar de considerar como noción fundamentante la estructura abstracta, se han adoptado como tales los topos o las flechas... En cualquier caso, se pretende que todos los conceptos matemáticos sean explicables en nociones de Teoría de Categorías.

En estos tres casos de reduccionismo ontológico, en los cuales la Matemática se fundamenta en la Teoría de Conjuntos, en la Lógica formal, en la Teoría de Categorías —todas ellas expresadas en lenguaje de primer orden—, las primeras nociones y sus principios asociados expresan la ontología subyacente que se estima como el pilar base, el cimiento que asegura, firmemente, todo el Hacer matemático. Lo que importa es el reduccionismo conjuntista, categórico o lógico, en el sentido de que las propiedades relevantes de los objetos matemáticos son aquellas y sólo aquellas que pueden establecerse en términos conjuntistas, categóricos o lógicos respectivamente. Todo el hacer queda así, bajo un dominio único a partir de un reduccionismo ontológico radical.

Insisto en que aspectos como el epistemológico o cognitivo, psicológico, formal, metodológico..., o no se consideran para nada y se marginan, a lo que se denominará posteriormente contexto de descubrimiento, o se supeditan al aspecto ontológico preponderante.

En cuanto al estatuto de esas primeros nociones y sus principios —sean conjuntistas, categóricos o lógicos— y de las definiciones exigidas, se asegura que gozan de las propiedades que desde Descartes se consideran esenciales en cualquier intento fundacional: ser autoevidentes, autosuficientes, verdaderos en sí, pocos en número, simples y claros...

Estas posiciones, esencialmente reduccionistas en lo ontológico, suponen un claro dogmatismo epistemológico en el sentido de considerar que esos primeros principios conforman el único conocimiento racional que no es convencional o arbitrario y, por ello, es verdadero, y todo el que quiera mostrar que su hacer no es convencional tiene que referirse, en última instancia, a los mismos.

Supone, por otro lado, la admisión de que el universo matemático es algo ya cerrado, un dominio atemporal de entes como conjuntos, estructuras abstractas u objetos lógicos y que, por cimentarse en esos primeros principios, el conocimiento de los mismos se hace infalible siempre que el matemático llegue a captar los primeros principios. Enfoque fundacionalista que exige la existencia de un universo respecto al cual nuestro conocimiento se hace verdadero esencialmente, aunque no se tenga o posea una fuente infalible de conocimiento.

Posición de la que cabe preguntar por la justificación, por la propia cimentación que asegura esas primeras nociones y principios fundamentantes. Posición que ante una pregunta como la ahora formulada muestra como salidas, y en principio, la de no dar respuesta —y es la adoptada por Frege cuando señala que los primeros principios, los fundamentantes, son leyes lógicas, pero la pregunta por su justificación se sale de la Lógica y, por ello, desde la pretendida línea justificadora logicista termina no dándose respuesta—. O la de indicar que la Matemática tiene que ver con un mundo realista de entidades con sus propiedades y sus relaciones intrínsecas...; un mundo al cual ha de acceder el matemático para, en su labor, limitarse a describir esos objetos, sus propiedades, sus relaciones, al modo y manera en el cual el descubridor de un continente describe lo que encuentra —y es la salida de un segundo Cantor con el «si no lo veo no lo creo» entre otras afirmaciones, o la de Frege y el primer Russell con sus analogías del matemático como geógrafo descubridor de nuevos continentes, o la de Zermelo—.

Son esas realidades, los objetos y estructuras lógicas y matemáticas, miembros de un mundo realista existente más allá de los estados de conciencia y experiencias del matemático, las que fundamentan o dan razón de la praxis matemática. Los reduccionismos exigen, por ello, admitir lo que se denomina «platonismo matemático», aunque el término «platonismo» quizá no sea el más acertado si realizamos relecturas no contaminadas de los textos platónicos y hubiera que precisar «platonismo cantoriano».

La existencia de una realidad extramental ideal implica la problemática de cómo alcanzar el conocimiento de estas entidades extramentales, de si existe o no algo a lo que denominar intuición y de qué tipo. Pero también supone un estatismo absoluto: la Matemática está ahí, dada de una vez para siempre, como el continente que «espera» a su descubridor. Y, si hay grietas, las mismas lo son de nuestro conocimiento, no de ese mundo y, por tanto, habrá que seguir trabajando para obtener el conocimiento de los últimos axiomas o principios fundamentantes, no alcanzados todavía.

Desde esta posición, el elemento temporal es inexistente, lo cual, y como consecuencia, conduce a la sorpresa de no saber muy bien cómo los matemáticos del siglo XVII, o los del siglo XIX no descubrieron el continente matemático ensoñado, y de una vez. O, también, cómo no han descubierto un continente único fundacional ya que, al menos, se presentan como auténtico cimiento varios en disputa.

Pero el elemento temporal es inflexible. Y los propios programas de fundamentos sufren sus modificaciones, alteraciones, desapariciones o, incluso, desgajamientos internos.

Así, he indicado que la construcción de Zermelo tuvo que ser precisada y modificada, dando paso a la Teoría ZFS. Junto a ella, surgió otra axiomatización conjuntista iniciada por Von Neumann que culminará en la Teoría NBG, con un universo de entidades básicas diferentes: de *urelements* y conjuntos, a funciones. De fundamentar, cualquiera de ellas fundamentaría el Hacer matemático, pero el problema se centraría en cuál de tales fundamentaciones elegir. Y el problema no se resuelve indicando que, en el fondo, ambas construcciones conjuntistas son equivalentes. Sería confundir el plano metodológico con el ontológico. De lo que aquí se trata es de este último: se está partiendo, en la cimentación, de entidades distintas.

Es un problema electivo ontológico en el que inciden, además, dos cuestiones:

—Ninguna de estas construcciones fundamentantes es categórica —teorema de Skolem—, por lo que permite la aparición de modelos no canónicos de la Aritmética. De fundamentar algo, fundamentaría de manera excesiva.

—En segundo lugar, desde Gödel y Cohen se han tenido que incluir nuevos axiomas, como el de construibilidad (V=L), determinación (AD), de cardinales amplios como el de Martin..., dentro de cada Teoría fundamentante. Nuevos axiomas que no se estratifican en una jerarquía más o menos ordenada según su potencia, sino que son incompatibles entre sí. Con lo cual se ha provocado no sólo una escisión en la teoría conjuntista en, al menos, dos —y caben teoremas conjuntistas en una que son falsos en la otra—, sino que cada una da un cuadro radicalmente diferente. De fundamentar algo, cimentarían distintas teorías matemáticas construidas sobre bases conjuntistas diferentes... (Pla, 1993)

En cuanto al logicismo, constituye un intento autoinconsistente desde su raíz: en el caso de Frege, porque pretende fundamentar el Hacer global tomando los propios elementos conceptuales a fundamentar como su punto de partida: Función-argumento; Concepto-objeto o función y su extensión o conjunto de definición. En el de Russell, por admitir un axioma como el existencial de infinitud, cuando de modo explícito está señalando que los principios han de ser verdaderos únicamente por su forma lógica...

De la Teoría de categorías señalar, por modo exclusivo, que se ha visto como un intento de reemplazar la Teoría axiomática de conjuntos en el papel de disciplina fundamentante, con ausencia de precisión en los momentos iniciales, mezclando el terreno metodológico y el ontológico. Lo cual motivó, ciertamente, algunas discusiones en torno a si lo primario, desde un plano cognitivo, es la noción de estructura y sus tipos particulares o si, para captar la noción de estructura no se requiere, previamente, de la noción de sistema y función u operación (Feferman, 1977), con lo cual se mezclaban distintos aspectos de lo que calificar como fundamentación. Desde mi punto de vista, es claro que la Teoría de categorías constituye un tipo particular de praxis en el interior del Hacer global en el que, en su origen, pretende captar la noción de función o transformación «natural», por lo que tiene que partir de los conceptos-núcleo de este Hacer global. Difícilmente puede constituir el fundamento ontológico del mismo, lo cual no quiere decir que, desde aspectos heurísticos y cognitivos, la Teoría de categorías no aporte elementos clarificadores al Hacer matemático tanto en la sistemática conceptual, y no sólo en los terrenos pragmáticos, como en la propia elaboración de nuevas lógicas, como la Lógica lineal, y en sus enlaces con el lenguaje natural o la teoría de la complejidad.

B) *Fundamentalismo metodológico*

La segunda línea fundamentante es una opción también reduccionista pero no en lo ontológico sino en lo metodológico. Acepta que el matemático trabaja con objetos cuya naturaleza, cuya esencia ontológica, le es indiferente. Lo que le importa al matemático es el método con el que trabaja.

En línea fundacional se considera que el método esencial es el axiomático que muestra, en su aplicación, dos aspectos: por un lado, uno formal sintáctico puro por el cual caracteriza estructuras formales, y si al matemático se le pregunta por el objeto —si la pregunta tiene algún sentido aquí— con el cual trabaja, la respuesta es clara: teorías o sistemas formales. Por otro, un enfoque más postulacional en el que se considera que el método tiene un carácter más bien organizativo de algún contenido conceptual previamente existente; enfoque de carácter más semántico que el anterior pero en el cual tampoco la naturaleza de los objetos interviene para nada. Es el primer aspecto el realmente fundacional, mientras que el segundo se refugia en un enfoque básicamente algebraico.

Reduccionismo metodológico que encuentra en el manejo de la axiomática formal el elemento fundamentante estructural de la praxis matemática. Ahora, por metodología, no hay primeros principios ontológicos básicos sino elementos estructuradores formales. No edificio sino ciudad, y es la inflexión que lleva desde Hilbert al enfoque estructuralista y bourbakista.

Al igual que en los reduccionismos ontológicos, que requieren de la previa existencia de un dominio ontológico, el metodológico requiere de una apoyatura para el sistema formal que su axiomática define o caracteriza. Apoyatura que encuentra en una propiedad que ha de tener el propio método, ha de ser intrínseca al mismo: al definir axiomáticamente un sistema formal éste no puede ser contradictorio, de lo contrario no caracteriza nada por caracterizar demasiado y el método se mostraría inservible. En el reduccionismo metodológico no hay problema ontológico previo, sino subsidiario, reducido a su base fundacional.

Si la unidad del edificio matemático se obtenía gracias al objeto en los reduccionismos ontológicos —venía a estar dada por el reino ideal de esencias y sus estructuras—, la Matemática sigue siendo considerada como unitaria en el metodológico, pero su unidad viene establecida por el método axiomático. Es el que posibilita que, ontológicamente, las distintas teorías no se puedan reducir entre sí, porque tengan un objeto común —es problema carente de sentido—, pero sí puedan relacionarse a través de morfismos estructurales. De edificio único, a ciudad con su urbanismo asociado.

2. Construccionismos

La tercera postura, en principio no reduccionista o fundacional, se centra en afirmar que no hay unos principios únicos y válidos para todo tiempo y lugar y para el total de la Matemática, sino que la Matemática es el resultado o producto de un trabajo de la razón humana que, con motivo de la experiencia, va elaborando distintas teorías, incluso para caracterizar unos mismos fenómenos. Elaboración que, para algunos como Brouwer, llega a ser independiente y anterior al lenguaje en el cual se expresa.

Desde esta posición, y como crítica a las posiciones reduccionistas anteriores, se indica que la elección de las mismas no viene justificada o «fundamentada» por razones puramente internas a la praxis matemática, ni por razones puramente lógicas. En los intentos reduccionistas tanto ontológicos como metodológicos, se observan consideraciones pragmáticas, psicológicas, heurísticas, incluso motivaciones personales, de quienes hacen y formulan los intentos reduccionistas. Y la existencia de diferentes programas reduccionistas de carácter fundacional indica, claramente, que ninguno es lo suficientemente satisfactorio: de serlo, sólo uno. Además, son intentos que, excepto en el caso conjuntista, no han logrado dar cuenta del total del conocimiento matemático o, en cualquier caso, muestran que los primeros principios son, en ocasiones, más conflictivos que los teoremas a los que justifican, y las demostraciones más complicadas que la proposición a demostrar.

Motivaciones y consideraciones que hacen que esos intentos reduccionistas se incardinen en programas metafísicos o ideológicos globalizadores, un tanto ajenos al hacer intrínseco matemático.

Desde este hacer intrínseco, y a partir de una posición crítica como la anterior, se tienen, a su vez, al menos dos posibles salidas:

Admitir que el matemático, como respuesta a cuestiones que se plantean tanto internas al Hacer matemático, como externas y procedentes fundamentalmente de la Física, elabora sistemas formales que se explicitan de manera lingüística. En esta elaboración la definición axiomática constituye uno de los instrumentos clave para establecer las definiciones por postulados o implícitas de las estructuras en ellos considerados. En el papel justificativo y organizativo no se plantea la cuestión de la consistencia de los sistemas formales definidos, ya que se parte de la existencia de lo que en ellos se caracteriza. Una estructura como la de grupo, por ejemplo, no hace más que reflejar u organizar lo que, de hecho, existe: las simetrías o invariancias en la fisis. Es aceptar que el aspecto metodológico tiene un papel tan esencial como el epistémico o cognitivo en el Hacer matemático, aunque puede primarse en cuanto elemento organizativo y no estrictamente sintáctico o formal puro; primarse en cuanto uno de los instrumentos que permiten elaborar modelos posibles de lo real. Y ello implica, por supuesto, que el matemático no tiene por qué limitarse a manejar el método axiomático como único o privilegiado.

La otra salida consiste en señalar que la praxis matemática no deriva de la existencia de un mundo eidético de objetos lógicos, conjuntistas o estructuras, reflejado en unos primeros principios, ni encuentra su última justificación en los mismos; tampoco en el manejo de un método único y privilegiado como el axiomático. La praxis matemática encuentra su justificación, por modo exclusivo, en la existencia de la razón constructiva conceptual, en la existencia del matemático —y prácticamente he parafraseado a Poincaré—. Razón constructiva conceptual que permite ir elaborando, construyendo, la Matemática, transformándola a la vez que esa misma razón se transforma, porque no es un dato inamovible y atemporal.

Razón constructiva conceptual que, en la elaboración de su producto, lo hace en distintos estilos y marcos o haceres. En cada caso, los conceptos plasmados y aceptados en un estilo pueden variar, así como algunas proposiciones y teorías. Incluso en el mismo Hacer los conceptos se presentan, en muchas ocasiones, difusos y las demostraciones sí han de medirse con la vara porque dependen de unos elementos epistemológicos cognitivos que impiden que se enfoquen como derivaciones sintácticas. Las demostraciones han de aceptarse como auténticos elementos de innovaciones y analogías conceptuales, algorítmicas y demostrativas y no sólo como instrumentos para verificar que una proposición se deriva de unos primeros principios.

La justificación, si es que se requiere de alguna, se centra en el aspecto epistemológico de esa praxis que permite la búsqueda de unos mecanismos constructivos inherentes a la razón conceptual. Mecanismos constructivos que se pueden denominar intuición de la unidad en la dualidad, a lo Brouwer; juicios sintéticos *a priori* como capacidad iterativa o manejo de estructuras algebraicas o topológicas, a lo Poincaré; razón constructiva conceptual en mis términos... Mecanismos constructivos que han de ir ligados al ideograma y teniendo presente, siempre, tanto la fisis material en su interrelación con el sujeto, como la situación histórica en la cual trabaja el matemático, situación histórica con unos contenidos internos, problemas, instrumentos de cálculo, pero también con unos intereses profesionales y sociales, con unos medios de comunicación determinados...

En este sentido, conceptos, algoritmos o cálculos y métodos, tanto estrictamente demostrativos como constructivos, se consideran igual de importantes para la praxis matemática. En una demostración o en el proceso de captación conceptual se construyen nuevos métodos que, a su vez, dan paso a nuevos conceptos que dan paso a nuevas propiedades con sus demostraciones asociadas y, en algunos casos, nuevos mecanismos demostrativos.

Por un ejemplo: en lugar de tratar de resolver directamente las ecuaciones algebraicas, en lugar de partir de la ecuación para alcanzar sus raíces, se invierte conceptualmente y se parte del dato de las raíces posibles; ello conduce a observar que para que esas raíces lo sean, han de poseer una estructura determinada: la de grupo. Captada la noción de grupo, se amplía el dominio matemático al convertirse esta noción en nuevo objeto de estudio. Inmediato, algún matemático lo enlaza con otros campos y llega a provocar un cambio conceptual en nociones como la de movimiento y, con ellas, en la concepción de lo que estimar geometría y, consecuente, espacio... que, a su vez, condicionan la propia concepción de la noción de grupo...

Más reciente, la demostración de un teorema como el de incompletitud realizada por Gödel no es importante sólo por la demostración del resultado: es importante por el proceso demostrativo en el que, junto a los procesos de aritmetización o Gödelización y de representación, incorpora funciones como las recursivas. Y ello ha dado paso a un nuevo campo de hacer desde el cual se re-demuestra el resultado original gödeliano pero, también, se plantean problemas como los de complejidad, entre los que cabe situar el de la complejidad de una demostración y su vara de medir, se intentan precisar nociones como la de «función recursiva» y sus tipos, se enlaza con los procesos algorítmicos a través de instrumentos conceptuales como la máquina Turing, que llevan a plantear si la máquina puede pensar...

En este sentido, para quienes consideran que, en todo caso, hay que seguir hablando de un fundamento justificador, más o menos naturalizado, se insistirá en el papel epistemológico, en el hecho de que no puede separarse la praxis matemática de lo que entender por conocimiento matemático. En cierto sentido, y adoptando el título de una obra de Carnot, es imposible separar el cálculo infinitesimal de su metafísica. Y esa metafísica, en general, viene establecida por unos Conceptos-núcleo que exigen, a su vez, de unos métodos demostrativos, de unos procesos cognitivos y heurísticos, de unos cálculos que no pueden ser desgajados en aspecto sintáctico formal, aspecto semántico, método..., como se quiere en los fundacionalismos reduccionistas.

Y no pueden ser desgajados porque en esa interrelación, en esa elaboración práctica de concepto-núcleo, método demostrativo, proceso heurístico, cálculo..., es en la cual se van precisando y delimitando los conceptos, o se van transformando, o se van obteniendo aspectos que estaban implícitos en los mismos... Procesos que implican que la praxis matemática se transforma, modifica sus conceptos, enriquece sus métodos demostrativos y definicionales. Procesos que implican que la praxis matemática es temporal, dinámica y no estática, por lo que cualquier pretensión de establecer unos cimientos o fundamentos únicos y atemporales o ya definitivos para esa praxis, marginados a quien precisamente la lleva a cabo, carece de sentido.

3. UN CUADRO-ESQUEMA

Son distintas posiciones, en cuanto a lo que calificar de fundamentos, que afectan, claramente, a la propia noción de qué entender por matemática y sus relaciones con las restantes disciplinas cognoscitivas, su relación con el sujeto cognoscente.

En esquema, las posiciones anteriores pueden bosquejarse en un cuadro como el siguiente, insistiendo en que dentro de las mismas se pueden establecer diferentes matices según qué aspecto se sitúe en primer plano:

— *Fundamentalismos reduccionistas:*

- Ontológicos: existe un universo eidético de objetos primarios que son conjuntos —Fundamentos conjuntistas—, objetos lógicos —Logicismos—, estructuras —Fundamentos categóricos—;
- Metodológicos: método axiomático como elemento definicional en dos versiones: formal o sintáctica pura, postulacional o algebraica.

— *Constructivismos:*

- Factor epistemológico como elemento clave para la praxis matemática —Constructivismos con sus diferentes matices—.

Este cuadro permite situar y analizar críticamente las polémicas que en torno a los posibles reduccionismos han tenido algunos matemáticos. Así la producida entre Poincaré y Zermelo, que llevó a Poincaré a afirmar que hablaban en lenguas diferentes sin parte común alguna, y que puede clarificarse atendiendo a los aspectos que cada uno estima primario. Igualmente permite situar las diferentes posiciones que, en torno a esta problemática, se producen y permiten clarificar, ahora, a qué afecta una posible atribución de crisis de fundamentos:

—Si se admiten unas nociones y principios como auténticos fundamentos y alguno de esos principios se resquebraja o se viene abajo —porque entraña contradicción y, desde un terreno lógico, de una contradicción se obtiene todo lo que se desee, por lo que no se tiene nada, o entraña antinomias y entonces los procesos conjuntistas son excesivamente potentes y hay que acotarlos para evitarlas—, entonces sí cabe decir que hay crisis en dichos fundamentos y en el edificio que sustentan. Es lo ocurrido a Frege, por ejemplo.

—Si se admite que las nociones y principios no son más que un reflejo de lo existente en una realidad eidética, extramental, entonces no cabe considerar que haya crisis ni de fundamentos ni de la Matemática, sino del conocimiento que tenga el matemático, en el sentido de que no ha logrado ver los auténticos primeros principios y debe seguir buscando. Es lo que estima Zermelo con su intento de acotación del tamaño de los conjuntos y sus operaciones correspondientes para evitar las antinomias. Es lo mantenido por Gödel con la búsqueda de axiomas conjuntistas de cardinales cada vez más potentes.

—Si se admite que es una construcción humana, el fallo no se puede atribuir a unas nociones y primeros principios, sino que se tiene la aparición de una crisis. Crisis tomada aquí en el sentido de un momento difícil, incluso grave, en una determinada teoría o incluso praxis matemática. Lo cual exige un análisis conceptual de la misma para superar el momento, las dificultades que lo han provocado. Ello implica que, frente a la afirmación de existencia de un posible hundimiento en la Matemática, lo que se tiene es la aparición de dificultades, de problemas que el matemático ha de resolver en su praxis.

Y la existencia de unos problemas que afecten a lo que puede considerarse base de un determinado Hacer matemático, importa hasta cierto punto en su sentido externo. Sí en el sentido interno: plantea problemas respecto a algunos temas matemáticos. Y esto último es siempre positivo y enriquecedor ya que, como diría Hilbert, si una ciencia carece de problemas entonces se la puede considerar muerta, o Poincaré cuando exclamaba irónicamente frente a todo reduccionismo, logicista o conjuntista, que menos mal que no todo ha sido resuelto ya para siempre y se puede seguir haciendo matemáticas, planteando y resolviendo problemas...

III. VISIÓN ORTODOXA: EXISTE CRISIS DE FUNDAMENTOS. UNA PRIMERA CRÍTICA

Establecido un cuadro como el anterior, que permite clarificar la atribución de crisis a unos determinados intentos de fundamentos, pero no a una praxis matemática, cabe recordar la versión canónica, el tópico de lo que se considera la «crisis de los fundamentos de la Matemática». Es una versión que, por tópica, es muy conocida. De aquí que me limite a un mero esquema de la misma seguida de una primera crítica que posibilite avalar las dos tesis de este trabajo.

En ella se indica que la Matemática anterior a Weiertrass carecía de rigor, se manejaban en Análisis los infinitesimales o diferenciales apoyándose en la intuición geométrica. Y a Weiertrass —a pesar de las protestas de Cantor, entre otros— le atribuirá Klein ser el máximo responsable de poner orden en esa ausencia de rigor.

Lo que se atribuye a Weiertrass es desterrar tanto los infinitésimos pequeños y grandes, como desterrar la noción de «variable que tiende a» con la que se manejaban magnitudes que eran números pero que dejaban de serlo porque se hacían cada vez más pequeños. Y lo hace con afirmaciones que se refieren a relaciones entre números finitos, por lo cual el Cálculo, desde este momento, se convierte en las operaciones de mayorar, minorar, acotar.

Weiertrass pasa al estilo ϵ–δ y, con ello, a procesos de mayoración y minoración, al manejo de desigualdades numéricas, así como al empleo de series de potencias y elementos de funciones, por lo cual pasa, por un lado, a considerar las funciones como clases y, por otro, a enfocar las ecuaciones diferenciales, por ejemplo, no ya como objetos dados a ser resueltos sino como objetos que producen una información acerca de las funciones que las satisfacen. Una nueva manera de hacer Matemática en la que se trata de eliminar ideas poco claras y abstrusas y definir con precisión los conceptos utilizados.

En su entorno se termina por aclarar y definir los números reales —hacia 1872 lo hacen Weiertrass-Kossack, Méray, Cantor, Dedekind, independientemente unos de otros— y se hacen demostraciones rigurosas sin acudir a la ayuda de la figura geométrica. Se logra la demostración de los grandes teoremas de las funciones continuas de una variable real, como el de valor intermedio o de Bolzano, el de la acotación o de Bolzano-Weiertrass...; se distingue entre función continua y función uniformemente continua, se distingue la continuidad de la diferenciabilidad con lo que se separan los procesos de diferenciación de los de integración, y la integración pasa a tener una autonomía inexistente desde la visión clásica.

La aritmetización del Análisis —que comienza con Gauss y sigue con Dirichlet, a pesar de las afirmaciones de Klein—, constituye un proceso en el que el rigor en la praxis matemática se hace absoluto, y se insiste en que se ha dado un fundamento a la misma, precisamente por la obtención de ese rigor aritmético.

Un proceso por el cual la Matemática descansa, se fundamenta en la Aritmética, ya que es a partir del sistema de los números naturales como se derivan los enteros; de éstos los racionales, los reales, los complejos, los demás sistemas de números..., el total de la Matemática. Aparentemente hay una fundamentación genética, reduccionista, en la Aritmética. El problema parece centrarse en la fundamentación de la Aritmética.

Si la Aritmética es el fundamento reduccionista del cual se deriva el total de la Matemática, se puede preguntar, en esta línea, por su propia fundamentación. Y será la pregunta de Dedekind, la elaboración de obras con el título *Fundamento de la Aritmética* de Frege y de Husserl, de quienes entornan y siguen a Weiertrass...

Hay respuestas para todos los frentes. Así, la Aritmética es un dato primigenio, un don divino —Kronecker—, o se puede expresar de modo axiomático —Peano—, o reducir a sistemas o conjuntos —Dedekind, Cantor—, o definir a partir de principios estrictamente lógicos —Frege—, o apoyar en el signo y las reglas formales de manejo de esos signos —Heine, Thomae—, o establecerse a partir de un proceso como el dado por la fenomenología —Husserl—...

Según la respuesta elegida se tiene, consecuentemente, que el total de la Matemática se encuentra fundamentado en el primer sentido, reduccionista o justificacionista ontológico, de los que indiqué de fundamentos —y es el único en el que se concentra la visión ortodoxa, olvidando la existencia de todos los demás citados—. Pero también en el no genético sino formalista, porque la Aritmética puede establecerse como un sistema formal a partir de la axiomática de Peano o la axiomática lógico-sintáctica fregeana, por lo cual se encontraría fundamentada en el segundo sentido reduccionista, el metodológico. Incluso podría aceptarse en el tercer sentido porque, desde él, su apoyatura se centra bien en la capacidad constructiva conceptual de la razón humana, bien en la capacidad reiterativa de la misma, consecuencia de un juicio sintético *a priori* como la inducción completa.

Según la versión canónica-ortodoxa, no hay tal diversidad de respuestas, sino que sólo parece tenerse la de una rigorización aritmetizadora absoluta, apoyada en la teoría de números. Y oculta dos elementos que habría que agregar y que son fundamentales: la praxis matemática no se centraba ni se centra, por modo exclusivo, en el Análisis, sino que existía y existe un trasfondo geométrico que no puede disolverse. Además, la apoyatura no es en el número natural, sino, básicamente, en los sistemas de números naturales y en los métodos conjuntistas que permiten ir desde ellos a los sistemas de enteros, de racionales... Aunque se oculte o no se explicite, resulta que en la llamada aritmetización se acepta no sólo la Aritmética, sino los sistemas o conjuntos, sean de naturales, sean de cualquier otra naturaleza. Y es lo que vio claramente Poincaré cuando señaló, en el II Congreso Internacional de Matemáticos de 1900, que se había alcanzado el rigor en la Matemática gracias a su apoyatura en la Aritmética y en los «sistemas» de números naturales.

Afirmación de Poincaré radicalmente criticada porque, de modo inmediato, surgen las paradojas en los entornos de 1902. Y las paradojas muestran que este reduccionismo y este rigor están, realmente, ausentes y parecen haberse construido, fundamentado, en la arena. El edificio se resquebraja. Y es a la aparición de estas antinomias y a la inconsistencia que provocan, tanto en el sistema fregeano como en la Teoría conjuntista, a lo que desde la historia clásica se denomina «Crisis de los Fundamentos» sin tener presente los otros aspectos antes mencionados para los cuales, realmente, no se presenta dicha crisis ni derrumbamiento de tipo alguno.

Tratando de paliar o impedir el hundimiento, de superar esta crisis, la visión ortodoxa dictamina que se originan tres grandes escuelas de fundamentación, con sus repercusiones en todo el Hacer matemático y en la concepción y elaboración de la Lógica: la escuela constructivista que abarca desde los semiintuicionistas franceses al intuicionismo radical de Brouwer, la logicista de Frege y Russell-Whitehead, la formalista de Hilbert.

Ésta es la visión canónico-ortodoxa, ciertamente muy esquematizada. Visión que, aunque sea la «oficial», no es muy coherente. En ella nada se dice de por qué el edificio, si sus fundamentos son contradictorios, no se ha hundido definitivamente, sino que simplemente indica que, como los fundamentos del edificio quedan en el aire, hay que buscar dichos fundamentos: en otras palabras, desde esta visión histórica ortodoxa parece que los edificios se construyen en el aire y, luego, se busca dónde sustentarlos. Empleo de la metáfora un tanto extraño, salvo admitir una posición como la interna de los matemáticos, la apuntada antes tras las palabras de Hilbert, con lo que la fundamentación pierde todo su sentido justificacionista y se pasa a un mero pragmatismo radical.

Además de no decir por qué el edificio no se hunde, a pesar de la crisis, tampoco se indica que el logicismo de Frege es anterior a la aparición de las antinominas y de la crisis, y que únicamente el intento de superar la misma en línea logicista es propio de Russell-Whitehead. Ni se menciona un reduccionismo como el conjuntista que constituye, precisamente, uno de los focos más internos a la praxis matemática.

Tampoco se especifica el pequeño matiz de que la posición de Hilbert —el Programa de Hilbert— surge después de la Primera

Guerra Mundial, cuando a los matemáticos alemanes se les impide asistir a los Congresos Internacionales. Aunque Hilbert vuelve al tema desde los entornos de 1917, especialmente 1922, será en 1925 cuando plantee el gran problema *Acerca del infinito* y es en el Congreso de Bolonia, 1928, primero al que se permite esa asistencia a los matemáticos alemanes, donde sistematice, de manera oficial, los grandes problemas que tiene planteada lo que va a calificar como Teoría de la Demostración o metamatemática. Y ello en paralelo a los problemas que planteó en su asistencia al Congreso de 1900 en París.

Tampoco se da cuenta de que los matemáticos ya venían discutiendo, en ese último tercio del siglo XIX, sobre la naturaleza del Hacer matemático, y se habían escindido en posiciones que son las que desde la visión ortodoxa se quiere que aparezcan desde el surgimiento de las paradojas: posiciones como la inscripcionista defendida por Hankel o Heine, constructivista por Kronecker, constructivista conceptualista por Dedekind, formalista por Thomae, con su metáfora de la matemática como mero juego de ajedrez y por un primer Cantor, realista trascendente por un segundo Cantor, logicista por Frege, fenoménologica por Husserl...

En Frege, en sus *Fundamentos de la Aritmética* de 1884, se tiene una crítica imperfecta y parcial de todas estas posiciones, que no derivan de la crisis producida por las paradojas, sino que están enraizadas en algo más profundo, en algo que la visión canónico-ortodoxa no ha visto, y no ha visto por la tendencia muy sesgada que la subtiende en sus primeros momentos con una pretendida fundamentación logicista reduccionista.

El problema surge porque en la Matemática, en la última mitad del siglo XIX, ha aparecido un tipo de hacer matemática muy distinto al que se venía haciendo. Junto a y frente a un Hacer figural, ha surgido un Hacer global que es el que practican, y de manera un tanto confusa en sus comienzos, Weiertrass, Dedekind, Cantor, Hilbert..., frente al que manejan matemáticos como Kronecker, Hermite, Jordan, Gordan... Los matemáticos son plenamente conscientes de ello y buscan dar cuenta de su praxis, un dar cuenta que asegure el papel cognoscitivo, metodológico e incluso ontológico de lo que están haciendo.

Para el matemático del siglo XVII o XVIII, para muchos matemáticos del siglo XIX —y mencionaría a Galois, Hermite, Liouville...—, no existe el problema de fundamentar lo que está haciendo: un teorema está fundamentado, justificado racionalmente, si hay «buenas razones» para admitirlo. Y ello porque hay un contenido de pensamiento ligado al objeto matemático que se está manipulando, por lo cual cabe admitir las propiedades atribuibles al mismo. En el Hacer figural se parte del objeto, del que se dan buenas razones para admitirlo: así, es a partir de unos problemas físicos como surge un problema como el de la ecuación potencial y se intenta buscar las soluciones de la ecuación en derivadas parciales correspondientes; o desde el problema de estudiar un fenómeno como el calor, se formulan unas series como las trigonométricas, de las cuales habrá que plantear su convergencia, su unicidad... El conocimiento matemático está justificado, hay buenas razones para admitirlo, en la *phusis*, en la razón conceptual o, en última instancia y como mantenían los racionalistas, en Dios.

Pero el Hacer global supone una inversión radical en cuanto al objeto matemático: no se parte del objeto sino del sistema, agregado o conjunto de elementos cualesquiera, de la función entre sistemas, con lo que invierte la praxis matemática. Y es lo que indiqué en la posición de Weiertrass: buscar no ya las soluciones de una ecuación en derivadas parciales, sino considerar que tal ecuación posibilita dar una información respecto a las funciones que la satisfacen.

Es un pensamiento que parte de globalidades de objetos de naturaleza cualquiera, que han de poder relacionarse entre sí mediante un elemento nuevo, la aplicación o función. Aplicación que, a su vez, dota de una estructura a esas globalidades. Estructura que debe poder realizarse en algún modelo concreto, sea de lo físico, sea del propio Hacer matemático. Porque hay que tener muy presente que el dato del conjunto en sí como concepto-núcleo constitutivo es el punto de partida, el marco de juego. Pero lo que importa no es sólo el marco, sino el juego: y lo que importa esencialmente al matemático en su praxis es no el conjunto desnudo en sí, sino lo que puede hacer con los conjuntos, con la posible dotación de estructura, y las relaciones con otras totalidades o conjuntos.

Esta inversión es la que plantea el problema de justificar el papel cognoscitivo de la teoría construida o descubierta, de asegurar que lo que se obtiene es conocimiento tan cierto como el obtenido en el Hacer figural. Porque si el sujeto no está compuesto de formas *a priori* de la sensibilidad y el entendimiento, si maneja globalidades como objetos cuando tales globalidades no se presentan como intuiciones en sí, ¿dónde asegurar que lo que se tiene es conocimiento, cómo justificar que lo producido es cognitivo? Además, ¿cómo establecer la existencia de los objetos que pertenecen a esas globalidades sin poder acudir más que al ideograma o a la deducción?

Creo que éste es, realmente, lo que considerar problema de Fundamentación: buscar no ya unos criterios de validez del producto obtenido —validez que se da por supuesta—, sino justificar tanto los métodos utilizados como los resultados obtenidos al tomar como punto de partida los sistemas o agregados y la función. Se observa que la posición de la mayoría de los matemáticos del último tercio del siglo es la de aceptar como punto de apoyo la Aritmética y los sistemas, finitos o no, de números naturales para, desde ellos, tratar de justificar las construcciones de los restantes sistemas, tanto de números ya conocidos como de nuevos entes.

Aceptación que refleja la admisión de una línea débil constructiva que se apoya en un enfoque genético como justificación del Hacer matemático global. Pero el problema se presentó cuando los propios números naturales se definieron en función de agregados de elementos cualesquiera, cuando los números naturales, el punto de apoyo inicial, también se enfocó globalmente. El proceso genético quedaba, en parte, invalidado, aunque siguió como posición sustentante. Junto a él, y en el último tercio de siglo, se buscaron otras justificaciones como las que mencioné antes: formalista, logicista, fenomenológica, inscripcionista, realista... Justificaciones de una praxis matemática que continuaba, por su parte, realizándose.

Búsqueda de justificaciones que, a su vez, afirman que la Fundamentación se muestra como ideología, es decir, visión totalizante que intenta racionalizar y justificar una praxis previa, en este caso el Hacer matemático global. Y como ideología presenta muy distintos intentos y enfoques justificativos.

De aquí que, frente a la afirmación canónico-ortodoxa, sostenga que, realmente, no hay crisis en la Matemática ni en su Fundamentación, sino aparición de un nuevo Hacer que requiere precisiones en cuanto a su metodología, ontología y epistemología. En el Hacer global surgen, como antes en el Figural, dificultades que han de ser superadas o eliminadas. Inconsistencias que, desde alguno de los intentos ideológicos justificacionistas, se muestran como auténticas grietas en los cimientos que pueden hundir el Hacer matemático. Lo que no está de acuerdo con la praxis de dicho Hacer que no se hunde ni se resquebraja, sino que adquiere una potencia creadora desconocida en el Hacer anterior a la vez que permite dar cuenta de esa praxis anterior. Eficacia, profundidad conceptual, por lo que la mayoría de los matemáticos pasan a la «nueva» matemática sin que por ello la «antigua» o Figural desaparezca de golpe.

Y si insisto en este punto es porque permite comprender la posición ulterior que adoptan los matemáticos respecto a la llamada crisis surgida de las paradojas. Desde la visión canónico-ortodoxa tendría que parecer sorprendente que los matemáticos adopten las paradojas como fuente de inspiración para su trabajo, en lugar de considerarlas como la mostración de un derrumbamiento del mismo; que lancen sus quejas por el ruido que dichas paradojas han creado y se marginen, si pueden, a las polémicas que dejan en manos de «filósofos».

2. HACIA EL HACER GLOBAL

He indicado que el Hacer matemático a lo largo del siglo XIX tiene un profundo desarrollo. En Geometría se construyen las geometrías diferenciales, las proyectivas, las métricas no-euclídeas... En Análisis se inicia y profundiza el estudio de las funciones de variable compleja, se tienen las funciones doblemente periódicas, se transforma el concepto de función, de series de funciones, de ecuaciones integrales... En Álgebra se pasa de considerar como objetivo esencial la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones algebraicas, a la noción de grupo, desgajándose, además, de lo geométrico, al que se encontraba supeditada...

No es un desarrollo paulatino, sino auténtica explosión creadora de la que son conscientes algunos matemáticos. En esa explosión van surgiendo, simultáneos y en paralelo, nuevos conceptos y métodos de lo que finalmente se convertirá en una inversión respecto al Hacer con el que convive y al que, en última instancia, reemplazará, aunque no eliminará de modo total y absoluto.

A alguno de estos nuevos conceptos y métodos voy a prestar atención en lo que sigue. Con nueva insistencia: es claro que aquí no voy a hacer una historia de este Hacer, un recorrido puntual del mismo, sino que intento destacar algunos aspectos conceptuales de esta transformación.

I. EL TRASFONDO GEOMÉTRICO

En el desarrollo apuntado hay que destacar un hecho que en la visión canónico-ortodoxa se margina al pretender mantener que sólo hay un edificio matemático, el analítico, y atribuir la suposición de unicidad al edificio matemático por enfoque radicalmente reduccionista: hay que destacar que el siglo XIX es el siglo de oro de la Geometría. No sólo hay Análisis, unos principios de álgebra, unas progresivas ampliaciones del concepto «número» que obligan a plantear el postulado o principio de permanencia de leyes formales... A lo largo del siglo XIX el Hacer matemático viene condicionado por el pensamiento geométrico que no sólo se articula en la aparición de nuevas disciplinas o ramas geométricas, sino que se mantiene como trasfondo sobre el cual y contra el cual se desarrolla el hacer matemático. Fondo de pensamiento geométrico en el Hacer figural, pero también una de las claves de la transformación del Hacer matemático.

En el Hacer figural, Monge crea la Geometría Descriptiva convertida en eje instrumental de la Matemática aplicada a la industria y el ejército al representar los objetos en sus tres proyecciones en una perspectiva como la axonométrica o la caballera... La Geometría Descriptiva, secreto militar durante años, se convierte en base de lo que posteriormente se calificará de Dibujo técnico profesional.

La Geodesia, y con ella la Geometría sobre la superficie esférica, posibilita demostrar la no existencia de un patrón de longitud métrico universal —problema ligado al Sistema métrico decimal, pretendidamente universal, planteado por la República francesa— y propicia el desarrollo de la trigonometría esférica con sus aplicaciones a la Astronomía.

Con sus precedentes, en el siglo XIX se crea la Geometría Proyectiva, las Geometrías diferenciales, las Geometrías métricas no-euclídeas a partir de enfoques tan diversos entre sí como el trigonométrico de Lobatchevski, el demostrativo por reducción al absurdo de Bolyai, el local diferencial de Riemann y Beltrami... Se contraponen los razonamientos analítico y sintético, se origina la Geometría algebraica, aparecen como problema las relaciones espacio-geometría y geometría-percepción...

Es el trasfondo geométrico el que conduce a un nuevo tipo de rigor, alejado de lo meramente formal, en el Cálculo infinitesimal, en el Análisis. Con abandono de un formalismo apoyado en los desarrollos en serie de las funciones y que expresaban, claramente, las condiciones de linealidad de los procesos de derivación e integración. Linealización que podía oscurecerse cuando se pasaba al manejo de desarrollos trigonométricos como los elaborados por Fourier, por ejemplo.

El trasfondo geométrico conduce a Cauchy, en 1821, a desterrar el álgebra formal de los principios del cálculo, ya que las razones extraídas de la generalidad del álgebra como hacía Lagrange, por ejemplo, las considera puramente formales —hoy se diría «sintácticas»—. Para Cauchy, su empleo sugiere que las fórmulas algebraicas poseen una generalidad ilimitada, una extensión indefinida cuando, de hecho, la mayoría de esas fórmulas sólo son válidas bajo ciertas condiciones y para ciertos valores de las cantidades que contienen. Limitaciones y condiciones que sólo un elemento de contenido conceptual puede establecer. Contenido conceptual que, para Cauchy, únicamente puede proceder de los elementos geométricos. Elementos geométricos a los que agregar, desde la perspectiva actual, elementos topológicos pero que, aun interviniendo de manera implícita ligados a lo geométrico, no se pondrán de manifiesto hasta este siglo.

Cauchy, limitado a los elementos geométricos, afirmará que son los que, por un lado, dan el rigor exigido al cálculo al modo geométrico clásico euclídeo; por otro, permiten establecer las propiedades —desde la perspectiva actual, heurísticas— que poseen las funciones y que son las requeridas en el proceso demostrativo. Así, afirmará:

> Una propiedad importante de las funciones continuas de una sola variable es la de poder servir para representar en geometría a las ordenadas de líneas continuas rectas o curvas. [Cauchy, 1994, p. 98.]

Gracias a esta «propiedad importante» puede realizarse la demostración de teoremas como el del valor intermedio: basta hacer «ver» que la curva representativa de la función continua $y=f(x)$ cruzará una o varias veces a la recta que tiene por ecuación $y=b$, con b el valor intermedio de f en el intervalo de definición; inmediato, formular analíticamente lo que se ve... Gracias a esta «propiedad importante» Cauchy hace «ver» que una sucesión creciente acotada posee un límite, o que las sucesiones hoy llamadas de Cauchy —y que desempeñaran un papel esencial en Cantor— son convergentes... Lo cual no impide que Cauchy demuestre un teorema como el citado

> por un medio directo y puramente analítico, que tiene la ventaja de dar la solución numérica de la ecuación $f(x)=b$. [p. 99.]

El trasfondo de pensamiento geométrico no sólo se manifiesta en la creación matemática o en el intento de rigorización llevado a cabo por Cauchy en el Análisis. Es un trasfondo constitutivo del Hacer figural —junto al manejo del ideograma como elemento puramente independiente y formal—. Y ello se manifiesta en el obligado manejo de la representación geométrica de los problemas concretos a los que se dedica el matemático. Problemas que surgen, en la mayor parte de las ocasiones, de los terrenos de la física. Incluso Fourier, cuando establece su Teoría analítica del calor, comienza por una representación geométrica del problema, donde un rectángulo posee una línea que será la representativa del infinito... Representación geométrica que propicia, claramente, un razonamiento por analogía.

Junto a este elemento constitutivo del Hacer figural, el pensamiento geométrico va a ser una de las claves de la plasmación del nuevo modo de Hacer matemático, el Hacer global, al provocar la aparición de nuevos instrumentos conceptuales.

Me voy a limitar a enumerar alguno de los elementos básicos que aporta la Geometría y en concreto la Proyectiva al Hacer matemático, y ello porque, en general, se ha discutido mucho más el papel de las Geometrías métricas no-euclídeas.

Papel importante, sin duda, el de las geometrías no-euclídeas. Pero cobran ese papel, esa importancia, cuando los métodos proyectivos y la Geometría diferencial son asimilados por la comunidad matemática. Si las primeras publicaciones de Lobatchevski, de Bolyai, se hacen en los entornos de los años veinte, el reconocimiento de las geometrías no-euclídeas sólo se logra desde 1868 con la publicación póstuma de uno de los trabajos de Riemann, la edición de la correspondencia de Gauss que provoca la atención sobre Lobatchevski y, sobre todo, cuando ese año Beltrami construye un modelo de esas geometrías. Es reconocimiento que, de modo inmediato, las subordina al plano proyectivo siguiendo una sugerencia de Cayley que Klein plantea como Programa en 1872.

Es el momento, entornos de 1870, en el cual se inicia una problemática muy rica, y hasta entonces inexistente, en cuanto a lo geométrico. Así, se plantean las relaciones entre las distintas geometrías y las investigaciones fundacionales en el sentido de organización de las teorías geométricas; se inicia la aplicación del método axiomático a las «nuevas» geometrías y se intenta poner de relieve el papel hipotético-deductivo que tienen; se pregunta por el origen de los conceptos geométricos en el sujeto cognoscente y por las condiciones que debe cumplir el espacio; por las estructuras algebraicas en las cuales pueden reflejarse esas condiciones enfocadas globalmente o por las estructuras locales infinitesimales de las mismas... Problemáticas subordinadas siempre a la consideración originada en Gauss de que cualquier geometría es una rama de las ciencias naturales.

1. Geometría Proyectiva

En Geometría Proyectiva la noción métrica desaparece como elemento conceptual básico. Una Geometría que, por ello, y de raíz, puede considerarse como una geometría no-euclídea. No se parte de la medida, de la noción de métrica, por lo que junto al contar y medir hay que incluir en la razón constructiva matemática algún otro elemento tan básico como los anteriores, irreducible en principio a los mismos. Y ello en un terreno que se había considerado como propiciado por un *datum* espacial perceptivo.

Incluso un filófoso como Kant había elevado la métrica y, con ella, la geometría métrica euclídea, al estatuto de forma *a priori* de la sensibilidad del sujeto cognoscente, por lo cual todo lo que se dé en la sensibilidad se tiene que dar en el espacio y captar en el mismo y, por su construcción, esa captación no tiene más remedio que ser métrico euclídea.

Ahora aparece una Geometría de situación, proyectiva, no ligada, como en el Renacimiento, al Arte pictórico sino al arte o Hacer matemático, y que no cumple las exigencias kantianas ni las euclídeas.

Las propiedades de esta nueva Geometría, el objeto de estudio de la misma, son las propiedades proyectivas: las que quedan invariantes tras realizar las transformaciones de proyectar y cortar. En esta Geometría las propiedades no vienen dadas a partir de unos objetos, sino que se caracterizan mediante el manejo de la proyección y sección, de aquello que permanece invariante al proyectar y cortar esos objetos. Operaciones que, de realizarse seguidas, dan paso a lo que se denomina una perspectividad.

Lo básico, ahora, es la noción de transformación o paso de una figura F a otra F'. Transformación biunívoca o proyectividad, por la cual aparecen propiedades no métricas, propiedades intrínsecas a lo proyectivo. Herramienta clave la noción de función o transformación que condiciona como noción subordinada la de invariancia respecto a la misma, al igual que la noción de potencia entre dos figuras.

El manejo de la transformación proyectiva como clave, de las proyectividades, implica la aparición de, al menos, tres principios conceptuales que considero fundamentales para el hacer geométrico proyectivo. Junto a ellos, otra serie de elementos que se manifiestan esenciales tanto para el interior de la praxis geométrica, como para el resto del Hacer matemático y, en particular, para alcanzar una nueva concepción de Hacer matemático.

A) *Principios conceptuales*

a) En primer lugar, puede considerarse el llamado *principio de dualidad*: la formulación lingüística de las relaciones y propiedades, de los problemas geométricos proyectivos puede hacerse a dos columnas sin más que tener presente una relación o correspondencia más profunda, la existente entre puntos y planos, rectas y rectas, proyectar y cortar... Gracias a la existencia de la dualidad se puede pasar de una figura considerada como compuesta de puntos, rectas y planos, a una figura compuesta de planos, rectas y puntos...

Con lo cual —y en el plano proyectivo, por ejemplo— todo teorema relativo a una figura plana da origen a otro relativo a otra figura plana, la correlativa o dual, que se obtiene sustituyendo los puntos y rectas por rectas y puntos, los elementos incidentes por sus duales incidentes...

Corresponde a Gergonne establecer este principio de manera nítida en sus trabajos de 1824, 1826 y 1827. No entro en las polémicas de prioridad que mantuvo con Poncelet, auténtico sistematizador y organizador de la Geometría Proyectiva o de situación. Los trabajos de Gergonne se desarrollan bajo la idea explícita siguiente:

> un caractère estrêmement frappant de cette partie de la géométrie qui ne dépend aucunement des relations métriques entre las partes des figures; c'est qu'à l'exception de quelques théorèmes symétriques d'eux-mêmes, tels, par exemple, que le théorème d'Euler sur les poyèdres, et son analogue sur les polygones, tous les théorèmes y sont doubles; c'est-à-dire que, dans la géometrie plane, à chaque théorème il en répond nécessairement un autre que s'en déduit en y échangeant simplement entre eux les deux mots points et droits; tandis que, dans la géométrie de l'espace, ce sont le mots points et planes qu'il faut échanger entre eux pour passer d'un théorème à son correlatif. [Gergonne, 1826, p. 120.]

E inmediatamente agrega:

> cette sorte de dualité des théorèmes qui constituent la géométrie de situation.

Principio que le permite escribir a dos columnas, y desde 1824, sus ensayos geométricos. Así establecerá que «En todo poliedro, las caras de un número impar de lados están siempre en número par» y su dual «En todo poliedro, los vértices de un número impar de aristas están siempre en número par».

Es en 1847 cuando Gergonne explicita el principio de dualidad y lo considera como una «verdad absoluta», esencial para la elaboración de un nuevo enfoque de lo geométrico, independiente de la noción euclídea de métrica o medida y, por ello, más general que lo geométrico euclídeo. Formulación, todavía, en dos principios, uno para el plano y otro para el espacio. Sus palabras:

> 1.° En géométrie plane, lorsqu'un théorème indépendant de toutes relations métriques d'angles et de longeurs se trouve démontré, on peut conclure immédiatement, et sans qu'il soit besoin de démontration, un autre théorème, dans lequel les points du premier seront remplacés par des droites et les droites par des points. 2.° En géométrie à trois dimensions, lorsqu'un théorème indèpendant des toutes relations métriques d'angles et des longeurs se trouve démontré, on peut en conclure immédiatement, et sans qu'il soit besoin de démontration, un autre théorème, dans lequel les points du premier seront remplacés par des plans et les plans par des points, les droites restant en même nombre dans les deux théorèmes. [Gergonne, 1847.]

Ejemplo de esta ley de dualidad o de correlación, enuncio los teoremas de Pascal y Brianchon, admitiendo que se llama hexágono inscrito en una cónica a un conjunto de seis puntos de la misma dados en cierto orden; los puntos se llaman vértices y las líneas que unen vértices consecutivos, rectas —por lo cual hay 6!/2.6 hexágonos inscritos para los cuales vale el teorema de Pascal—:

> En todo hexágono inscrito en una cónica los pares de lados opuestos se cortan en tres puntos alineados —la recta de Pascal—.

> En todo hexágono circunscrito a una cónica, los pares de vértices opuestos determinan tres rectas concurrentes —el punto de Brianchon—.

Ley de dualidad o correlación, que no de analogía, permite sugerir que hay subyacente unas propiedades estructurales independientes de la naturaleza de los elementos componentes. Propiedades estructurales dadas por la existencia de aplicaciones en principio proyectivas. Permite sugerir la existencia de lo que podrá denominarse «diccionario», y relacionar campos diversos en cuanto a la naturaleza ontológica de sus miembros, que va a quedar en muy segundo plano frente a la existencia de las relaciones que los ligan. Y que elementos como «recta» puedan interpretarse como «circunferencia»; o la cónica del infinito, la cónica absoluta, pueda estimarse como una línea recta...

Es sugerencia que se plasma en el enlace entre el plano proyectivo y las funciones θ-fushianas en una de las creaciones de Poincaré. Sugerencia que conduce a Poincaré a establecer como modelo proyectivo de la geometría hiperbólica el que adopta como cónica del absoluto una recta, y como plano uno de los semiplanos determinados por dicha recta; o el modelo donde la cónica del absoluto es una circunferencia y las rectas son las semicircunferencias ortogonales a la cónica del absoluto, al infinito. Modelo este último plasmado en los dibujos de Escher.

Aceptar el principio de dualidad como «verdad de razón» supone un enfoque radicalmente nuevo de lo que considerar pensamiento geométrico y disciplina matemática. Ahora se establece un campo con una determinada estructura y no se parte de unas figuras en un campo previamente dado, como ocurría en el caso euclídeo.

Por otro lado, es un principio que posibilita la obtención de muchos teoremas sin tener que realizar la demostración de todos y cada uno de ellos. Bien entendido que lo que menos importa es la multitud de dichos teoremas, sino que aparece como mucho más importante, y en palabras del propio Gergonne:

> la manière dont ces propositions sont liées et enchaînées les unes aux autres. [Gergonne 1827, p. 215.]

Y se acaba de plantear el papel deductivo, aunque no estrictamente axiomático, en el cual esas proposiciones pueden enlazarse y encadenarse...

b) En segundo lugar, conviene destacar otro aspecto en la creación de la Geometría de situación o geometría proyectiva como disciplina autónoma con sus repercusiones conceptuales sobre el resto del Hacer matemático. Desde el nuevo tipo de pensamiento que hace surgir, el matemático pasa a manejar colectividades o agregados de figuras que, desde el punto de vista métrico, son entidades diferentes, pero que pertenecen a la misma colectividad o agregado desde el punto de vista proyectivo. Así, las cónicas constituyen una colección o agregado de elementos que puede estudiarse en sí, sin atender a las propiedades particulares de cada una de las cónicas.

Cónicas como circunferencia, elipse, parábola, hipérbola..., pasan a ser indistinguibles desde el punto de vista proyectivo. Cónicas que vienen dadas por la misma ecuación homogénea, por ejemplo, si se pasa a un enfoque analítico y no sintético. Y se plantea como problema el estudio de esta colectividad, sus propiedades, sus posibles clasificaciones. Con la cuestión de que, al hacerlo, aparecen como cónicas elementos impensables desde el punto de vista métrico: las isotropas, la recta doble...

Y si menciono las cónicas, ocurre lo mismo con las cuádricas y el problema de su caracterización, su clasificación..., o la de los haces de cónicas o los de cuádricas, sus tipos...

Quiero indicar que, con ello, si lo que se maneja en un primer momento son objetos concretos, figurales —*la* circunferencia, *la* elipse, *el* poliedro regular...—, se pasa a manejar, de modo inmediato, clases de objetos; cada clase convertida en un nuevo objeto, objeto de segundo nivel, al que pertenecen como elemento singular cada uno de los objetos de primer nivel, como los mencionados. Y ese manejo se hace fundamentalmente a través de la noción de transformación o correspondencia, de función. Las demostraciones propias para cada caso particular, para cada situación individual y concreta, se marginan y se convierten en demostraciones de casos generales, abarcadores de esas situaciones concretas.

c) En tercer lugar, un elemento intrínsecamente ligado a los anteriores es el *principio de continuidad* o, en términos más próximos a los originales de Poncelet, «principio de permanencia de las relaciones matemáticas». Es la apoyatura para poder pasar de lo finito a lo infinito sin variación alguna, ya que ambos elementos, finito o infinito, elementos propios e impropios, carecen de papel diferenciador proyectivo alguno.

El principio de continuidad, ligado en cierta manera con el de dualidad, permite justificar la introducción de los llamados *elementos ideales* o impropios en el espacio proyectivo. Elementos ideales que, como los imaginarios o complejos introducidos en álgebra, no suponen una mera adjunción a unos elementos propios o reales, un añadido que se tenga que justificar de alguna manera. Por el contrario, la asunción de los elementos ideales es la que permite transformar los elementos propios o reales de partida y, más fundamentalmente, delimitar y precisar su alcance.

La introducción de elementos ideales o impropios en la Geometría, y con ella en el espacio, supone un hecho conceptual intrínseco al Hacer matemático, y de enorme significación cognitiva: lo que supone es una profundización conceptual en la praxis matemática y, con ella, procura una fecundidad insospechada. No se trata de un simple aumento de conocimiento, sino que, desde esa introducción, se reorganiza el campo de partida, se precisa su alcance, se establecen relaciones hasta ese momento desconocidas, se explicitan unas características que se convierten ahora en básicas del campo de partida, características por las cuales puede, incluso, llegar a caracterizarse ese campo...

La adjunción de elementos como los ideales o impropios supone, básicamente, manejar un método epistemológico original y propio del Hacer matemático que cobra, en lo geométrico, todo su papel operativo. Los elementos ideales o impropios dan coherencia a los teoremas que reflejan propiedades proyectivas, y su introducción permite superar la falta de simetría en algunos elementos propios de lo euclídeo. Así, en el plano euclídeo «dos puntos determinan una recta» es una proposición correcta, pero su dual «dos rectas determinan un punto» no lo es: porque cuando las dos rectas son paralelas no determinan punto alguno. Admitir que dichas rectas poseen un punto común, el punto impropio o punto del infinito como elemento ideal, sortea la ausencia de simetría. Desde esta admisión el plano proyectivo no es más que el plano euclídeo ampliado con los puntos impropios. Además, en Proyectiva se puede, mediante una transformación por inversión, pasar de una cónica en el infinito a un elemento finito, y recíproco.

Así, en términos ahora de razón doble o razón armónica, el punto del infinito en el plano viene determinado o representado por una familia de rectas paralelas, lo que se traduce en lenguaje verbal indicando que dos rectas paralelas se cortan en un punto, el punto del infinito. En la razón doble $[ABCP] = CA/CB:PA/PB$, cuando $P \rightarrow \infty$, entonces $PA=PB$, por lo cual dicha razón doble quedará como $[ABC\infty]=CA/CB$.

Por otro lado, la introducción de elementos impropios explicita nítidamente que la propiedad de infinitud es una propiedad métrica y, por ello, se explicita que no es proyectiva en principio. Con lo cual se pasa a diferenciar lo que desde siempre permanecían como nociones idénticas: la infinitud y la ilimitación. Diferenciación a la que se sumará la procedente desde la Geometría diferencial, y especialmente desde Riemann, y que permitirá que algunas antinomias filosóficas de la razón sobre el infinito puedan quedar como mera palabrería por no haber sabido captar y aceptar esta distinción.

Infinitud como concepto métrico, ilimitación como concepto topológico. En algunas superficies —por ejemplo, el plano— ambos conceptos pueden ir simultáneos, pero no en otras —como en la superficie esférica que es ilimitada, pero finita...—.

Hay que tener presente que la ley de dualidad o correlación es independiente a que los elementos que se manejen sean propios o impropios. Y también que el principio de continuidad, aun ligado explícitamente a la Geometría Proyectiva, venía utilizándose de manera implícita en todos los campos del Hacer matemático, en particular en el cálculo algebraico formal. Así, tanto Euler como Lagrange habían establecido que algunas funciones podían representarse como suma de términos trigonométricos, como series de funciones trigonométricas. Como las funciones seno y coseno, además de periódicas, son continuas, por el principio de continuidad la suma de la serie que las contuviera también tiene que ser continua... Un razonamiento, evidentemente, apoyado en la analogía de lo finito y lo infinito.

Método epistemológico de ampliación y correspondiente replanteamiento estructurador de todo lo construido, lo va a manejar poco después Kummer, en paso equivalente al de Poncelet, en el tratamiento de la teoría de números adjuntando a los naturales los números ideales. Números que posibilitarán la ulterior delimitación de una propiedad considerada esencial en la divisibilidad de los naturales: la de factorización única. Al ampliar el campo numérico, esta propiedad no tiene por qué mantenerse y se pasa a «números» que pueden descomponerse factorialmente de manera no única y a indicar, por ello, que la factorización única es propiedad básica de sólo ciertos campos numéricos, los denominados, desde ahora, euclídeos.

Método de adjunción de elementos ideales al que acudirá Hilbert, ya en 1926, para justificar desde lo finito la adjunción del infinito, considerado como ente puramente ideal, recordando el proceso iniciado en la Proyectiva.

B) *Otros elementos*

Junto a los principios conceptuales anteriores, esenciales, debo destacar otros puntos que también se me muestran fundamentales y que derivan del trasfondo de pensamiento geométrico y, con él y en parte, de la Geometría Proyectiva.

a) Espacio=Geometría=Grupo

Por lo pronto, a través del estudio de la Proyectiva, se llega a un punto en el que se produce una unificación de las diferentes geometrías. La Proyectiva hace que se tome como elemento caracterizador de las distintas geometrías precisamente a los elementos invariantes que dejen las transformaciones de base.

En paralelo a lo proyectivo, la geometría métrica euclídea, en lugar de estudiarse desde el plano axiomático deductivo, o desde el de resolución de problemas geométricos o desde un enfoque trigonométrico, va a caer bajo el mismo método de estudio que la Proyectiva. Ahora la métrica euclídea se puede considerar como la disciplina que estudia no ya un espacio determinado, sino las transformaciones que dejan invariante el concepto de medida, de métrica.

Así, transformaciones como giros, traslaciones, semejanzas, homotecias..., pasan a primer plano en el estudio geométrico euclídeo y se convierten en el objeto de estudio del mismo.

Pero, con ello, pueden englobarse todas las geometrías no ya en función de las propiedades de los objetos que en ellas se manejan, sino en función de las propiedades que permanezcan invariantes bajo unas transformaciones. De un enfoque ontológico con metodología axiomática se pasa a un enfoque básicamente epistemológico y metodológico radicalmente diferente a través del método de transformación utilizado y las invariancias resultantes. Las geometrías dependen del tipo de transformación que deja invariantes unas u otras propiedades: proyectivas, afines, métricas...

Y, si la geometría es el estudio de las propiedades de un espacio, resulta que van a surgir tantos espacios como geometrías se tengan y, a la vez, esos espacios van a ser caracterizados por las relaciones de invariancia que en ellos se produzcan por unas transformaciones dadas.

Con ello se limita, a la vez, la arbitrariedad posible que el método axiomático euclídeo contiene de manera implícita: sólo hay determinadas geometrías y, con ellas, sólo unos espacios. En el método axiomático no se podrán elegir como axiomas los que apetezcan a cada matemático, sino únicamente aquellos que permitan caracterizar cada uno de los espacios, de las geometrías posibles. Y el problema se centra, entonces, en determinar qué tipo de características básicas son las que hay que «reconocer» en el espacio que nos rodea.

Es desde el concepto y manejo de la transformación o función biunívoca, biyectiva, desde la que se alcanza una posible unificación atendiendo a los tipos de propiedades invariantes que tales transformaciones dejan. Y, a la vez, se puede plantear la problemática de las relaciones existentes entre las distintas geometrías.

Es el punto en el que interviene otro elemento. En 1870 Jordan publica una obra clave, su *Traité des substitutions et des équations algébriques.* Aparentemente ligada al álgebra de modo exclusivo por apoyar y desarrollar la teoría de Galois, se estudia en ella el grupo de sustituciones o grupo de transformaciones, grupo en el que sus elementos son las permutaciones de *n* objetos. Grupos finitos, por supuesto, y como demuestra Cayley, a ellos se reducen todos los grupos finitos. Pero la obra de Jordan es algo más que álgebra: va ligada a la cristalografía y, con ella, a determinar las invariancias de unos cuerpos bajo unas transformaciones. Es, por ello, una obra también de geometría.

En esta línea, inmediato, Klein estudia el grupo de movimientos de un poliedro regular sobre sí mismo que lo deja invariante. Da paso a los grupos poliédricos. Grupos finitos, discretos. Si los grupos manejados son finitos, discretos, afectan realmente al espacio considerado globalmente.

Por su lado, uno de los grandes logros de Sophus Lie es construir, en el terreno local, los grupos continuos de transformaciones que se le muestran claves para la teoría de ecuaciones diferenciales. Transformaciones que han de ser diferenciables y dan paso a los grupos localmente simples, de los cuales Lie determina cuatro.

Hasta aquí se sigue con elementos objetuales geométricos, en un Hacer figural en el que se admite el objeto en un espacio previamente dado. Pero se está dando un paso importante, se está considerando a las geometrías como las que caracterizan, precisamente, a ese espacio. Se está pasando a considerar las transformaciones del espacio en sí mismo —tanto global como localmente— y se observa que esas transformaciones forman grupo cuando se las considera como objetos que pueden combinarse entre sí. En el plano métrico euclídeo las traslaciones constituyen un grupo; los giros, otro; las transformaciones infinitesimales locales forman los grupos semisimples de Lie... Ahora bien, ello obliga a tomar las transformaciones como constituyendo colecciones o conjuntos, conjuntos en cuyo interior se establece una ley de composición interna, una operación entre las transformaciones consideradas, operación que ha de seguir determinadas propiedades: básicamente, la de asociatividad.

Si hacia 1872 Cayley afirmará que toda la Geometría es proyectiva, Klein, en el *Programa Erlangen* de 1872, y siguiendo a Cayley, intentará establecer una jerarquía geométrica —y, con ella, una jerarquía de espacios— a partir de los principios proyectivos que caracterizan de modo implícito las propiedades proyectivas. Al ir agregando nuevos principios, se harán aparecer las restantes geometrías, como la afín, las métricas... con sus espacios asociados. La invariancia que esos principios muestran se traduce a lenguaje algebraico, con lo cual no reflejan otra cosa que el hecho de que cada geometría y cada espacio posee subyacente una estructura algebraica, la de grupo.

De modo inmediato, puede generalizarse de manera que las geometrías se ligarán a la noción algebraica en el sentido de poder ser caracterizadas por el grupo correspondiente. Enfoque algebraico por el cual las geometrías no dependen, para nada, de una caracterización axiomática, como se pretendía desde los tiempos de Euclides.

Además, y siguiendo el trabajo de Lie, Killing se hace una pregunta que puede esquematizarse en las palabras: ¿qué tipos de geometrías métricas son concebibles en las cuales los cuerpos puedan moverse libremente? La pregunta, realmente, no es por el tipo de geometría, sino por el tipo de espacio en el cual puede incluirse una métrica y en el que se admita la existencia de cuerpos rígidos, y por tanto medibles, que se muevan libremente. Espacio y geometría, identificados. Más aún, los movimientos libres deben formar, obligatoriamente, un grupo de Lie: Espacio, Geometría, Grupo, unidos indisolublemente.

Manteniendo la pregunta de Killing, es claro que la geometría métrica euclídea es un caso particular de este tipo de geometría, de espacio en el que puede concebirse el movimiento libre de cuerpos rígidos: lo había demostrado Helmholtz. Pero hay otros grupos posibles y, por tanto, son concebibles otras geometrías. Se puede ir, por ello, más adelante: ¿hay otros espacios concebibles? Y Killing agrega a los cuatro grupos localmente simples de Lie otras cinco estructuras posibles. Todos ellos integrables, pero Killing adelanta que todo grupo no-integrable de Lie está localmente compuesto de un subgrupo integrable y otro subgrupo que es producto directo de grupos simples de Lie. Es tema al que se sumarán, posteriormente, Elie Cartan, Weyl...

Si Sophus Lie se centra en el estudio de las transformaciones infinitesimales de grupos que darán paso a las Álgebras de Lie —hoy instrumento básico en disciplinas como la Mecánica cuántica— en función de la teoría de ecuaciones diferenciales, Killing lo hace en función de clarificar la noción de espacio y, con ella, la de intentar determinar cuántos espacios pueden concebirse. Posiciones que suponen un cambio conceptual respecto al hacer anterior y a las concepciones que del espacio podían mantenerse.

Es un cambio conceptual que lleva a Poincaré —frente a Hilbert y los fundacionalistas geométricos, frente a los físicos del primer tercio de este siglo— a considerar que la noción de grupo es un juicio sintético *a priori*, es decir, una noción previa a la experiencia, que posibilita su aplicación a la fisis, al espacio, en el sentido de que las consideradas leyes de la naturaleza no hacen más que reflejar una invariancia subyacente. Desde esta concepción los grandes principios físicos como los de conservación —energía, momentos inerciales, masa...— no harán más que reflejar invariancias. Y esas invariancias tienen como expresión la estructura de grupo. Es concepción que conduce a Poincaré a modificar las fórmulas de Lorentz de manera que constituyan, precisamente, grupo, el hoy llamado grupo de Lorentz de la teoría de la relatividad. El hacer matemático encuentra, así, terreno propio para ser considerado, nuevamente, como hacer constitutivo y regulativo del hacer físico.

b) La noción de modelo

Desde los trabajos de Beltrami, la geometría proyectiva dota al hacer matemático de un concepto que se mostrará esencial: el concepto de modelo. Beltrami, en su ensayo de 1868, y en línea con Helmholtz, observa que para definir una geometría sobre una superficie se requiere la libre movilidad de las figuras sobre dicha superficie, movilidad que conduce a establecer congruencias entre las figuras. Y para que se dé esa libre movilidad la curvatura de la superficie —noción que surge de la geometría diferencial iniciada por Monge y establecida por Gauss— ha de ser constante.

Estudiando una superficie de curvatura constante negativa en el interior de un disco, Beltrami obtiene que las líneas rectas aparecen como cuerdas en el sentido euclídeo del disco, pero poseen longitud infinita interpretadas en el disco no-euclídeo. Con ello, la geometría definida en esta superficie de curvatura negativa aparece como una geometría en la cual por un punto exterior a una recta pasa una infinidad de paralelas a la recta dada. Constituye, por ello, un modelo de la geometría no-euclídea de Lobatchevsky. Modelo convertido en 1871 por Klein en el modelo proyectivo de dicha geometría, en el sentido de que el borde del disco es la cónica del absoluto o lugar geométrico de los puntos ideales o impropios del plano proyectivo.

Claramente la construcción de Beltrami muestra, en primer lugar, la independencia del postulado quinto respecto a los restantes postulados euclídeos: con lo cual inaugura el método de demostrar la independencia de cada uno de los axiomas respecto a los restantes trabajando en un modelo en el cual se verifican todos los axiomas salvo aquel que es independiente de los demás —y ello con independencia de que, realmente, Beltrami lo observara o no, ya que parece corresponder a Bonola ponerlo de relieve—.

En segundo lugar, y como señala Gray (Gray, 1987), Beltrami tuvo la fortuna de establecer el modelo de la geometría no-euclídea sobre un disco y no en el espacio como había intentado Lobatchevski, entre otros, por lo que la aplicación correspondiente carecía de singularidades que hacían un tanto anómala la adopción de la pseudoesfera y de las superficies de curvatura negativa en general. Éstas poseen, en principio, una curva de puntos singulares. Con su elección, Beltrami eliminaba cualquier objeción para considerar el modelo construido como candidato a reflejar el espacio físico, candidato del mismo nivel que el plano euclídeo.

En tercer lugar, el método establecido por Beltrami permite la elaboración de modelos proyectivos tanto de la geometría métrica euclídea como de las geometrías métricas no-euclídeas. Con la consecuencia de que si uno de ellos es inconsistente, lo serán los demás. En otras palabras, la construcción de Beltrami supone establecer la demostración de consistencia relativa bajo el método de comparar diferentes geometrías entre sí. Método de consistencia relativa que se adoptará en el Hacer matemático no sólo entre construcciones geométricas, sino en los intentos reduccionistas de la propia geometría bien al Análisis, bien al Álgebra.

c) Niveles objetuales

En todos los casos —comparación de geometrías y existencia de diferentes tipos de espacio, cuestión de consistencia relativa, jerarquización de geometrías y espacios—, se tiene un auténtico salto conceptual. Se trata, ahora, de comparar y clasificar no ya series y haces correlativos, colectividades de cónicas, cuádricas o cuárticas, sino teorías completas; teorías enfocadas como si fueran objeto único, singular. Es toda la geometría métrica euclídea la que se compara con la hiperbólica, es toda la geometría métrica euclídea la que se engloba bajo la Geometría Proyectiva. Se convierten estas globalidades en objetos concretos.

Ello implica el manejo por parte de los matemáticos, de los geómetras, y de manera implícita, de al menos tres niveles objetuales: la figura, la colectividad, la teoría geométrica. Haciendo, a la vez, teoría de cada uno de estos tres niveles objetuales con un mismo instrumento, la transformación o correspondencia biyectiva, es decir, la función. Función entre objetos a distintos niveles conceptuales como transformación pero, a la vez, función como relación entre dichos objetos.

d) Y la falta de precisión...

En Geometría Proyectiva se termina aceptando la inclusión de un posible valor numérico asociado, la razón doble o cuaterna armónica, porque es el único valor numérico que aparece como invariante por proyección y sección. Igualmente se termina aceptando el manejo de coordenadas generales proyectivas, independientes de cualquier noción previa métrica, tras los trabajos de Möbius, Steiner, Von Staudt... en Alemania, de Chasles, Tannery en Francia...

Ello provoca una polémica en torno al papel de lo sintético o figural y lo analítico o algebraico, al papel de la intuición espacial en la construcción matemática, así como el paso a ecuaciones homogéneas, sistemas lineales, matrices, determinantes..., más brevemente, a campos como los que van a constituir la Geometría algebraica. Campos, todos ellos, donde la considerada intuición geométrica queda bastante marginada, aunque se convierta en esencial el manejo del ideograma, del esquema carente de cualquier elemento figurativo referencial de lo que se trabaja. La intuición perceptiva va a ser combatida, precisamente, desde lo geométrico proyectivo, y en su lugar se tiene que afirmar el papel deductivo del Hacer matemático.

Un hacer deductivo que no implica, sin embargo, partir de un conjunto de axiomas, sino de unos elementos de análisis conceptual. En este sentido cabría apuntar aquí cómo los geómetras tratan, en su labor constructora de las geometrías métricas no-euclídeas —e incluyo en ellas la Geometría Proyectiva—, de aclarar la noción de recta, noción que se presenta como auténticamente conflictiva y, sin embargo, clave para la elaboración de cualquier tipo de geometría al menos en su relación con el espacio físico.

De modo más general, se hace notar la falta de precisión de los conceptos geométricos que se utilizan, la falta de un lenguaje adecuado y preciso para cada una de las nuevas nociones que se van introduciendo. Nociones que, en algunos casos, generalizan como casos particulares a las anteriores, pero no en otros, como hará notar Gergonne especialmente en 1827 y posteriormente, en 1873, Klein. Más radical, Klein señala la imprecisión inherente a nociones como línea física, línea atribuida a la fisis, a lo empírico.

Pero no basta afirmar dicha ausencia de precisión: explicitada obliga, evidentemente, a buscarla tanto en las definiciones como en las posibles deducciones, incluso en el terreno considerado ejemplar para las restantes disciplinas, en el método euclídeo.

Y esa búsqueda de precisiones, desde un enfoque calificable de fundacional, da paso a dos grandes líneas: por un lado, la escuela italiana, en la cual Peano intentará en 1889 establecer una organización deductiva sistemática de la Geometría Proyectiva en forma axiomática y lenguaje pasigráfico. Las ideas geométricas, para la escuela italiana, derivan no de unos primeros principios formales o lógicos, sino de la experiencia empírica, por lo cual conviene precisar y aclarar esas ideas, comprender más profundamente las distintas teorías geométricas.

Por otro lado, la escuela alemana se centra en la búsqueda de unos fundamentos y, a partir de los mismos, establecer deductivamente la praxis geométrica. Fundamentos o axiomas que tienen su origen en la experiencia empírica, ciertamente, pero que una vez formulados hay que marginar dicha experiencia de manera radical y manejar por modo exclusivo el método deductivo.

e) Pasch y la Geometría «moderna»

Esta última línea culmina con los trabajos de Pasch. En 1882 editará las lecciones que venía impartiendo desde 1873-1874 con el título *Vorlesungen über neuere Geometrie,* cuya finalidad central era

> organizar completamente la Geometría como exige la naturaleza de la Matemática, y al mismo tiempo hacer resaltar el origen empírico de los conceptos y nociones geométricos. [Pasch, 1882; ed. espa., 1913, pp. IX-X.]

En esta obra, y frente a la tendencia analítica, Pasch trata de realizar un desarrollo «puro», sintético, al estilo euclídeo y sin manejar métodos analíticos o algebraicos por los cuales se reducen los problemas geométricos a operaciones numéricas. Método analítico o algebraico que, para Pasch, olvida el carácter constructivo, intrínseco a lo geométrico.

Desde lo sintético puro la Geometría «moderna», como la califica Pasch, permite mantener su carácter constructivo, pero con una generalidad que consigue englobar en una demostración única las distinciones con sus demostraciones correspondientes que se mantenían en la geometría elemental. Pasch adopta el enfoque originario de la Geometría Proyectiva. Geometría para la cual dará una reconstrucción axiomática, *culmen* de todos los trabajos anteriores.

Con una consideración que procede de Gauss —y que he citado como una de las finalidades en la obra de Pasch— y aceptada por todos los matemáticos en general como ya he mencionado: la Geometría es una ciencia natural, como la Mecánica racional. Los primeros principios o axiomas que se adopten para desarrollar la teoría correspondiente a esta Ciencia natural manifiestan las intuiciones que el matemático tiene de esa naturaleza y, en concreto, del espacio. La Geometría posee un contenido de pensamiento obtenido del espacio por intuición experiencial, básicamente perceptiva.

Como problema se plantea qué tipo de geometría es la propia del espacio que nos rodea y se llega a la afirmación de que sólo la experiencia puede determinar esa geometría. Una experiencia que se enlaza con el sujeto cognoscente y se hace problema el cómo se llega a la construcción de una u otra geometría según qué propiedades se adopten como primarias o no en esa naturaleza. Es una de las grandes aportaciones de Hemlholtz, por ejemplo. Se enlaza con uno de los enfoques que indiqué como propios de qué entender por «fundamento», no apoyado en unos primeros principios, sean o no lógicos, sino apoyado en el sujeto cognoscente y su relación experiencial y práctica con la naturaleza —relación que no se limita a lo puramente perceptivo, sino que también es conceptual—.

Como explicitará Pasch, establecidos los axiomas a partir de lo experiencial, se van demostrando a partir de los mismos las propiedades de ese espacio, la teoría geométrica, sin tener que volver o acudir a la experiencia intuitiva. Una comprensión profunda de los primeros principios permitirá la elaboración adecuada de la teoría. Y esa comprensión hay que realizarla a partir de un análisis profundo de los axiomas, que reflejan lo que considerar propiedades básicas de nuestra experiencia, tanto empírica como conceptual, de lo espacial.

Insisto, realizada esa comprensión de los primeros principios, verdaderos por adecuados o correspondientes a la naturaleza, al espacio físico, los teoremas han de ser obtenidos por la sola demostración, por la deducción sin llamadas a intuición o representación perceptiva alguna.

Es una modificación del método axiomático de Euclides, donde los teoremas se demuestran apoyándose en la concreción singular del objeto. El método axiomático euclídeo es un método matemático esencialmente Figural y, ahora, ese método se convierte en inservible porque la figura deja de ser la representación especular del objeto y se hace mero diagrama constructivo —con su papel tanto heurístico como constitutivo del pensamiento matemático—, aunque sigan manejándose los mismos términos: se siga escribiendo y hablando de método axiomático.

2. Un resumen

Si me he detenido en el trasfondo geométrico es porque, desde él, se tienen algunos elementos conceptuales básicos del hacer que transforma la Matemática en el siglo XIX y, con ella, el origen de algunos temas del pensamiento filosófico, del pensamiento en general: papel de la transformación biyectiva o función, niveles objetuales, consistencia relativa o por modelo; principio de correlación o dualidad; invariancia como elemento esencial de las transformaciones geométricas y paso a la noción subyacente de grupo; introducción de elementos ideales, imaginarios o del infinito, con lo que se procura una coherencia y profundización a la teoría geométrica; diferentes tipos de espacio; rechazo de teorías como las kantianas en cuanto a la constitución del sujeto epistémico y papel de lo experiencial para decidir qué tipo de geometría es la que corresponde al espacio, a la fisis; rechazo de la intuición sensorial; problemática de cómo se accede al conocimiento de la fisis y de la noción de «verdad» como correspondencia con los hechos...

Creo que son elementos suficientes para ver el papel que tiene el trasfondo geométrico para el hacer matemático intrínseco, para otros aspectos del pensamiento. No sólo se tiene el factor aritmético-analítico a lo largo del siglo XIX como se plantea en los reduccionismos fundamentalistas.

Y prácticamente todos los matemáticos que van a intervenir en la discusión de los fundamentos parten de las teorías axiomáticas geométricas, o de la teoría de invariancia dada por el grupo de transformaciones subyacentes: desde Hilbert a Peano, desde Russell a Poincaré, con la afirmación de que otros más aparentemente analíticos, como Dedekind, han trabajado las geometrías y, en particular, la proyectiva en profundidad. Con la aceptación, en todos, de que la Geometría es una ciencia natural y, desde Riemann, será la experiencia la que, en última instancia, determine qué geometría es la propia del espacio, sin olvidar que en la geometría el dato primario es el continuo o magnitud extensa.

II. LO ANALÍTICO

En el terreno del Análisis, el concepto función va a sufrir una inflexión en su concepción y manejo, inflexión en la que, según he indicado, el pensamiento geométrico no puede quedar marginado aunque a veces no aparezca de modo explícito en las discusiones del tema. En Análisis la función venía ligada a la idea de curva, trayectoria sobre el plano o el espacio, que tenía un desarrollo polinómico, lineal, un desarrollo en serie en un enfoque más algebraico y formal. En cualquier caso, ligada a un elemento Figural, concreto.

En el Hacer figural el Análisis iba intrínsecamente unido a la resolución de problemas concretos, aportados, en su mayoría, por la Física. Así, toda la teoría de ecuaciones diferenciales o la de ecuaciones en derivadas parciales con sus métodos de resolución, se establecen por el intento de resolver problemas como el de las cuerdas vibrantes, la conducción del calor...

La función se caracterizaba en algún dominio conocido por otros medios: se tomaban sus argumentos de un intervalo o línea sobre la recta, un recinto plano... Siempre se tenía el previo conocimiento de lo que va a ser el argumento de la función, argumento como objeto numérico —o como figura— dado. Argumento que, en el caso de la transformación geométrica, es una figura que toma como valor otra figura. La apoyatura, clara desde Cauchy, en la heurística geométrica y topológica, aunque esta última de manera implícita.

Desde la inversión conceptual a la que aquí hago referencia, la función se maneja partiendo de agregados o sistemas de entidades. Y se convierte en esencial para dos posibles tipos de acción:

— por un lado, la caracterización del sistema o agregado; es la función, como ley o regla dada de antemano, la que determina un conjunto: el formado por aquellos elementos que la satisfacen;

— por otro, dados unos agregados en los que la función toma sus argumentos, las propiedades de la función van a depender del tipo de agregado que se maneje. Así, una función en cuyo sistema de partida se encuentren los racionales, puede no estar definida en una infinidad de puntos; o puede no ser diferenciable en una infinidad de puntos siendo, sin embargo, continua en todos ellos. La función va a tomar sus argumentos en colecciones de objetos que, en principio, son ciertamente conocidos, pero que condicionan las propiedades de la función: éstas dependen del tipo de conjunto en el que esté definida, en la que tome sus argumentos. Es lo ocurrido en Geometría Proyectiva donde el tipo de transformación —si proyectiva, afín, métrica..., con sus propiedades asociadas, homología, involutiva o no...— depende del terreno en el que se maneje.

En cualquier caso, la noción de función se independiza de la curva o trayectoria de una masa puntual, y su desarrollo formal polinómico asociado, de la representación gráfica en un espacio concreto. Y pasa a tener dos tipos de acción según que se prime como dato primario la función o el conjunto en el que toma sus argumentos.

Si la noción de función cambia radicalmente de significado y se desprende de su enlace Figural, su manejo va a crear una auténtica *crisis* entre los matemáticos, porque aparecen propiedades insospechadas. Crisis interpretada no como grietas en la cimentación de edificio alguno, sino como aparición de un momento difícil, al que hay que prestar atención especial. Surgen curvas que llenan un cuadrado —en lenguaje geométrico— como la de Peano, funciones continuas en todos sus puntos que no son diferenciables en ninguno de ellos, como la función de Dirichlet, de Weiertrass, de Dini, de Volterra, correspondencia entre un cuadrado y uno de sus lados... Funciones teratológicas de las que Hermite, no sin ironía, escribiría a Stieljes:

> Me aparto con horror de esta plaga de funciones no-diferenciables... [...].

Una inversión conceptual de la que muy pronto Dini, en 1877 y 1878, dará un resultado general en el que ya maneja no la función, sino la colección de funciones. El resultado de Dini comprende un conjunto con un número infinito de funciones. Ahora son las funciones las que aparecen como miembros o componentes de un sistema o agregado. Y Dini será el primero en señalar que lo que se tiene no es ya el Cálculo o Análisis Infinitesimal, sino una disciplina nueva a la que dará nombre, aceptado desde entonces: Teoría de funciones —agregando de variable real—.

La noción de función, ligada a la de agregado, multiplicidad, sistema, conjunto..., y en dos niveles: como elemento conceptual para poner en correspondencia dos agregados o para caracterizar un conjunto; como miembro a su vez de un agregado, ahora de funciones.

Ahora bien, si Cayley había gustado de señalar que en la Matemática moderna, la de 1872, las nociones básicas eran las de conjunto y función, estas dos nociones no aparecen nada claras a los ojos de los matemáticos, sobre todo desde la aparición de las funciones teratológicas. No por ello dejan de manejarlas. Y lo mismo puede decirse desde el empleo de las series de funciones, no ya de las series numéricas.

Nociones que, por la crisis que provocan —crisis en el sentido antes indicado—, desde el manejo de las series de funciones, obligan a «clarificar» o transformar la noción del continuo que aparece como base para la caracterización del concepto de función en su nuevo papel. El manejo de la función, ligado ahora a conjunto, obliga a replantear la propia praxis matemática, su propia forma de hacer. Nuevo enfoque al que se suma el originado desde el Álgebra.

Y es en lo que me detendré a continuación, limitado al intervalo que va desde 1870 hasta fin de siglo, cuando Baire, en 1899, escribe, haciendo explícito lo que venía siendo aceptado de manera implícita por Hankel, Heine, Dini, Borel..., resumiendo lo ya obtenido y donde aparece de modo explícito la mención a una nueva teoría, la Teoría de conjuntos, como base y apoyatura para el estudio de la Teoría de funciones:

> *todos los problemas que envuelven funciones se reducen a cuestiones que pertenecen a la teoría de conjuntos*; y en proporción al grado de progreso o de posible progreso de esta última, parece posible resolver un problema dado más o menos completamente. [«Sur les fonctions de variables réelles», *Ann. Math. Pures et Appl.*, ser. 3,3:1-123, p. 121; cursiva mía.]

En esta tesis Baire llega a una clasificación de las funciones reales, a lo que hoy se llaman las clases de Baire: la clase 0 es el conjunto de las funciones continuas reales, y para cada número ordinal numerable α mayor que 0, la clase de Baire α consiste en el conjunto de las funciones f que no pertenecen a las clases anteriores, y se obtienen como límites de sucesiones f_0, f_1, f_2... de funciones de las clases precedentes, es decir, $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ para todo real x.

En este trabajo Baire hace la primera estratificación transfinita después de los trabajos de Cantor y ello en la Teoría de funciones. Además, introduce la noción de categoría demostrando el teorema:

> todo conjunto abierto no-vacío de reales es de segunda categoría.

Trabajo central el de Baire así como el de otros miembros de lo que se considera la Escuela francesa, a la cual pertenecen Borel, con sus conjuntos borelianos, Lebesgue, con la integral que lleva su nombre y la noción de conjunto medible, Fréchet y los espacios métricos... Baire, Borel, Lebesgue, Fréchet, iniciadores de lo que posteriormente se llamará Teoría descriptiva de conjuntos, en los entornos de 1900. Sin olvidar matemáticos italianos como Dini, Volterra...

III. EXTENSIONAL *VERSUS* INTENSIONAL

He venido insistiendo: dos conceptos clave, función-conjunto, manejados por los matemáticos de fines del siglo XIX. Nociones que, sin embargo, no aparecen explícitamente caracterizadas, definidas. Se está realizando una praxis apoyada en unos conceptos-núcleo constitutivos que, realmente, carecen de delimitación nítida.

En esta línea trabaja Cantor, desde la Teoría de funciones y, básicamente, la de serie de funciones. Parece obligado detenerse en él, así como en Dedekind y Weiertrass por sus posiciones frente a Cauchy, al Hacer figural...

Cantor establece, en 1870, el teorema de unicidad para las series trigonométricas:

> Si una serie converge a cero, entonces todos sus coeficientes son cero.

En 1872 da la formulación:

> Para una colección P de números reales, sea P' la colección de sus puntos límites y P^n la colección de los puntos límite obtenidos reiterando n veces esa operación. Si una serie trigonométrica converge a cero excepto sobre una colección P donde P^n es vacío para algún n, entonces todos los coeficientes de la serie son cero.

Si indico el enunciado es porque en él se pueden observar dos hechos:

a) Se parte de una colección, agregado o conjunto tomado colectivamente, en su totalidad.

b) A partir de esa colección, se definen otras colecciones como partes propias suyas. Y estas colecciones vienen caracterizadas o definidas por una operación reiterable: obtener los puntos límite.

Son dos hechos relevantes: el punto de partida, agregados o colecciones, aunque de números reales; dentro de esa colección aparecen otras que se caracterizan por una operación o función: la de obtener sus puntos límite —sus puntos de acumulación en términos más actuales—. En cuanto a la noción de función, aquí se tienen, en dos fases imbricadas, las dos facetas asociadas a la misma.

Y algo más: se parte de colecciones dadas en actos de números reales. Pero el problema es que el continuo, el conjunto de reales, venía siendo admitido como magnitud desde un aspecto intensional. Y desde el enfoque intensional no cabe adoptar esas colecciones en su sentido distributivo o puntual, carecen de sentido las palabras de Cantor.

Para que las palabras de Cantor tengan sentido se hace preciso romper el enfoque intensional y pasar a un enfoque extensional del continuo, un enfoque en el que ese continuo venga dado no como magnitud extensa constituida de partes también extensas, sino como colección compuesta de elementos puntuales. De aquí que Cantor tenga que buscar la caracterización o definición de la colección de los reales extensionalmente.

Es punto en el que interviene el pensamiento geométrico proyectivo. En éste, únicamente si un segmento se deja de considerar como elemento dado intensionalmente en unidad para enfocarlo como constituido de puntos, como lo que se denomina agregado puntual o simplemente puntual, se puede establecer una de las nociones centrales de la Geometría Proyectiva, la de proyectividad. Recuerdo la definición:

> proyectividad entre dos puntuales es toda aplicación biyectiva entre sus puntos que conserve las cuaternas armónicas.

Como clave, el paso de segmento como unidad o bloque a segmento como agregado o conjunto de puntos; como clave, el paso de lo intensional a lo extensional. Y Cantor indicará expresamente que toma de Steiner la noción de potencia entre dos puntuales, la noción de proyectividad; con lo cual indica explícitamente el paso de lo intensional a lo extensional en su concepción del continuo.

Aquí inciden, igualmente, los estudios de Weiertrass, cuando pretende demostrar los teoremas fundamentales del Análisis sin manejar un concepto como el de infinitesimal, y los de Dedekind desde su intento de caracterizar conceptos como los de ideal o cuerpo de números algebraicos.

En el primer caso, Weiertrass pasa a números desde magnitudes. En el caso de magnitudes, si se tiene $|x$ ———————— $|x_0$ se implica que cuando $x_0 \rightarrow x$ entonces ocurre que $|x$ ——— $|x_0$. Y ello parece significar que una variable numérica —en este caso x_0—, deja de ser número y «se acerca» a la primera, a x. O, de modo equivalente, que la longitud del segmento entre las dos variables disminuye.

En el mundo de las magnitudes extensas enfocadas intensionalmente esta concepción es correcta, porque dichas magnitudes, como continuos, siguen siendo continuos como partes de la magnitud continua extensa y, como tales, pueden aumentar o disminuir.

Una concepción que no es correcta en un enfoque extensional, en un mundo en el que los intervalos se consideran como agregados de números considerados distributivamente, porque esos números «son» y no se mueven o varían. En un mundo de agregados de números considerados distributivamente se puede pasar a hablar de desigualdades numéricas, donde ninguna variable disminuya y, siendo, deje de ser... La variable pasa a ser un elemento puntual cualquiera del agregado, no algo que «varía» aumentando o disminuyendo, o se mueve y se acerca o se aleja.

De la noción de magnitud extensa continua, variable en cuanto a sus partes, se tiene que pasar a magnitud extensa distributiva con sus componentes puntuales, donde las variables representan a uno cualquiera de esos elementos o componentes; hay que pasar a números naturales o de cualquier otro tipo. Pero, si son de otro tipo, entonces hay que definirlos.

La caracterización del continuo en su enfoque extensional, de los números reales que lo expresan, se hace así imprescindible desde el interior de la nueva praxis matemática, y no como intento de fundamentar dicha praxis o de obtener el rigor absoluto frente a los razonamientos de Cauchy, entre otros, como se quiere en las historias al uso.

Insisto, el razonamiento en el que una magnitud $[x,x_0]$ se va haciendo cada vez más pequeña cuando $x_0 \rightarrow x$ es perfectamente riguroso desde un enfoque intensional, en el que se considera el continuo como magnitud extensa porque ni x_0 ni x pueden considerarse como entidades en sí, sino como los límites de la magnitud considerada, que es la que auténticamente varía en cuando a su extensión o longitud. Es la magnitud la que puede hacerse más grande o más pequeña sin perder por ello su sentido intensional de continuo, representado, siempre, por un segmento rectilíneo que se hace más pequeño o más grande. Concepción de continuo que ya había expresado nítidamente Leibniz:

> La división del continuo no debe ser considerada como la de arena en granos, sino como la de una hoja de papel o una túnica en pliegues, de tal manera que pueda tener una infinidad de pliegues, unos más pequeños que otros, sin que el cuerpo se disuelva jamás en puntos o mínim. [En Couturat, 1903, p. 615, 24 verso.]

Concepción que se mantiene en Kant y, en el fondo, en el Hacer matemático en los primeros años del siglo XIX, y se refleja en Cauchy e, incluso, en la praxis matemática «elemental» actual, en la expresión lingüística dinámica donde se maneja la expresión «tiende a» con su sentido intensional y no extensional numérico.

En concreto, Cauchy dará como definición de límite la siguiente:

> Cuando los valores sucesivamente atribuidos a la misma variable se aproximan indefinidamente a un valor fijado, difiriendo eventualmente

de él tan poco como se quiera, ese valor fijado será llamado el límite de todos los otros.

De modo inmediato caracterizará el concepto de infinitesimal como una variable «que tiene cero por su límite». Y con estas nociones pasa a definir la noción de continuidad de una función f de una variable x en un intervalo en el que x tome sus valores. La función f ha de cumplir la condición de que asignando a x un incremento infinitesimal α, la función f ha de crecer en la diferencia $f(x+\alpha)-f(x)$. Cumpliendo esta previa condición, dirá que

> la función $f(x)$ será, entre los dos límites asignados a la variable x, una función *continua* de esta variable si, para cada valor de x intermedio entre esos dos límites, el valor numérico de la diferencia $f(x+\alpha)-f(x)$ decrece indefinidamente con el de α. En otras palabras, *la función f(x) permanecerá continua respecto de x entre los límites dados si, entre esos límites, un incremento infinitamente pequeño de la variable produce siempre un incremento infinitamente pequeño de la función.* [*op. cit.*, 90; cursiva en el original.]

Para Cauchy las variables crecen o decrecen de modo continuo, los intervalos tienden hacia cero, los infinitesimales son «variables» que poseen un límite, el cero precisamente. Es un lenguaje dinámico que puede traducirse al lenguaje aritmético estático con sus desigualdades numéricas en valores absolutos, al estilo ϵ-δ, ciertamente. Y es lo que hará Weierstrass. Pero es una traducción que traiciona el trasfondo conceptual geométrico de Cauchy, trasfondo que le conduce a manejar los números reales en función de su representación como magnitudes extensas y, por ello, aparece que las variables tienden a y aparentan ser números que dejan de ser tales números. Lo que se tiene en Cauchy es un enfoque del continuo, de los intervalos reales, intensional y no distributivo extensional, como hará la posible traducción, traicionando el trasfondo conceptual del Análisis Figural.

Desde lo extensional puede distinguirse la continuidad puntual de la continuidad uniforme de una función sin emplear infinitésimos o variables que tienden a cero, entre la convergencia puntual y la convergencia uniforme de una serie infinita de funciones... Distinciones que, una vez realizadas, se acusa a Cauchy de no haberlas tenido en cuenta por haber sido poco riguroso. Poco rigor no, sino dos enfoques diferentes, y donde el empleo de infinitesimales y el lenguaje intensional impide delimitar la continuidad puntual de la uniforme como si fueran aritméticas...

La necesidad no de fundamentar, sino de caracterizar el continuo de modo distributivo, extensional, desde un nuevo modo de hacer matemática, hace que coincidan en el tiempo, 1872, las tres grandes construcciones distributivas o extensionales del continuo: la de Weiertrass de sucesiones de números racionales, la de Cantor a base de las sucesiones fundamentales de números racionales que posteriormente plasmará, más rigurosamente, a partir de la definición por clases de equivalencia de sucesiones fundamentales o de Cauchy; la de Dedekind de cortaduras.

En todos estos procesos se parte del dato previo de una totalidad —ahora de racionales— con infinitos elementos dados en acto para alcanzar una noción más amplia de magnitud numérica que, en principio, y según las palabras de Cantor en 1883,

> no tiene objetividad alguna de antemano, apareciendo sólo como elemento de teoremas que tienen una cierta objetividad. [Jourdain, 28.]

Es este proceso el que cabe admitir como «aritmetización del análisis», en el sentido de caracterizar al continuo de manera extensional distributiva y no intensional como hasta ese momento. El trasfondo geométrico subyacente a toda la praxis matemática hace, sin embargo, que tanto Cantor como Dedekind pretendan justificar su construcción desde lo geométrico. Tratan de asegurar lo bien logrado de su construcción asociando cada uno de los números del conjunto real con un punto de la recta, en representación figural de la magnitud enfocada extensionalmente: número real-punto en la recta. Es un intento de justificación que únicamente se puede plasmar en un axioma: el llamado de continuidad.

Es un enfoque en el que vuelve a mostrarse lo que ya había aparecido en Geometría y en el teorema de unicidad que mencioné de Cantor: considerar como punto de partida colecciones de números dadas en acto, como nuevo objeto que hay que definir o caracterizar por una operación o propiedad, así como establecer nuevas formas o métodos demostrativos que han de ser justificados para asegurar lo que en ellos se resuelva y demuestre.

El papel de Dedekind

En este sentido la obra de Dedekind es ejemplar. Introduce, al menos, tres conceptos con los cuales pretende caracterizar sistemas de números como los reales, los naturales y los algebraicos, y los tres en enfoque extensional, distributivo. Así, la noción de *cortadura* para aclarar la idea de continuidad y construir el sistema de números reales; la de *cadena* para definir la sucesión de números naturales; la de *ideal* con el objetivo de establecer la factorización única en el dominio de los enteros algebraicos. Igualmente crea distintos tipos de operación y de demostración para manejar los conceptos introducidos: los que conformarán la estructura de retículo, la noción de cadena.

Bien entendido que son ahora las colecciones, agregados, sistemas o conjuntos los que se convierten en el marco de juego, son los conceptos-núcleo para formular nociones o conceptos como los citados y demostrar los teoremas correspondientes. Las tres nociones mencionadas que Dedekind introduce en el Hacer matemático hacen referencia, por modo exclusivo, a colecciones, y se emplean para demostrar teoremas básicos en cada una de las teorías a las que corresponden.

a) Así, las cortaduras se manejan para dar la definición de continuidad o, en otras palabras, para establecer el dominio de los números reales. Las demostraciones que se realizan manejando las cortaduras no pueden apoyarse en las propiedades de los números reales, porque son las propiedades de dichos números las que se intentan, ahora, establecer. Y en las demostraciones no pueden intervenir, para nada, los elementos contenidos en las mismas.

Además, dos cortaduras diferentes entre sí pueden dar paso al mismo número real, por lo cual habrá que precisar la unicidad de lo definido. Unicidad establecida atendiendo a la definición por clases de equivalencia, a la definición por abstracción que aparece en Cantor, aquí en Dedekind, y la tomará de modo explícito Frege de Cantor, ahora en el terreno de la equinumericidad. Con lo cual lo que se está manejando es, realmente, una definición por una relación de equivalencia que da paso a clases de equivalencia, considerada cada clase como un nuevo objeto.

En el caso concreto de Dedekind, de lo que trata es, por un lado, de si dadas dos cortaduras, una está contenida en la otra o las dos caracterizan el mismo elemento; por otro, hay que demostrar que entre las clases equivalentes de cortaduras se pueden definir operaciones como la suma y el producto, y que estas operaciones poseen, cada una, las propiedades «aritméticas» de asociatividad, conmutatividad, existencia de elementos neutros, compatibilidad entre ambas operaciones o propiedad distributiva...

b) En cuanto a las colecciones de números naturales Dedekind admite que el principio básico es el de inducción completa. De modo tradicional la inducción se definía o caracterizaba en función de los naturales mismos, es decir, dado un natural, siempre existe un sucesor suyo y el conjunto de naturales posee la propiedad de inducción. Dedekind romperá esa línea: la inducción se definirá no en términos de «números» y «sucesores», sino en términos de imágenes de ciertos conjuntos bajo una aplicación dada, y la inclusión o no de esas imágenes —que son imágenes de conjuntos— en otros conjuntos.

La inducción completa se caracteriza en términos conjuntistas o de globalidades y de aplicaciones entre las mismas estableciendo, para ello, nociones como la de cadena, como la de conjunto simplemente infinito:

Si N es un conjunto y f una aplicación $f{:}N \rightarrow N$, se define cadena K, $K \subset N$, como $f(K) \subset K$. Para un conjunto $A \subset N$ la cadena de A es la intersección de todas las cadenas K tales que $A \subset K$. Si N es simplemente infinito, es decir, $N\text{-}f(N) \neq \emptyset$, se toma un elemento distinguido de $N\text{-}f(N)$, por ejemplo 1, y se construye la cadena de $\{1\}$, la de $\{f(1)\}$, y así sucesivamente. Proceso que no es otra cosa que la caracterización de la inducción. A continuación se pasa a demostrar que estos conjuntos tienen todas las propiedades, tanto aritméticas como de orden, atribuibles a los números naturales.

A destacar, por un lado, que el mecanismo construido de cadena será una de las formas demostrativas a utilizar más masivamente desde Hilbert y Zermelo por los algebristas posteriores. Por otro, la definición de conjunto simplemente infinito, con la que se invierte el proceso tradicional de partir de lo finito para llegar al infinito y se está admitiendo la existencia de diferentes tipos de infinitud.

Dedekind requiere, en su trabajo, de nuevos conceptos y necesita precisar una noción que se quería «intuitiva», la de finitud: ahora esta noción aparece no como primitiva sino como derivada, establecida a través de una aplicación o función determinada.

A su vez Dedekind caracterizará los mecanismos de suma y producto mediante definiciones de carácter recursivo:

$$x+y = \begin{cases} x+0=x \\ x+y'=(x+y)' \end{cases} \qquad x.y = \begin{cases} x.1=x \\ x.y'=x.y+x \end{cases}$$

Las propiedades consideradas como «leyes aritméticas» quedarán supeditadas a la noción primaria de recursión y, por supuesto, de elemento sucesor, y tendrán que demostrarse a partir de estas nociones. Con ello se pondrá de relieve que dichas operaciones de suma y producto no son más que funciones que poseen unas propiedades.

c) Igualmente en el caso de los ideales, donde los teoremas de factorización numérica se convierten en factorización sobre ideales, y se trata de evitar la mención a las propiedades de los elementos componentes de dichas globalidades, los números algebraicos.

En los tres casos, los sistemas o conjuntos que adopta Dedekind como punto de partida, como objetos con los cuales trabajar, operando con ellos, estableciendo relaciones entre los mismos, pasando a nuevos sistemas de niveles diferentes..., son sistemas o conjuntos de elementos dados en acto. Son sistemas que Dedekind enfoca, en todos los casos, de manera extensional, distributiva.

3. CARÁCTER CONSTRUCTIVO DE LAS DEFINICIONES Y LAS DEMOSTRACIONES

Mediante las operaciones de unión, intersección, complementación..., entre sistemas, en principio numéricos, los matemáticos dan paso a nuevos sistemas o conjuntos, teniendo que comprobar que, cuando esas operaciones se realizan en conjuntos ya estructurados, la estructura se conserva o amplía.

Junto a estas operaciones entre sistemas los matemáticos crean procesos de definición y métodos demostrativos nuevos, a veces no explicitados nítidamente al principio, por lo que su manejo aparece en ocasiones de manera confusa. En algunos casos estos procesos se pretenden enlazar con un método genético, como justificador de la corrección de los objetos, conceptos y métodos introducidos.

Esta creación de nuevos procesos de definición, de nuevos métodos demostrativos, constituye uno de los aspectos más originales y fecundos del nuevo hacer, una de las manifestaciones más claras de la capacidad que posee la razón constructiva conceptual del matemático. Pero, quizá por ello, se convierten en los puntos más debatidos entre los matemáticos. Se pone de relieve que, en muchos casos, los procesos de definición que caracterizan el dato de objetos o conceptos son, en el fondo, nuevas formas de razonamiento disfrazadas de formación de conceptos. A su vez, los métodos demostrativos se convierten en instrumentos de creación conceptual existencial pero carentes de contrapartida referencial.

Son nuevas formas de razonamiento y nuevos métodos demostrativos que difícilmente pueden plasmarse en terrenos computacionales, permaneciendo en un plano estrictamente existencial calificado de no constructivo. Se razona por inducción transfinita o por elección simultánea de infinitos conjuntos dados en acto, se demuestra la existencia de objetos y propiedades sin poder construir el objeto o la función de elección correspondiente, se definen o construyen objetos y conceptos de segundo y tercer nivel...

Un Hacer global que rompe con las formas tradicionales del trabajo matemático imperantes hasta ese momento y que, por ello mismo, encuentra primeras resistencias a su completa aceptación. Una aceptación a largo plazo, sin embargo, cuando esas formas de razonamiento se van incorporando a la praxis matemática.

I. DEFINICIÓN POR ABSTRACCIÓN

Entre los procesos de definición cabe mencionar el que se ha denominado posteriormente definición por abstracción. Es el que posibilita el paso a entidades de segundo nivel a través de la relación de equivalencia, enfocada en estos momentos como una relación de igualdad establecida en un sistema previamente dado. La relación de equivalencia provoca la aparición de clases de equivalencia en el sistema dado, y cada clase, ahora, se considera como un nuevo objeto perteneciente al conjunto cociente provocado por la relación de equivalencia, al modo de las clases de congruencia módulo un entero que manejara Gauss.

Conjunto cociente, o sistema de clases, o nuevos objetos, en el cual se introducen operaciones del mismo tipo que las establecidas en el conjunto de partida y que dotan al sistema cociente de una estructura igual o más rica que la que tuviera el sistema de partida.

Lo que ahora se tiene es un nuevo instrumento de «creación» o definición de objetos, la definición por abstracción. Definición por abstracción que conduce a la construcción de nuevos entes numéricos como los números gausianos, los cuerpos finitos o de Galois... Nuevo mecanismo de formación de conceptos que se centra en el dato de una relación de equivalencia en un conjunto de partida, o en el dato de una función entre dos conjuntos. En este último caso se condiciona la existencia, en el conjunto X de definición de la función f, de una relación de equivalencia R establecida de la forma: xRy ssi $f(x)=f(y)$ y el paso al conjunto cociente X/R.

Es el mecanismo que manejará Cantor como instrumento para caracterizar la noción de potencia y obtener la «propiedad» que tienen todos los conjuntos biyectivos entre sí; Frege para definir la equinumericidad y llegar, a su través, a la igualdad entre las extensiones asociadas a los conceptos; Dedekind para caracterizar la noción de cortadura...

Definición por abstracción muy diferente a la tradicional, aunque lleve el mismo nombre. En la definición por abstracción tradicional se quiere que un concepto venga definido por una serie de notas características obtenidas por «abstracción» de unos previos objetos dados, notas que se estiman pertinentes. Es un tipo de abstracción al que se puede reprochar de psicologista, y plantear la posible arbitrariedad en la determinación de la pertinencia de unas u otras notas como auténticamente características del concepto abstraído.

En la nueva definición por abstracción no se encuentra nada de esto porque no parte de unos objetos de los cuales «abstraer» unas notas o características pertinentes, sino de la introducción de una relación de equivalencia en un sistema dado provocador de un tipo de estructuración especial en el mismo: escindirlo en clases disjuntas de equivalencia.

Al manejar este mecanismo formador de conceptos se tiene la conciencia, sin embargo, de que los objetos definidos son de segundo nivel, por estar constituidos, precisamente, por sistemas o agregados —que pueden ser finitos o no cada uno de ellos—. Lo cual engendra la dificultad de que hay que manejar el mecanismo de congruencias para asegurar que las posibles operaciones con cada objeto, con cada sistema o clase de equivalencia, sea estable.

Definición constructiva, existencial, implica que no puede inferirse de antemano lo que se puede obtener con ella, porque los elementos del sistema cociente, los nuevos objetos, no pueden identificarse con los objetos del conjunto de partida. Lo único que podría identificarse es la estructura que pudiera tener dicho conjunto inicial con la nueva estructura que pueda obtenerse en el sistema cociente. Una identificación establecida a través de una función que, ahora, conservara la forma, es decir, por un isomorfismo. Identificación de segundo nivel y no puramente ontológica porque no se hace referencia a la naturaleza de los objetos que entran en juego, sino a la forma o estructura a la que dichos objetos pertenecen.

Es esta conciencia la que conduce a Dedekind a manifestar que las cortaduras no pueden identificarse con las clases de racionales que la componen y desde las cuales se accede al número real. O el mismo Frege cuando reconoce que en este caso lo obtenido mediante la definición es algo nuevo porque

> no se vuelve simplemente a sacar de la caja lo que habíamos metido en ella. Las conclusiones que sacamos de este tipo de definición aumentan nuestro conocimiento [Frege, 1884, 88],

aunque a renglón seguido indique que, como la relación de equivalencia —en sus palabras el mecanismo de biyección— es una relación lógica, puede considerarse el proceso no como sintético en el sentido kantiano, sino como analítico. En cualquier caso, reconocimiento explícito de que el término «abstracción», aquí, carece de connotación psicologista.

Además de unas operaciones entre sistemas ha aparecido, de manera confusa en un principio, un nuevo instrumento de formación conceptual: la definición por abstracción o por relación de equivalencia. Definición sólo factible desde un enfoque extensional de los sistemas o conjuntos en los que se introduce la relación de equivalencia. Una relación que, para ser establecida, exige el dato previo del sistema o agregado o el de función entre agregados. Definición propia, por ello, de un hacer como el global.

II. NUEVOS MÉTODOS DEMOSTRATIVOS Y SU CARÁCTER EXISTENCIAL

Junto a estos elementos definicionales y operacionales que posibilitan la introducción o construcción de nuevos objetos y conceptos a partir de agregados de elementos numéricos previamente dados, surgen problemas en cuanto a las demostraciones de las propiedades atribuibles a estos nuevos objetos y conceptos.

Las demostraciones, y no ya las construcciones figurales o las analogías, no se van a limitar a comprobar que las propiedades atribuibles a esos nuevos objetos son correctas o válidas, sino que se van a convertir en auténticos vehículos para la generalización y la abstracción, para la misma formación de objetos y conceptos.

La intuición, en ellas, no puede intervenir, y no porque se la prohíba desde un enfoque fundacional, como se quiere desde una visión ortodoxa, sino porque no se tiene intuición perceptiva alguna de totalidades dadas en acto. Además, los conjuntos algebraicos construidos desde estos enfoques eran nuevos para el hacer matemático y sólo podían aceptarse desde el dato previo de su demostración. Y es un hecho como éste, entre otros, el que hace que la demostración adquiera un nuevo papel. Nuevo papel que exigirá que lo demostrativo sea puesto en un primer rango en la praxis matemática.

Así, Dedekind iniciará el Prefacio de su 1888 exclamando:

> En ciencia nada capaz de demostración debe ser aceptado sin demostración.

Es lo que ha pretendido a lo largo de toda su obra, en la cual ha introducido mecanismos de definición como los de clase de equivalencia o definición por abstracción, siguiendo a Gauss y en paralelo a Cantor, mecanismos de definición y demostración como los de cadena y recursión, operaciones entre sistemas...

Al manejar como punto de partida las colecciones y evitar en la demostración toda referencia a la naturaleza y, con ello, a las propiedades de los elementos que en ellas intervienen, las demostraciones se convierten en existenciales. Demostraciones en las cuales no puede darse, computarse elemento alguno concreto que satisfaga la propiedad requerida. El elemento cuya existencia se demuestra podrá computarse, cuando ello sea factible, por algún otro procedimiento no explicitado en la demostración. De aquí que una de las formas demostrativas básicas en el nuevo hacer sea manejar el mecanismo de reducción al absurdo.

Aquí, sin embargo, convienen unas precisiones porque el Hacer figural, que parte del objeto dado y lo admite, por ello, como previamente existente, también hace uso de las demostracions por reducción al absurdo. Demostraciones por reducción al absurdo que parecen mostrar, en alguna ocasión, un carácter también existencial y ello en varios planos:

En primer lugar, si se admite la aparición de un elemento —en la resolución de un problema, por ejemplo— cabe plantear si posee o no una propiedad conocida. Si la posee, no hay problema: se agrega, como existente, a los elementos ya conocidos con esa propiedad. Si no la posee, hay que admitir la existencia de ese elemento que pasa a constituir un nuevo tipo de objeto. Es lo ocurrido con los números irracionales. La demostración por reducción al absurdo de que $\sqrt{2}$ no es racional, no es que asegure la existencia de dicho número, lo que asegura es que no es racional o conmensurable. Dicho número aparece tanto en las operaciones algebraicas como con un referente geométrico —la diagonal de un cuadrado, por ejemplo—; es, por decirlo así, un existente previo del que se procede a buscar sus características esenciales, en este caso la irracionalidad o inconmensurabilidad. De modo inmediato, se buscan otros números que posean esta propiedad, y es uno de los trabajos de *Teeteto*, por ejemplo.

En este caso se tienen demostraciones de que ciertos elementos poseen o no unas propiedades dadas. Son demostraciones de existencia porque no se sabe de antemano que dichos elementos tuvieran esas propiedades hasta que no se realiza la demostración correspondiente.

A su lado, y en otro plano, aparecen demostraciones de existencia de objetos que han de cumplir unas características dadas. Son, por ejemplo, las demostraciones de existencia y unicidad de soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales, de límites de sucesiones y series..., que en general manejan la reducción al absurdo.

Junto a estas categorías incluyo demostraciones como las de Lejeune-Dirichlet sobre las progresiones o series que se manifiestan en uno de sus teoremas fundamentales como el que establece

> Si $ax+by=1$ con $(a,b)=1$ y $a\geq 1$, $b\geq 1$, entonces existen infinitos primos p tales que $p\equiv a(b)$.

Teorema de existencia de una infinidad de números primos en una progresión que, entre sus consecuencias, permite establecer que entre dos números n y $2n$-2 dados siempre *existe* al menos un número primo. Demostración no constructiva —en la cual se llega a manejar la función ζ de Riemann $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\alpha} 1/n^s$ y la función Γ— en el sentido de no mostrar ninguno de los números de los que afirma que existen y que poseen tal propiedad. Dichos números, demostrados ahora como existentes, habrá que obtenerlos por otros métodos.

Son tipos de demostración que aseguran la existencia de lo demostrado, que no parecen suscitar grandes dificultades en cuanto a su aceptación en un Hacer como el Figural, aun cuando el teorema de existencia no sea constructivo —como en el caso citado de Lejeune-Dirichlet—, no muestre el objeto o los objetos de los que asegura dicha existencia.

Y no ofrecen problemas porque lo que hacen las demostraciones indirectas es verificar o comprobar la existencia de un objeto, existencia que realmente se presume previamente. Mostrada la misma, posibilita su cálculo por otros medios. Un teorema como el fundamental del álgebra asegura la existencia de tantas raíces reales o complejas en el cuerpo complejo como indique el mayor grado de la ecuación; la demostración de un teorema existencial como este no implica ni el dato de las raíces ni el método de computarlas ni, por supuesto, se considera que la demostración «construya» las raíces de la ecuación dada.

Frente a esta característica de la demostración en el Hacer figural, el manejo de totalidades obliga a que la demostración no parta de «un» objeto y tiene que adoptar otro papel. De hecho, es la demostración la que se convierte en instrumento existencial. No ya la demostración directa, sino la demostración por reducción al absurdo, junto a la cual se crean otros tipos de demostración existencial que se agregan a los citados de recursividad y cadena. En concreto, métodos demostrativos apoyados en la biyección, en un proceso original como el de la diagonal, en el de enumeración de dígitos, en el de la potencia... Métodos que se van creando a lo largo de la praxis matemática, como trato de mostrar con dos ejemplos paradigmáticos: el de Hilbert y el de Cantor.

1. Hilbert y el teorema de la base finita para invariantes algebraicos

En 1888 Hilbert resolvió un problema iniciado por Gordan y que había quedado abierto: dar una base finita para cualquier sistema de invariantes algebraicos de grado cualquiera. Gordan lo había resuelto para un sistema binario manejando reglas formales de computación. Enfoque calificable de formalista por dicho manejo de reglas que podían cubrir páginas enteras que se plasmaban en fórmulas. Enfoque, además, de carácter Figural constructivo porque establecía explícitamente la base pedida.

Frente a esta manera de hacer local, concreto, y cuyo paso siguiente sería demostrar que un sistema ternario tiene una base y luego el cuaternario..., Hilbert considera el problema en toda su generalidad invirtiendo el enfoque de Gordan: la demostración la hace para un sistema o agregado de formas algebraicas invariantes, finito o no, y no para un sistema binario, ternario... Desde esa generalidad, desde lo global, subsume los pasos anteriores que ahora se ven innecesarios. Lo que Hilbert establece es

> cualquier sistema de invariantes dado en n variables tiene una base finita.

Lo interesante, aquí, es cómo realiza la demostración que ya no puede ser constructiva o formalista en el sentido de Gordan, sino que tiene que recurrir a la reducción al absurdo y manejar una cascada de teoremas previos: frente a la demostración constructiva formalista directa, la demostración conceptual existencial indirecta. Así, y en primer lugar, establece por inducción sobre el número de variables el teorema siguiente:

> Sea una sucesión infinita de formas $F_1,F_2,...$ en n variables $x_1,x_2,...,x_n$, entonces siempre hay un número m tal que cualquier forma en esa sucesión puede escribirse como $F=A_1F_1+...+A_mF_m$, donde $A_1,A_2,...,A_m$ son formas apropiadas en las variables $x_1,x_2,...,x_n$.

A continuación Hilbert pasa a demostrar el teorema fundamental en cuya demostración no importa si el número de invariantes F_1 es o no infinito numerable. Y lo hace por reducción al absurdo:

> Si no es posible elegir una base deseada, entonces se elige del sistema de invariantes una forma F_1 que no sea cero. Se puede elegir otra forma F_2 de manera que sea distinta a A_1F_1. Igualmente, una tercera forma F_3 que no se pueda escribir como $F_3=A_1F_1+A_2F_2$. Reiterando, se obtiene una sucesión $F_1,F_2,...$ que contradice el teorema anterior.

En su demostración Hilbert hace uso implícito de la condición de cadena ascendente, así como de la posibilidad de elecciones sucesivas, y se observa que maneja el término «sucesión» por ausencia, todavía, de la notación explícita del lenguaje del Hacer global, el conjuntista. Por otro lado, es un trabajo matemático que puede considerarse fundamental porque en él Hilbert enlaza la técnica más algebraica de demostración con la naturaleza más geométrica del tema con lo cual condiciona un enfoque algebraico en el posterior desarrollo de la geometría algebraica. Enfoque algebraico frente a enfoque aritmético y constructivo que mantenía Kronecker en el mismo terreno de la geometría algebraica. Y es la línea hilbertiana la que se impondrá en este campo matemático, en paralelo a la de Dedekind y Weber, frente a la de Kronecker.

Lo que importa destacar aquí es que la demostración es, por su condición de reducción al absurdo, esencialmente existencial no constructiva. En ella se demuestra que existe una base finita pero no se muestra ninguna, ni tampoco se indica cómo puede ser construida de modo efectivo. Es un proceso que iba contra el uso establecido en cualquier tipo de demostración matemática admitida. Y es lo que refleja la frase de Gordan

> Esto no es matemática, es teología

y su oposición a que se edite el ensayo de Hilbert en *Mathematische Annalen.* Gordan escribirá a Klein:

> el problema está no en la formas [...] sino que es algo más profundo. Hilbert ha desdeñado presentar sus pensamientos siguiendo las reglas formales; piensa que, si nada contradice su demostración, entonces todo está perfecto [...] piensa que la importancia y corrección de su proposición basta [...] pero para un trabajo comprehensivo para los *Annalen* esto es insuficiente. [De Webb, 1997, p. 1.]

Gordan ve con nitidez el cambio metodológico y ontológico que subyace en el enfoque hilbertiano, en el nuevo tipo de demostración existencial que no sigue las reglas formales establecidas. Ahora hay que admitir, por una fe apoyada en que el proceso por reducción al absurdo no implica contradicción, la existencia de una base finita para un sistema de formas invariantes algebraicas, sistema que puede ser infinito, pero sin poder mostrar ninguna.

A la sugerencia de revisión dada por Klein, Hilbert responde indicando que no altera su demostración porque

> no se ha realizado ninguna objeción definitiva e irrefutable contra mi razonamiento. [Cfr. cita anterior.]

Lo cual es correcto: de lo que se trata no es de la corrección en sí de la demostración, se trata de dos maneras distintas de hacer matemática y la dificultad, si no la imposibilidad en una de ellas, de admitir la otra.

Aunque en 1890 Hilbert mostró cómo poder construir, de modo efectivo, tal base, y Gordan simplifica posteriormente dicha construcción, importa destacar el aspecto existencial, no computacional, que se impone en la praxis matemática al admitir como su punto de partida las globalidades. Aspecto existencial difícilmente computable en el que Hilbert insistirá en sus trabajos de 1893 sobre la teoría de invariantes —donde demuestra su teorema de los ceros—, y de los que recordará en 1927:

> Establezco un teorema general sobre las formas algebraicas que es una proposición puramente existencial y por su propia naturaleza no puede ser transformada en una proposición que envuelva la construibilidad.

En defensa del carácter existencial no constructivo de la demostración, Hilbert señalará, inmediatamente, el papel que se puede asignar a este tipo de demostraciones, que va más allá de lo puramente existencial

> Por el uso puro de este teorema de existencia evité la argumentación larga y oscura de Weierstrass y los complicadísimos cálculos de Dedekind y, además, creo que sólo mi demostración da la razón interna de la validez de las aserciones vislumbradas por Gauss y formuladas por Weierstrass y Dedekind. [En Van Heijenoort, p. 494.]

2. Cantor y la teoría intuitiva de conjuntos

Claridad conceptual aportada por el nuevo tipo de hacer frente a proceso aritmetizador formal o mera computación. Claridad conceptual que implica que el nuevo hacer comporta una mayor profundidad al posibilitar dar la «razón interna» de lo que se demuestra. Algo reiterado por quienes trabajan, ya de lleno, en el nuevo tipo de hacer y que, nítido, aparece en los trabajos de Cantor. Quien una vez realizada la construcción de los números reales, en 1872, va a estudiar, directamente, las propiedades de las globalidades adoptadas como punto de partida.

En diciembre de 1873 Cantor establece la propiedad de una de estas colecciones: la numerabilidad del sistema de los reales algebraicos y, de modo inmediato, la no-numerabilidad de otras colecciones de números. Lo publica en 1874 bajo el título, en el que soy yo quien subraya: *Sobre una* ***propiedad*** *de la* ***totalidad*** *de* ***todos*** *los reales algebraicos*.

1874 es la fecha digamos «oficial» del nacimiento de la teoría de conjuntos, con una precisión en la que insisto, reiteradamente: de la teoría de conjuntos intuitiva no formal, y no del Hacer global que es el que propicia que pueda aparecer dicha teoría de conjuntos. En el Hacer global se terminará manejando el lenguaje conjuntista pero es un enfoque conceptual de hacer matemática que no se limita al conjuntista, y especialmente lo que puede considerarse como la gran creación cantoriana: la teoría de los cardinales y ordinales transfinitos. Creación que, a veces, se ha identificado con lo que aquí considero Teoría de conjuntos y, por ello, con el Hacer global.

El año 1874 es la fecha oficial de la teoría intuitiva de conjuntos porque Cantor ha demostrado que hay dos tipos de agregados o multiplicidades en acto, hay dos tipos de infinito: numerable y continuo.

La propiedad de numerabilidad, que no es de cada número real algebraico, sino de la colección en acto de los mismos, la demuestra Cantor —y no puede ser de otra manera— por reducción al absurdo. De esta propiedad Cantor obtiene una consecuencia, la de que para cualquier sucesión numerable de números reales, todo intervalo contiene un real que no está contenido en la sucesión. Inmediato: el conjunto de los números reales es no-numerable.

Y, otra consecuencia, existen números trascendentes, los no algebraicos. Cantor no puede dar, en esta demostración, ejemplo alguno de número trascendente: se tienen que obtener por otros medios. Únicamente establece que existe una colección infinita no numerable de números trascendentes. Como en la contraposición entre Gordan y Hilbert, aquí van a ser Hermite y Lindenbaum quienes, en paralelo a Gordan y manejando «reglas» que pueden estimarse formales, tanto analíticas como algebraicas, y cubriendo muchas páginas cada uno, logren demostrar que, en concreto, números como π, como e, son, de hecho, trascendentes.

La demostración cantoriana —en la que ya aparece, de forma implícita, el método de la diagonal— puede adoptar, como la de Hilbert que cité antes, y para satisfacción de quienes sostienen el Hacer figural, un aspecto constructivo: para ello se demuestra, en primer lugar, la numerabilidad de la totalidad de todos los números algebraicos; en segundo lugar, se pasa a obtener, por desarrollo decimal, alguno de tales números, lo mismo que en el caso de los trascendentes. Una satisfacción que cabe considerar secundaria para lo que importa destacar aquí.

En puro esquema, y creo que sin traicionar el espíritu cantoriano, su demostración puede establecerse en los pasos siguientes:

$A \Leftrightarrow N$
$N \not\Leftrightarrow [0,1]$
$[0,1] = A \cup T,\ A \cap T = \emptyset$
$T \neq \emptyset$

Demostración completa en cuatro pasos. Cuatro pasos que, por su importancia, obligan a detenerse, aun brevemente, en cada uno de ellos, especialmente en los dos primeros:

a) En primer lugar, que el conjunto A de los números algebraicos —los números que son solución de ecuaciones algebraicas— sea biyectivo con el conjunto de los números naturales N, se puede obtener sin más que observar que toda ecuación algebraica de coeficientes enteros puede expresarse como un número natural en base 14: base formada por los signos $0,...,9,+,-,=,x$. A cada ecuación le corresponde un número natural. Para la recíproca habrá que eliminar aquellos números que no tengan imagen, que no sean expresión de ecuación alguna, así como los que se repitan. Es una forma demostrativa base de lo que posteriormente se denominará método de enumeración de dígitos.

b) Que el intervalo cerrado [0,1] de números reales —que es biyectivo con el conjunto total de los reales R— no sea numerable, puede obtenerse con un nuevo método demostrativo, el método de la diagonal. Nuevo método demostrativo que aparece explícito en los escritos de Cantor de 1891. Es cuando Cantor consigue reemplazar un conjunto por otro de potencia mayor y, haciendo camino, establece la existencia de un conjunto no-numerable que puede ser asociado con el conjunto de los números reales y, consecuente, éstos poseen una potencia mayor que la numerabilidad, la potencia c del continuo.

Implícito en 1874, es método que maneja Paul Du Bois-Reymond en 1875 —al año siguiente del ensayo citado de Cantor— al demostrar que

> para cualquier sucesión de funciones reales $f_0, f_1, f_2 \ldots$, existe una función real g tal que para cada n, $f_n(x) < g(x)$ para todo real x suficientemente grande.

Demostración que servirá de base para alguno de los trabajos de Borel, ya en 1898.

La demostración cantoriana de 1874 no había satisfecho totalmente a Cantor, quien, en su trabajo posterior, había logrado explicitar nuevos métodos, más potentes. Demostración que, igualmente, había recibido duras críticas por parte de Kronecker por mantenerse en el terreno irracional y no en el puramente algebraico, donde se manejan por modo exclusivo las cuatro operaciones básicas, además de utilizar sistemas o agregados de elementos de naturaleza cualquiera. Insatisfacción, creación de nuevos métodos, críticas, le conducen a nuevas demostraciones que plasma en 1891.

El año 1891 es, por otro lado, importante para la aceptación «oficial» del Hacer global en la comunidad matemática alemana. Es el año en el que se crea la Sociedad Matemática Alemana y Cantor es elegido primer presidente.

Y en la primera reunión de la nueva Sociedad, Cantor expone su trabajo, sus nuevas demostraciones aun esperando la reacción negativa de Kronecker, entre otros. Kronecker, invitado a la reunión, no asiste y, además, fallece ese mismo año, el 29 de diciembre. El Hacer matemático que ahora preside Cantor, y que practican Dedekind, Weber, el joven Hilbert..., queda libre en el campo alemán, sin adversarios tan notables como Kronecker.

La estructura de demostración que en 1891 establece Cantor con el manejo del método de la diagonal viene a ser la siguiente:

Sean dos elementos m y w cualesquiera. Con ellos se pueden construir sucesiones $E_n = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots \rangle$ con $x_i = m$ o w. Por ejemplo, las sucesiones

$$E^{\mathrm{I}} = \langle m, m, m, \ldots, m, \ldots \rangle$$
$$E^{\mathrm{II}} = \langle w, w, w, \ldots, w, \ldots \rangle$$
$$E^{\mathrm{III}} = \langle m, w, m, w, \ldots \rangle$$

Se toma la colección M de todas las sucesiones E. Entonces se tiene el

Teorema. Si $E_1,E_2,...,E_n,...$ es cualquier sucesión simplemente infinita de elementos de M, entonces siempre hay un elemento E_o de M que no corresponde a ningún E_n.

Dem. Como $E_1,E_2,...,E_n,...$ es una colección simplemente infinita —o, en otros términos, numerable—, se puede establecer la lista de los E_n en la forma

$$\begin{array}{llllll} E_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \dots \\ E_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ E_p & a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \dots & a_{pn} \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

donde a_{ij} es m o w. Como este cuadro se tiene dado en acto, en su totalidad, se define o construye la sucesión

$$E_o = \langle b_o,b_1,b_2,...,b_p,...\rangle$$

donde cada b_i es o m o w, pero con la condición de que para cada a_{pp} se tenga

$$a_{pp} = \begin{cases} m & \text{entonces } b_p = w \\ w & \text{entonces } b_p = m \end{cases}$$

Está claro que, por la construcción realizada, $E_o \neq E_n$ para todo n, porque sea cual sea la sucesión E_n elegida, E_o difiere de la misma, siempre, en la coordenada n.

Además de introducir, de modo explícito, el método de la diagonal como nuevo método demostrativo, lo que logra Cantor con él es demostrar que la cardinalidad del nuevo conjunto es mayor que la del conjunto original. Bien entendido: mayor, pero sin saber cuánto es ese mayor. En este caso lo que se tiene es un conjunto que no puede ser numerable.

De modo inmediato, se tiene una aplicación a un caso concreto: Si se toma m=0, w=1, entonces cada sucesión E_n no es más que la expresión del desarrollo decimal binario de los números reales del intervalo [0,1]. Mera aplicación a un caso particular, Cantor ha demostrado el segundo paso del esquema demostrativo anterior, ha demostrado que

$N \not\Leftrightarrow [0,1]$, y como $[0,1] \Leftrightarrow R$, el conjunto de los reales es no numerable.

Dada la importancia del método de la diagonal en terrenos como los de funciones recursivas, en computabilidad al menos, insisto en el proceso demostrativo:

Se supone dado el conjunto de todas las funciones aritméticas de un argumento que toman como valores 0,...,9. Los valores de las mismas pueden considerarse como las expresiones decimales de los números reales comprendidos entre 0 y 1. Por ejemplo π-3=0,14159... Se establece el cuadro

	0	1	2	3 . . .
$f_1(a)$	1	4	1	5 . . .
$f_2(a)$	7	1	2	8 . . .
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
$f_a(a)$	1	9	3	9 . . .
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .

y se construye la función diagonal $f(a)=f_a(a)+1$, que muestra que el conjunto X de todas las funciones aritméticas $f_n(a)$ de un argumento y, por la construcción realizada, biyectivas, es decir, el conjunto de todos los desarrollos decimales, es no numerable ya que $f(a) \notin X$.

La demostración por el método de la diagonal puede hacerse de modo directo, como en el argumento anterior, o por reducción al absurdo. En este último caso: se admite que $f(a)$ figure en X, pero entonces ha de existir un p tal que, para todo a, $f(a)=f_p(a)$. En particular, para $a=p$, se tendría $f(p)=f_p(p)=f_p(p)+1$, que es una contradicción.

Tras la demostración anterior Cantor señala, de modo explícito:

> Esta demostración parece notable no sólo por su gran simplicidad, sino también porque el principio que sigue puede ser extendido directamente al *teorema general* de que las potencias de conjuntos bien definidos carecen de máximo o, lo que es igual, que en lugar de cualquier conjunto dado L puede ser tomado otro conjunto M que es de mayor potencia que L.

Es el enunciado del Teorema de Cantor: dado cualquier conjunto se puede obtener otro conjunto de potencia mayor. Reiterando, no habrá conjunto de potencia mayor que los demás... Cantor no se conforma con esta afirmación y la convierte en teorema pero, ahora, en términos funcionales y aparentemente en un terreno particular. Es teorema que enuncia como

> dado cualquier conjunto *M*, la colección de funciones de *M* en todo conjunto binario tiene una potencia estrictamente mayor que *M*.

El conjunto M lo toma como el intervalo real [0,1] y el conjunto *L* como el conjunto de todas las funciones *f* que toman valores numéricos en {0,1} para todo *x* de [0,1], es decir, $L=\{f/f:[0,1]\longrightarrow\{0,1\}\}$. Y Cantor demuestra que *L* tiene una potencia mayor que *M*, en dos partes.

En la primera parte demuestra que *L* tiene una cardinalidad al menos como la de *M*: y ello porque *L* contiene un subconjunto que tiene la misma potencia que *M*, a saber, el conjunto *N* de todas las funciones $f(x)$ que son iguales a 0 para todo $x\in[0,1]$ excepto en un punto en el cual $f(x_o)=1$. Que *N* tiene la misma potencia que *M* se obtiene sin más que establecer una correspondencia biyectiva entre *N* y *M*.

En la segunda parte se comprueba que no existe correspondencia biyectiva entre *M* y *L*. Para ello se supone, por reducción al absurdo, que ambos conjuntos poseen el mismo cardinal y se llega a una contradicción. No entro en más detalles...

En la demostración aparece el posteriormente llamado «teorema de Cantor-Bernstein», que aquí se maneja en un caso particular. Lo que interesa destacar, realmente, es que *L* no puede ponerse en correspondencia biyectiva con *M* porque hay subconjuntos de *L* que sí pueden ponerse en tal correspondencia biyectiva. Con lo cual se tiene, realmente, que $\mathrm{card}(P(X))>\mathrm{card}(X)$ dado que el conjunto de las funciones *f* es, precisamente, el de la potencia del conjunto de las partes de *M*.

Los dos pasos que restan para obtener la consecuencia de que existe una infinidad no-numerable de números trascendentes, inmediato. Como inmediato es ver el carácter existencial no-computacional de los pasos demostrativos dados: existe una función diagonal, existen infinitos números trascendentes...

Debo observar que en las últimas palabras que he citado de Cantor, y aunque el teorema al que hacen referencia parezca particular, ya se está en terreno muy general. Cantor ha pasado a manejar conjuntos de elementos cualesquiera, y no como hasta entonces de números reales o algebraicos o de funciones de variable real. Incluso en su demostración de 1891 se permite «particularizar» los resultados obtenidos de manera totalmente general, a conjuntos de elementos de naturaleza conocida, a conjuntos numéricos, de manera idéntica a la que he indicado antes en Hilbert. Pero ello supone un salto conceptual porque esos conjuntos de naturaleza cualquiera no han sido explícitamente definidos, caracterizados.

Consciente de este salto conceptual, Cantor pretende caracterizar, de alguna manera, el concepto o noción de agregado de objetos de naturaleza desconocida. Ya en 1879, había indicado:

> Un agregado de elementos pertenecientes a cualquier esfera de pensamientos se dice «bien definido» cuando, como consecuencia de su definición y del principio lógico del tercio excluso, puede ser considerado como intrínsecamente determinado si cualquier objeto perteneciente a esta esfera pertenece o no al agregado y, segundo, si dos objetos pertenecientes al agregado son o no iguales, aparte de las diferencias formales en la manera en la que estén dados.

Una definición, ciertamente, difusa pero ligada en cierta manera al formalismo representado en la época por Hankel, para quien la existencia de un concepto sólo puede venir referida al sujeto pensante y a los objetos pensados que tienen una representación sígnica adecuada, con la condición de que lo pensado sea no-contradictorio y, por ello, lógicamente posible.

Evidentemente, desde una visión tradicional, esta afirmación no conlleva que caiga algún objeto bajo el concepto establecido, aunque sea no-contradictorio. Desde la visión tradicional se parte del objeto existente para alcanzar el objeto. Pero el enfoque de Hankel, de Cantor, es, aquí, el opuesto: partir del concepto pensado como posible por no-contradictorio lógicamente y llegar al objeto.

Intentando ganar precisión, Cantor, en 1883, en *Fundamentos*, establecerá como caracterización del agregado o conjunto la de venir dado por una propiedad o ley:

> Toda multitud que pueda ser pensada como Uno, es decir, toda totalidad de elementos que pueden ser unidos en un total por una ley.

Caracterización que en 1895 adopta la forma

> Por conjunto entendemos cualquier colección *M* en un total de objetos *m* definidos y separados de nuestra intuición o nuestro pensamiento.

En cualquier caso, son definiciones que no cumplen, evidentemente, las mínimas condiciones de una definición formal correcta. Pero que pretenden delimitar uno de los conceptos-núcleo base del nuevo tipo de hacer matemático, el Hacer global que ahora se está manifestando en la construcción de la Teoría de conjuntos. Delimitación que consiste en admitir, en el fondo, que todo conjunto viene caracterizado por una propiedad «bien definida» o, en otras palabras, que toda propiedad o predicado posee una extensión. Y con la condición de que dos conjuntos serán idénticos si poseen los mismos elementos. Dos principios que, en el fondo, van a constituir, en la posterior Teoría formal de conjuntos, los Axiomas de comprehensión y extensionalidad.

A pesar de su carácter difuso, estos intentos delimitadores no impiden que Cantor proponga en 1883 la buena ordenación como una de las claves de los nuevos objetos, las potencias, que está creando:

> Es siempre posible convertir todo conjunto bien-definido en la forma de un conjunto bien-ordenado.

Principio de buena ordenación al que Cantor califica, aquí, como una ley del pensamiento.

Lo que importa destacar es que en la demostración de 1891 y junto al método de la diagonal, que va ligado indisolublemente a la noción de función, y ello en su sentido más general, Cantor introduce el mecanismo demostrativo de la potencia —y consigue obtener el teorema de Cantor: para cualquier conjunto *A* de cardinal a, $a<2^a$—.

El mecanismo demostrativo de la potencia conduce de un conjunto al conjunto de sus partes o conjunto potencia. Cantor, gracias a tal mecanismo, además de establecer que hay una potencia mayor que la del continuo, se ve llevado a admitir que no hay potencia máxima. Esto último equivale a establecer que los álefs constituyen una sucesión sin límite superior. Y Cantor lo hace siguiendo una argumentación del tipo:

Si hubiera un conjunto U que fuera el de mayor potencia con cardinal u, como su conjunto potencia $P(U)$ tendría de cardinal 2^u, resulta que, por el teorema de Cantor, $u<2^u$. Sin embargo, por ser U el de mayor cardinal se verificaría $u>2^u$; por lo cual U y $P(U)$ tendrían que ser biyectivos. Consecuencia que sería una contradicción, como se ha demostrado en la segunda parte del teorema cuya estructura he citado anteriormente. De aquí que no hay cardinal máximo.

Una argumentación en la que posteriormente Russell encontrará una antinomia o contradicción: la paradoja de Cantor. Lo mismo que Richard utilizará el método diagonal para llegar a la paradoja de su nombre, König el de enumeración de dígitos para la «suya»...

El proceso de la potencia es diferente al método de la diagonal, a pesar de que ambos provoquen la aparición de nuevos elementos y tengan, por ello, un carácter en cierta manera constructivo:

El método de la diagonal va ligado a la noción de función y a la «construcción» de un elemento no contenido en el conjunto de partida, por lo que dicho conjunto no puede tener la propiedad de numerabilidad o del continuo que se le asigne. Y puede reiterarse el proceso, por lo cual, dado un conjunto cualquiera de cardinalidad α, siempre existe un elemento no contenido en el mismo, por lo cual tiene que existir otro conjunto más amplio.

Por su lado, el método de la potencia parte, como base, de asociar a cada conjunto el conjunto de sus partes, su conjunto potencia, y observar que ambos conjuntos no pueden ser biyectivos, por lo cual sus cardinales asociados han de ser diferentes.

Combinando ambos mecanismos Cantor obtiene $\chi_0 < c$ y $2^{\chi_0} > \chi_0$ pero esa combinación no puede asegurar en momento alguno que $2^{\chi_0} = c$. Y Cantor se encuentra con el dilema de que o admite esa igualdad como hipótesis o la tiene que demostrar. Es el gran problema del continuo: un problema que surge de enlazar resultados provenientes de dos mecanismos demostrativos y constructivos diferentes.

Dos mecanismos demostrativo-constructivos distintos apoyados uno en la noción de función; el otro, en la de partes bien definidas de un conjunto dado. Aunque subyacente a los dos se tenga la noción de potencia o aplicación biyectiva entre conjuntos. Aplicación que, tomada sola y por el hecho de que a toda función se le asocia —se sepa o no— una relación de equivalencia en el conjunto de partida, permite establecer la noción de equinumerabilidad entre conjuntos y, con ello, la noción de número cardinal que aparece ligado a una clase de equivalencia.

Bien entendido que, para Cantor, el cardinal todavía no es un conjunto sino un concepto o universal abstraído de los conjuntos de igual potencia e isomorfos a conjuntos bien ordenados. La cardinalidad de X es lo común a todos los conjuntos que son equipotentes a X.

El proceso que ha ido realizando Cantor es realmente, muy complejo. Es un proceso que le ha conducido desde la construcción de los números reales de manera extensional a la noción, ya general, de agregado o conjunto de elementos de naturaleza cualquiera y no sólo numéricos. Haciendo camino, y en colaboración ciertamente con Dedekind, Cantor ha ido construyendo, de manera simultánea, mecanismos demostrativos propios del nuevo hacer: la biyección para tratar de la comparabilidad entre conjuntos —y que entraña la definición por abstración o por clases de equivalencia—, el método de la potencia, el de la diagonal... Métodos del nuevo Hacer global en el que la construcción directa desde el objeto dado de antemano, característica del Hacer figural, es inviable.

Métodos que, en principio, pueden admitirse como consecuencia de un hecho: al manejar sistemas o agregados dados en acto, aunque sean sistemas de números previamente admitidos, surge la cuestión de cómo compararlos en cuanto a su tamaño. Y Cantor, partiendo de la noción de potencia proyectiva geométrica de Steiner, adopta la noción de función biyectiva para poder establecer esta comparación. Se hace por correspondencia biyectiva. Con ella Cantor encuentra que la colección de todos los reales es equipotente con R^2, con R^n. Es su «Si no lo veo, no lo creo» en su correspondencia con Dedekind. Y es la matización de Dedekind: R y R^2 pueden ser biyectivos en cuanto a su potencia cardinal, pero no en cuanto a su dimensión. Es decir, hay que precisar lo que se hace, lo que se demuestra. Y surge otro problema, caracterizar la noción de dimensión...

En 1878 Cantor había hecho una conjetura, tras sus manejos de la correspondencia biyectiva:

> Todo conjunto infinito de reales o es numerable o tiene la potencia del continuo.

Era la primera formulación de la Hipótesis del continuo. Pero el método diagonal y, en paralelo, el método de la potencia, le obligan a ir más allá, se le aparece una escala de potencias o álefs, por un lado, de números cardinales, por otro. Y aunque Cantor afirme:

> La matemática es, en su desarrollo, bastante libre y únicamente sometida a la condición autoevidente de que sus concepciones estén tanto libres de contradicción en sí mismas, como puestas en relaciones fijadas, establecidas por definiciones a concepciones previamente formadas y contrastadas,

sin embargo, sus intentos de demostrar la hipótesis del continuo le conducen a una identificación de lo obtenido por el mecanismo de la potencia, los álefs, con un concepto autónomo, el de número cardinal a partir de la biyección o equinumericidad. Es la forma de dar sentido a la expresión antes señalada de $2^{\aleph_0} = c$.

Es una identificación no inocua. Por ella se invierte todo el proceso existente: ahora, desde la noción de número cardinal como potencia pueden definirse no ya los números cardinales no numerables, los cardinales transfinitos, sino también los que se consideraban como datos primarios, los cardinales y ordinales finitos, los números «naturales».

Desde el Hacer global asumido de modo explícito se invierte el proceso que se tenía en la praxis matemática anterior y ello de manera radical: si se parte de las totalidades, de las colecciones, hay que definir y caracterizar lo que de un modo clásico o anterior se estimaba el dato primario. Y el dato primario era el número natural como cardinal o como ordinal. Pero ahora los números cardinales van a poder definirse como las clases de equivalencia de conjuntos equinuméricos. Y se tiene, por el mecanismo de potencia, una escala ascendente de números cardinales, desde los finitos hasta los transfinitos.

Es una inversión conceptual que también Dedekind se había visto forzado a realizar: como parte de las totalidades dadas en acto y esas totalidades poseen un cardinal infinito, se ve obligado a definir, ahora, la totalidad finita y, consecuente, el número natural finito.

Quiero resaltar: no es el concepto de infinito lo primario, sino el sistema o la totalidad como punto de partida; y como la totalidad puede ser infinita o no, es el concepto de finitud el que hay que precisar. Manifestación, una vez más, de la inversión conceptual producida: en el Hacer figural se partía de lo finito como dado, admitido y, desde él, por reiteración, se alcanzaba la existencia del infinito potencial, pero no del infinito actual, dado de antemano. Ahora se parte del sistema como dato: y el sistema puede tener cualquier cardinalidad; pero como se inicia la praxis desde los sistemas numéricos dados en acto hay que admitir el infinito actual y, desde esta admisión, definir la noción de finito.

La definición dada por Dedekind no tiene más remedio que partir del infinito para caracterizar la finitud: Un conjunto N se dice simplemente infinito ssi hay una inyección $f{:}N \rightarrow N$ tal, que el complementario de $f(N)$ en N no sea vacío, es decir $N\text{-}f(N) \neq \emptyset$. En otras palabras ssi se puede poner en correspondencia biyectiva con una de sus partes propias. Y un conjunto se dirá finito ssi no es infinito; o, en otras palabras, si no puede ponerse en correspondencia biyectiva con un segmento inicial de la cadena construida.

III. DEMOSTRACIÓN: VALORES EPISTEMOLÓGICO Y METODOLÓGICO

Un panorama como el anterior creo que indica con claridad que la demostración en el nuevo hacer se convierte en una clave con papeles diferentes al que presentaba hasta ese momento. En el Hacer figural la demostración tenía como objetivo o finalidad básica comprobar la corrección de lo conjeturado. Es lo que refleja una petición como la hecha por Galois de que, al no darle tiempo para hacer él las demostraciones, las realicen Gauss o Lejeune-Dirichlet. Comprobarán que sus hallazgos son acertados, correctos. Comprobados, los demás matemáticos no tendrán más remedio que aceptarlos. Y aparece otra cara de la demostración: la de convencer. Ante una proposición demostrada no hay, así, opiniones, discrepancias.

Comprobar o verificar, convencer: dos caras, evidentemente, de claro carácter epistemológico y psicológico que suponen, simultáneamente, el papel de intercomunicación entre la comunidad matemática. El plano puramente lógico queda en un muy segundo plano.

La demostración como comprobación no implica que sea mera rutina. La demostración enfocada como comprobación viene guiada, en general, por aquello que se pretende demostrar. La proposición que es el teorema final, en la demostración es el punto de partida, la guía heurística en todo el proceso demostrativo. Este hecho llega a condicionar mecanismos demostrativos y constructivos en lo geométrico como los que se tienen en las cuestiones de lugares geométricos: se supone resuelto el problema, dado el lugar objeto de la demostración y se analizan las condiciones del mismo; analizadas, se invierte y, desde esas condiciones, se rellena la demostración, se llega al lugar pedido...

En este sentido la demostración puede asegurarse que viene condicionada por el enfoque epistemológico. Desde él se posibilitan analogías y enlaces con otros campos, con otras demostraciones ya realizadas. Y lo que importa, en ocasiones, es precisamente el tipo de enlaces que esas analogías propician y que llevan a unificar, en un momento determinado, distintas áreas o campos de estudio sectoriales, o a propiciar la aparición de nuevos conceptos en uno de ellos.

Es la importancia que tiene, por ejemplo, que Gauss intente cuatro demostraciones del teorema fundamental del álgebra, criticando las de autores anteriores como D'Alembert o Legendre. El teorema encierra elementos conceptuales que no se limitan sólo a un problema demostrativo: si en su demostración se requiere de irracionales es que el teorema no es puramente algebraico y parece extraño que, a pesar de ello, se considere como «fundamental del álgebra». De aquí que uno de los objetivos sea intentar eliminar ese elemento irracional del teorema a través de su demostración, o alcanzar la razón de que, en caso contrario, no sea posible dicha eliminación. Es uno de los objetivos implícitos de las sucesivas demostraciones.

En cualquier caso Gauss no evita el enlace con otros campos como el geométrico. Así, en la primera de las demostraciones que aporta, identifica unas ecuaciones con curvas algebraicas en forma polar, lo que le lleva a culminar con una demostración geométrica intuitiva apoyada en que las ramas de dichas curvas se cortan. Álgebra y geometría unidas en el proceso demostrativo a pesar de que el mismo se pretenda estrictamente algebraico. Una forma de construir la Geometría algebraica, de enlazar estos dos campos, que se convertirá en uno de los más fecundos de la praxis matemática.

La demostración-comprobación no se centra, por modo exclusivo y frente a las consideraciones de la visión que aquí califico de ortodoxa, en proporcionar rigor a la praxis matemática; tampoco a la aplicación ciega de unas reglas explicitadas para llegar a unas proposiciones desconocidas de antemano. La demostración exige intuición, conocimiento de aquellos campos que posibilitan establecer analogías y, a veces, un talento especial para llegar al objetivo final de demostrar lo previamente intuido. Talento especial creador de nuevas formas de demostración que pueden ser aplicadas, posteriormente, a otros campos muy diferentes. Y he hecho referencia al valor de una demostración como la de Gödel que va más allá de lo demostrado al incorporar procesos como los de aritmetización y representación, o el empleo de las funciones recursivas...

La demostración realizada por Weyl del teorema que hoy lleva su nombre en la teoría de la representación de los grupos semisimples, hace exclamar a Van der Waerden:

> A genius like Weyl was needed to find this proof. [1985, p. 260.]

En paralelo, se requería un talento especial como el de Hardy para comprobar que las intuiciones de Ramanujan eran, en general, correctas.

En el Hacer global notas como las anteriores siguen siendo propias de la demostración. Pero en el Hacer global este concepto sufre una transformación porque va a quedar dotado de otros papeles, inexistentes en la demostración figural y, en muchos casos, se la va a considerar contrapuesta a la misma. Voy a enumerar alguno de los papeles que se incorporan al concepto demostración en la nueva praxis matemática.

Por lo pronto, en el Hacer global la demostración se convierte en un instrumento que hace surgir elementos impredecibles, no previamente intuidos: he citado la aparición de curvas patológicas que siendo continuas carecen de derivadas en un número infinito de puntos, las que llenan un cuadrado... Es la demostración la que impone la aparición de elementos insospechados y sorprendentes y obliga al matemático a aceptar lo inesperado, imprevisto y, a veces, lo que puede estimar inaudito. Es lo que provoca la frase reiterada de Cantor: si no lo veo no lo creo; lo que quizá le llevara a la creencia de un mundo eidético del cual se limitaba a describir sus objetos y conceptos.

Es la demostración la que impone una existencia «real» a ciertos objetos matemáticos, existencia más dura, por decirlo así, que la de los objetos materiales que le rodean y a los que, en última instancia, puede hasta romper, lo que no consigue con la dureza especial de esos objetos impuestos desde la demostración.

Evidentemente ello supone que el matemático tenga que buscar dónde se encuentra lo paradójico de situaciones como las antes mencionadas: una curva llena un cuadrado, un lado del cuadrado es biyectivo con el cuadrado: Sí, pero... La intuición indica que la curva, el lado de un cuadrado son figuras de dimensión uno, mientras que el cuadrado es de dimensión dos. En consecuencia algo falla en la demostración. Es la reticencia que muestra Dedekind ante la demostración cantoriana.

Reticencia y no porque en la demostración se produzcan lagunas o saltos, o no se hayan cumplido requisitos mínimos de rigor: lo que falla no es la demostración, es la formación de conceptos, la claridad en los mismos; lo que falla es el punto de partida de la demostración.

Consecuentemente, la demostración pasa a tener otro papel inexistente en lo Figural: convertirse en instrumento que obliga a la búsqueda de precisión conceptual. Al abandonar como punto de partida el dato previo del objeto y pasar a manejar globalidades enfocadas extensionalmente, la demostración hace ver ese cambio de punto de partida porque ahora no va guiada, en general, por lo que tiene que demostrar.

Y ahora hace ver que, por ejemplo, nociones como la de dimensión, intuitiva geométricamente hablando, carece de caracterización precisa y hay que distinguirla, entonces, de los procesos en los cuales parece encontrarse ligada; que nociones como las de continuidad y diferenciabilidad son independientes; que una noción como la de integral de Cauchy no puede aplicarse a ciertas «curvas» como, por ejemplo, a la de Riemann, publicada en 1867 por Dedekind, y que viene dada por la fórmula:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} [nx]/n^2$$

donde $[nx]$ es la diferencia entre nx y el entero más próximo, y donde $[p+1/2]=0$ cuando p es entero.

Se demuestra que la serie del segundo miembro es absoluta y uniformemente convergente para $|x|\leq k$, y la función periódica f definida por esta serie tiene, en cualquier intervalo (a,b), un conjunto numerable y denso de discontinuidades de primera especie que corresponden a los valores racionales de x de la forma $\alpha=\pm 2p+1/2n$.

Pero es una «curva» para cada valor de n, y sólo puede ser representada gráficamente para los primeros valores de n siendo imposible esa representación gráfica cuando n se hace suficientemente grande, y es curva integrable en el sentido de Rieman... Muchos elementos sorpresa contenidos en esta función, en esta curva, para un matemático habituado por modo único a un hacer como el Figural. Elementos sorpresa que derivan, claramente, de que en esta formulación ya he manejado términos del Hacer global, lo extensional básicamente.

Lo que interesa destacar es que desde las demostraciones se plantea la necesidad de clarificar los conceptos empleados porque es en ellos, no en el proceso demostrativo, donde se encuentra, precisamente, la posibilidad de aparición de esos nuevos objetos o conceptos que se consideran, en ocasiones, teratológicos. En el ejemplo dado, la necesidad de precisar la noción de «curva», la de integral... La demostración como elemento enriquecedor conceptual en el plano epistemológico.

Y otro papel más: la demostración se convierte en instrumento dador de existencia. Algunos objetos y conceptos sólo surgen, como existentes, a partir de la demostración. Algo inconcebible para quien sostiene la previa existencia de dichos objetos o conceptos. Y es claro si se insiste en el punto de partida del Hacer global: las globalidades dadas en acto de elementos de naturaleza cualquiera. No se parte del objeto sino que se llega a él, y a la consecuente averiguación de sus propiedades. Y la forma de lograr este objetivo es demostrando su existencia, no comprobando o verificando la misma.

Con una dificultad: se demuestra la existencia, pero no se dan medios computacionales para establecer un referente de ella. Hilbert demuestra que existe una base, pero no da referente alguno; el método de la diagonal obliga a pasar de un conjunto a otro más amplio, por biyección se obtiene una clase infinita no numerable de números trascendentes.

Es claro que, aquí, se plantea un haz de cuestiones: demostrada la existencia de un objeto, de un concepto, algún matemático exige el dato de un referente, la posibilidad de construir el mismo. Es exigencia que muestra lo que por otro lado pretende ocultar: de hecho, la existencia de una previa ideología sustantivadora objetual. Es esa ideología la que obliga a tener la necesidad de mostrar, computar o establecer un objeto que sea referente de lo demostrado existente. Exigencia ideológica desde la que se acusa a este tipo de demostraciones de no ser constructivas, porque no posibilitan la elaboración de un proceso computacional o algorítmico, de un proceso calificado de constructivo que realice lo demostrado como existente.

Y aquí se plantea una cuestión: el término construcción es metafórico. Como tal, radicalmente difuso y, por ello, bajo el término «constructivismo» se pueden incluir multitud de tendencias a veces bastante dispares. Como una solución, identificar construcción con proceso computacional algorítmico; y todo se reduce a la búsqueda de precisión del término algoritmo y que pueda captar alguna de las notas requeridas en el término original metafórico... Se plantea, nuevamente, el problema de la formación de conceptos, ligado en este punto a la previa ideología que parte de lo ontológico, en perjuicio de lo epistemológico y metodológico.

En cualquier caso, y junto al carácter existencial no computacional o no directamente constructivo, a la demostración se la dota de otro papel más. El matemático la adopta como instrumento delimitador de teorías completas, globales. Al demostrar que la factorización única no se cumple en ciertos anillos, la demostración permite caracterizar, a través de este teorema convertido ahora en nota distintiva, a los anillos euclídeos. El teorema de Heine-Borel-Lebesgue, por el que se demuestra que el cuerpo de los reales posee la propiedad de compacticidad, hace ver, simultáneamente, que la compacticidad no se sigue en otros cuerpos y, por ello, se puede adoptar como nota diferenciadora del cuerpo de los reales. Al demostrar Gödel la completitud de L_1 y demostrar que los sistemas formales más amplios que contengan la Aritmética son incompletos, consigue aportar esta nota como caracterizadora de L_1, a la vez que diferencia entre «verdad» y «derivación sintáctica» o demostración formal.

Evidentemente, al tratar de enumerar los papeles que se atribuyen a la demostración en el Hacer global, se ha enfocado la demostración en planos como el epistemológico y metodológico. Es en estos planos en los cuales tiene sentido afirmar que la demostración posee valores como los de verificar o comprobar, convencer, provocar la formación de conceptos, delimitar estructuras y teorías, construir nuevos métodos demostrativos, enlazar diferentes campos sectoriales y ser instrumento existencial para objetos y conceptos...

Valores entremezclados en el proceso demostrativo, ciertamente, que conducen a intentos de clarificación conceptual de la propia noción de demostración, intentos delimitadores de la misma, fundamentalmente desde el enfoque lógico, desde el cual se intenta definir esta noción. Definición convertida en derivación en el interior de un sistema formal, que exige la previa axiomatización y formalización. Ya mencioné esta definición, como propia del reduccionismo logicista, aceptada por el formalismo finitista y que ha dado paso a lo que calificar demostración estilo Frege-Hilbert.

Noción excesivamente restringida y que no capta, ni pretende captar, ninguno de los valores epistemológicos y metodológicos señalados. Limitada, en el fondo, al plano de la verificación comprobadora de que una proposición pertenece a la teoría de un sistema formal dado. Pretendidamente sintáctica, caerá bajo los problemas de todo sistema formal: así, los de decidibilidad y complejidad de la propia configuración derivativa...

Atribuido un cierto formalismo como base o apoyatura del hacer matemático de este siglo, es la noción de demostración-derivación sintáctica la que se ha convertido en centro de discusión en el Hacer computacional por el papel que el ordenador pueda tener en la praxis matemática y no solamente en la computación o en la verificación.

Papeles epistemológico, metodológico, lógico de la demostración que van surgiendo en el interior de la praxis matemática y que provocan discusiones entre los matemáticos en cuanto a su aceptación o no. He mencionado los rechazos de Gordan, de Kronecker, al nuevo tipo de praxis demostrativa, los intentos de Frege de delimitar la noción desde un plano estrictamente lógico en el que los valores anteriores desaparezcan de lo que considerar derivación lógica...

Papeles diferentes que llevarán a las discusiones más fuertes entre los matemáticos cuando se dé un paso más en el aspecto existencial no computacional: el que supone manejar el Axioma de elección. Punto al que volveré más adelante.

4. PROBLEMAS EN EL NUEVO HACER

DE NOTACIONES, CAMBIOS DE SIGNIFICADO EN LOS TÉRMINOS, A QUÉ LLAMAR LÓGICA...

A lo largo del siglo XIX, en Geometría se terminan manejando, comparando y clasificando teorías completas, dadas en acto; en Análisis las funciones se ligan a sus conjuntos de definición y, según qué propiedades tengan los mismos, así serán las de las funciones; surgen las funciones teratológicas que ponen en correspondencia biyectiva, geométricamente, segmentos y trozos de plano, o que poseen una infinidad numerable de puntos de discontinuidad en un intervalo real... Se clasifica la colección de todas las funciones de variable real en escalas ordinales transfinitas... Se ha caracterizado el conjunto de los números reales a partir de clases de equivalencia de sucesiones fundamentales módulo sucesiones nulas o a partir de pares de conjuntos infinitos de racionales...

A la vez, se está pretendiendo «definir», de alguna manera, lo que entender por totalidad o conjunto mediante un principio, implícito, como el Axioma de comprensión acompañado del de extensionalidad. Se invierte el papel de la demostración y de simple verificación se convierte en instrumento constructor existencial no computacional de objetos y conceptos...

Todo ello supone una inversión conceptual radical. Una inversión respecto al hacer anterior. Desde la aceptación de unos conceptos-núcleo como los de agregados, sistemas o multiplicidades, y los de función, transformación o correspondencia para manejarlos, se tiene que hacer una nueva praxis matemática. Praxis matemática que conduce a elaborar nuevas disciplinas, imposibles desde la praxis anterior. Así, surge la Teoría de funciones, como ya he mencionado, la Teoría de conjuntos, la Teoría de la medida y la noción de integral de Lebesgue, el Álgebra, la Geometría algebraica... Con nuevos modos demostrativos: el manejo de la biyección, de la diagonal; nuevas formas de definición: por relación de equivalencia o implícita, por recursión; y el permanente recurso a la reducción al absurdo que obliga a que las demostraciones tengan un carácter existencial no constructivo.

Junto a esta afirmación me importa destacar que la teoría de conjuntos, que es en la que se intenta una clarificación o delimitación de la noción de conjunto, nace no de un deseo de fundamentación, sino como un intento más o menos adecuado de responder a unos problemas y dentro de un marco global. Cantor no crea *la* Teoría de conjuntos para fundamentar nada, sino que su trabajo se origina en dar respuesta al problema de determinar la existencia y unicidad de las series trigonométricas de Fourier y, de aquí, pasa a las colecciones de «conjuntos derivados» o de puntos de acumulación que considera, por la construcción realizada, bien ordenados en la sucesión $P, P', P'',..., P^n...$, donde «encuentra» los conjuntos de segunda especie, aquellos para los cuales no hay índice finito n para cualquier P^n finito: y la intersección de estos conjuntos es lo que Cantor considera primer conjunto puntual «transfinito» P^{∞}. Cardinal transfinito que origina otra sucesión de conjuntos derivados que lleva a la sucesión de ordinales transfinitos. Ordinales que, a su vez, van a ser caracterizados por sus distintas cardinalidades, lo que significa la aparición de los álefs o sucesión de cardinales transfinitos.

Es trabajo en el cual Cantor se ve obligado a caracterizar la «colección» de los números reales y diferenciarlos de la «colección» de los números naturales... Haciendo camino se plantea el problema de determinar si hay sólo dos potencias transfinitas o más y, cuando encuentra que hay más, ordenarlas, para lo cual o se acepta el Axioma de Buena ordenación o se tiene que intentar demostrarlo.

Los métodos demostrativos creados en los intentos de resolver estas problemáticas —la biyección y con ella la equipotencia y la relación de equivalencia asociada, el método de la diagonal, el de la potencia...— son los que, interactuando con lo estrictamente conceptual, le conducen a una escala de transfinitos ordinales y cardinales donde se instalan, a su vez, mecanismos de iteración o inducción, esta vez transfinita.

Todo este proceso es el que lleva a formular, de manera general, una Teoría de conjuntos transfinitos que es la que tendrá que ser justificada, y no por el proceso genético que ha conducido a su creación, precisamente...

En paralelo, Dedekind intenta responder a los problemas de caracterizar los números irracionales y después los naturales finitos, pero también a cuestiones de la teoría de números que le mantienen en un enfoque algebraico y, en él, a la elaboración de los ideales, módulos, cuerpos...

Y análogamente a Hilbert la demostración de teoremas como los de la base, que he citado, le lleva a partir de colecciones o sucesiones de formas algebraicas, a la formulación de un nuevo enfoque de la Geometría algebraica contrapuesto al enfoque Figural mantenido por Kronecker.

En todos los casos, lo que algunos matemáticos asumen no es *la* Teoría de conjuntos sino una nueva forma de hacer matemática donde los conceptos-núcleo básicos son los de conjunto, agregado o sistema y función, aplicación o transformación. Desde esta asunción realizan una praxis en la cual el punto de partida no es ya el dato concreto de un número, una figura, una función, una ecuación diferencial, sino unas totalidades o globalidades dadas extensional, distributivamente, entre las que establecen relaciones funcionales a distintos niveles: entre los objetos miembros de cada globalidad con lo cual la misma aparece estructurada de alguna manera —al estilo y forma de los dominios de los que, genéticamente, se parte—, entre las propias colecciones.

Y de ahí la necesidad de eliminar la intuición pero también, y mucho más importante, la necesidad de definir los nuevos elementos conceptuales que se están manejando, construyendo, y que, en algunos casos, mantienen el mismo término, aunque los significados sean, ahora, diferentes.

Es lo ocurrido, en otro plano, con la Geometría Proyectiva. Bien entendido que, aquí, no se trata de la creación de una nueva disciplina que, en principio, cabe asumir en el Hacer figural clásico. Ahora se trata de un nuevo enfoque o praxis matemática, con tipos de definición y demostración, con enfoque conceptual radicalmente diferente al que puede estimarse clásico. Así, hay que definir conceptos como número natural, conjunto finito, curva, dimensión...; y la necesidad de emplear nuevos métodos demostrativos y constructivos, nuevas operaciones entre esos agregados o sistemas o conjuntos, condiciona la búsqueda de una seguridad en su manejo, en su empleo...

Es evidente que en este hacer, que no se constituye o nace de golpe, completo, sino que se va elaborando paso a paso, con altibajos, con dudas y sorpresas..., se plantea todo un haz de nuevas cuestiones, todas ellas problemáticas. Cuestiones que no se resuelven, algunas, hasta pasados muchos años, hasta bien entrado este siglo en ocasiones...

Así, la de establecer unos nombres y una notación adecuada. De entrada, como las colecciones se toman de números racionales, reales o complejos, se habla de dominios racionales, enteros racionales, enteros algebraicos... Los nombres de potencia, de ideal, denotan su clara procedencia... Dedekind, en búsqueda de precisiones, terminará bautizando a los dominios racionales con el término *cuerpo*, por ejemplo. Y ello porque el dominio racional viene caracterizado por los principios aritméticos más simples, que no son otros que las operaciones de suma y producto, con sus propiedades respectivas. Justificará su elección con las palabras:

> Este término denotará aquí, de manera semejante a como en las ciencias naturales, en geometría y en la vida social del hombre, un sistema que posee una cierta completud, perfección y comprehensión, por medio de la cual aparece como una unidad natural.

En el fondo, un sistema con una determinada estructura, con una determinada morfología. Con la advertencia de que el nombre utilizado, en castellano, para esos dominios racionales, ha sido el de *campo* hasta tiempos muy recientes.

Problema de nombres como en el caso de las factorizaciones entre ideales, entre cuerpos. Dedekind establece propiedades como

> Un cuerpo se dice divisor de otro siempre que los elementos del primero estén contenidos en el segundo.

O, en paralelo,

> un módulo M es múltiplo de D ssi todos los elementos de M pertenecen a D.

Lo que podría escribirse como $M=\dot{D}\Leftrightarrow M\subset D$. A lo que Dedekind agrega, notación extraña

> ya que el múltiplo M es de hecho un subconjunto del divisor D.

Junto a estos problemas de búsqueda de una terminología apropiada, y no definitivamente resueltos, se plantea el de crear una notación conveniente. Y los matemáticos eran muy conscientes de su necesidad. Se requerían nuevos signos que canalizaran los nuevos modos de hacer la matemática, nuevos términos...

> A nuevas ideas corresponden necesariamente nuevos símbolos,

afirmaría retóricamente Hilbert recordando cómo el matemático no puede prescindir de la figura dibujada en geometría, pero tampoco de la figura escrita y del signo en Aritmética, en su alocución de 1900.

Se impone establecer notaciones convenientes para las operaciones a realizar entre esas globalidades: la unión, la intersección, el complementario..., y comprobar o admitir que la «suma» de ideales, por ejemplo, es un ideal.

Peirce, Schröder, Frege, Peano... intentan elaborar una signografía, ideografía o conceptografía adecuada. Será la de Peano la que termine siendo aceptada, con sus modificaciones correspondientes, en la praxis matemática. Pero hay que ser conscientes de que en los finales de siglo no hay notaciones comunes y ello hace realmente difícil, en ocasiones, la lectura original de algunos autores —y mencionaría la lectura de trabajos de algún seguidor de Schröder, como Löwenheim, un tanto complejo de seguir no sólo por su concepción conceptual y su idea de lógica, sino por los tipos notacionales que maneja—.

Ahora se habla no ya de un elemento dado —sea objeto, sea concepto—, sino de una globalidad o colección de objetos caracterizada por una ley, propiedad o predicado, o por una función, y hay que precisar si existe algún o algunos elementos que pertenecen a esa colección por satisfacer dicha propiedad, o si se puede hablar de todos los elementos de la totalidad. Se hace necesario el manejo de los cuantificadores existencial y universal porque los sistemas están dados extensional, distributivamente. Bien entendido que no al modo clásico de suma o unión de proposiciones o de propiedades de elementos, sino como operadores sobre esas globalidades. Diferencias no siempre entrevistas por los matemáticos y sus distintos enfoques.

Con enfoque algebraico Schröder ve la cuantificación como suma e intersección; más enraizado en el Hacer global, Frege establecerá la cuantificación en el sentido en el que hoy se mantiene; Hilbert preferirá utilizar un operador de elección desde el cual se alcanza, como particularización, la cuantificación fregeana...

Cantor, por su lado, ha establecido que no hay conjunto máximo, y en su demostración se ve abocado a establecer el conjunto potencia de ese conjunto máximo si existiera: encuentra imposible tal existencia y ello le conduce a señalar que no toda propiedad o predicado caracteriza un conjunto. Sólo «propiedades bien definidas» caracterizan, determinan un conjunto. Pero queda en el aire a qué llamar «propiedad bien definida», queda en el aire el problema de si una definición puede caracterizar, sin más requisitos, un conjunto. En otras palabras, queda en el aire el papel existencial constructivo de las definiciones o de algún tipo especial de definición.

Otro problema se centra en que todos los autores van a señalar el papel esencial de la demostración, de las deducciones lógicas realizadas en un número finito de etapas, en que las construcciones siguen las estrictas líneas de la lógica. Incluso se afirma que los primeros principios son proposiciones lógicas, leyes del pensamiento, verdades o principios de razón...

Así lo entenderá, por ejemplo, Cantor, cuando hace referencia al principio de buena ordenación: es una ley del pensamiento o principio lógico, y lo mismo afirmará Zermelo respecto al axioma de elección, o Hilbert hablando de «Axiomas del pensamiento» en 1905 como aquellos que plasman la habilidad y capacidad de pensar «cosas» y designarlas por signos materiales de manera unívoca, signos reconocibles de forma perfectamente clara y sobre los cuales opera el pensamiento según leyes obtenidas por introspección y que no se reducen a la lógica.

Son afirmaciones que pueden conducir a ciertas confusiones, hasta la de atribuir a todos ellos la profesión de un logicismo absoluto: todos —o casi todos— afirman que las demostraciones son lógicas, los axiomas son lógicos... y mantienen que se ha desterrado la intuición geométrica, la perceptiva. Todo parece, ya, rigor lógico, deductivo a pesar de que Hankel, Dedekind, Cantor, Hilbert, Husserl... mantengan que los axiomas regulan conjuntos de objetos, de «cosas» creadas por el pensamiento, bien mediante procesos especiales de abstracción, bien por operaciones de nuestro espíritu.

El problema está en que nadie especifica qué entender por Lógica. Consecuentemente, qué entender por ley del pensamiento o principio lógico. Así, y desde la concepción tradicional, los únicos que se estiman principios lógicos o leyes del pensamiento, son los de identidad, contradicción y tercero excluido.

La bivalencia que supone este último principio no será discutida hasta Brouwer, mientras que el de identidad —que apoya una definición como la de abstracción o por relación de equivalencia— será desbordado al observar el papel que tiene el orden. Y una relación de orden en un conjunto es antisimétrica por lo cual no puede reducirse a la identidad. De aquí que, asumiento este hecho de modo implícito, Cantor afirme que la Buena ordenación, irreducible a los tres principios señalados, tenga que admitirse como una ley del pensamiento.

De modo análogo, Poincaré indicará la separación entre Lógica y Matemática porque en ésta se requiere de principios que son irreducibles a los principios de la Lógica, entendiendo por tales únicamente los tres principios señalados, mientras que alguno de los principios constructivos esencialmente matemáticos, sintéticos en el decir kantiano, son inductivos o estructurales, como la inducción completa, la estructura de grupo...

A pesar de las críticas que en su momento recibió Poincaré —y que la historia ortodoxa mantiene—, se observa que es una afirmación en la cual se encontrarán todos de acuerdo. Así, un logicista como Russell acepta como «principios lógicos» aquellos que tienen una «forma lógica», en la cual incluye las relaciones de orden que, acabo de indicar, son irreducibles a la identidad —y por supuesto a los otros dos principios clásicos—, y termina incluyendo, aunque como solución *ad hoc* para fundamentar la Matemática, un principio existencial como el del infinito, difícilmente asumible como principio lógico. Lo que se hace, realmente, es modificar y ampliar el sentido de ley del pensamiento o axioma lógico, lo cual indica un cambio en cuanto a la concepción tradicional, por lo que se viene a dar la razón a Poincaré. Es lo afirmado también por Zermelo al incluir como ley del pensamiento el Axioma de elección.

En la amalgama conceptual, nada clara, que se tiene en estos momentos acerca de qué entender por Lógica y ley del pensamiento o principio lógico, tampoco se tiene una definición del concepto «demostración», o una diferenciación de sus distintos papeles o valores epistemológicos, metodológicos y lógicos. Se hace referencia a deducción lógica en número finito de etapas y según las reglas lógicas o de inferencia, sin tener presente que, por un lado, la propia noción de «número finito» es la que se encuentra en juego y, por otro, nadie especifica qué denominar «regla de inferencia». Aunque, en este último punto, todos, y en principio, parecen de acuerdo en marginar la única forma deductiva coherente que hasta ese momento se había establecido, la que desde Aristóteles se plasmó en el silogismo.

Es punto en el que conviene recordar que la Lógica tenía significados muy diferentes: desde el hegeliano hasta el de las escuelas. Y la necesidad de una precisión en su significado se hace sentir no sólo desde los terrenos de la praxis matemática, sino desde campos muy distintos. Así, desde el neoescolasticismo y el neotomismo se pretende una purificación de sus doctrinas y, en el caso particular de la Lógica, la supresión de elementos como los psicológicos que, desde Port-Royal y el empirismo, la han contaminado. Lógica supeditada a una concepción del hombre y del cosmos muy específica: la católica, por lo que no puede separarse del corpus orgánico del que forma parte.

Gredt publica en 1899 y 1901 los dos volúmenes de *Elementa philosophiae aristotelico-thomisticae*, que se convertirá en obra de referencia clave y no sólo en la enseñanza de un neotomismo renovado, sino también en la Lógica. Lógica escindida en formal, material, predicamental y demostrativa, pórtico para la Filosofía natural y, por supuesto, para la Metafísica, Teología natural y Ética.

Gredt insiste en la estructura tradicional de partir del sujeto del cual pueden predicarse unas notas, predicación que constituye el juicio; y enlazar distintos juicios constituye el raciocinio. Se mantiene la forma Sujeto-Predicado como «forma lógica», con la implícita aceptación de una reificación de dicho sujeto, reificación que entraña una sustancialización condicionadora de la visión del cosmos. Reificación sustancializadora que, de modo evidente, no encaja con las formas de hacer matemático, donde la noción de función desborda este cuadro.

Pero es un hecho que la obra de Gredt, junto a la de los neoescolásticos, tiene un papel importante en la revitalización de la Lógica a principios de este siglo, que se mantiene a lo largo del tiempo. Para los sociólogos de la Lógica, la difusión de esta obra y de sus epígonos constituiría materia de estudio realmente interesante, al igual que el papel e influencia de la Lógica dialéctica. Dos significados de Lógica claramente contrapuestos al que se quiere base del Hacer matemático.

Clarificar qué sea esta Lógica, especificar una ideografía conveniente, aclarar una noción como la demostración..., son cuestiones a las que se liga Frege, entre otros, aunque como objetivos subsidiarios, subordinados a una finalidad básica: fundamentar la Aritmética y, con ella, el total de la Matemática.

Con una observación, mera insistencia: desde el proceso genético se han construido los restantes números. En ese proceso se parte del dato de los números naturales, de la Aritmética. Si se acepta, con Kronecker, que los naturales constituyen el dato primario, irreducible, basta establecer una buena notación para que el método genético dé resultado. Si se acepta el Hacer global, donde los datos primarios son los de sistema y función, entonces el nuevo hacer exige caracterizar —como obligó a Dedekind cuando tuvo que establecer la definición de conjunto finito, o a Cantor cuando establece que los naturales no eran otra cosa que un tipo especial de cardinales, los finitos— a la Aritmética dentro de ese Hacer global, reemplazando al método genético.

Frege acepta que el método genético ha conducido al problema de fundamentar la Aritmética. Pero en lugar de preguntarse, como Dedekind, qué son los números y qué función tienen, a partir de la noción directa de sistema y función, planteará un programa explícito: los principios que caracterizan al sistema de números son principios lógicos. En lo cual estaba de acuerdo con todos, por lo que acabo de decir, pero Frege trató de explicitarlo. Y lo hizo con el objetivo de fundamentar la Aritmética en el primer sentido que mencioné de fundamentos, radicalmente reduccionista.

En su trabajo, mera constatación, Frege cae bajo el Hacer global que pretende fundamentar. Frente a la categoría Sujeto-Predicado, que admite para el uso común del lenguaje, mantendrá que el contenido de pensamiento matemático sólo puede representarse mediante la categoría Función-Argumento. Categoría posteriormente precisada como Concepto-Objeto y donde el concepto no es más que la función, el objeto su argumento, y donde todo concepto entraña la existencia de su extensión —es decir, el dato de la función es el que posibilita establecer su conjunto de definición: el que viene formado por los objetos que satisfacen la función—.

El enfoque extensional distributivo conducirá a Frege al mismo punto al que se vio conducido Cantor al establecer la equipotencia de sistemas, ahora la equinumericidad: dos conjuntos son equinuméricos ssi sus extensiones son idénticas. Con lo cual Frege fundamenta el Hacer global en sí mismo y va a caer en la misma contradicción en la que cayó Cantor, en el decir de Russell.

En esta línea será Frege uno de los que terminará estableciendo uno de los significados de Lógica, ahora como lenguaje y estructura formal dentro del Hacer global. Es enfoque que se codifica posteriormente en la obra de Russell-Whitehead *Principia Mathematica*, que, a pesar de sus autores y siguiendo a Hilbert, puede considerarse como una axiomatización de las más completas de esta visión de la Lógica.

En línea diferente Schröder se liga al problema de caracterizar la Lógica —también de manera subsidiaria—, con un enfoque más algebraico que, aunque seguido posteriormente por la escuela polaca, terminará relegada, quizá porque desde este enfoque la Lógica queda, en el fondo, algebrizada y, con ello, subordinada al Hacer matemático.

Líneas distintas a las que se suma Hilbert intentando una clarificación del proceso de formación de conceptos. Clarificación que considera factible y definitiva a través del método axiomático. Frente a la Lógica tradicional escolástica, frente a líneas como la de Frege y la de Schröder, Hilbert pasa a una concepción no sustancialista, sino metodológica de la Lógica y acaba enfocándola como un sistema formal axiomático más. Sistema formal que, en su elaboración, cae bajo los «axiomas del pensamiento» y capta una parte de la actividad mental del sujeto matemático. Actividad que no puede reducirse a la Lógica porque Matemática y Lógica, aunque independientes, siguen unos mismos principios. Al enfocar de esta manera a la Lógica, como un sistema axiomático formal, la Lógica termina por aceptarse como una estructura matemática más, de la cual cabe preguntar por su completitud, consistencia, decidibilidad...

Este enfoque se plasma en los veinte —y básicamente en la obra de Hilbert-Ackermann de 1928— y es lo que hasta hace poco se ha estimado como el corpus tópico de lo que considerar Lógica formal, matemática o simbólica. Corpus sobre el cual los seguidores de un intento de fundamentación al estilo logicista han pretendido fundamentar la Matemática, olvidando que se pueden construir sistemas formales lógicos más amplios que el aquí fosilizado.

Intento de fundamentación reduccionista logicista realmente increíble porque, si se toma L_1 como apoyatura lingüística, siguiendo a Skolem para caracterizar «propiedad bien definida» —la expresable en L_1—, resulta que en L_1 no pueden expresarse los conceptos centrales del Hacer matemático: ni siquiera las mínimas nociones topológicas que exigen cuantificadores de predicado... Y si se pasa a L_2 resulta que la misma es incompleta.

Es esto último lo que, entre otras cuestiones y superado en parte el sueño reduccionista fundamentador, condujo a Quine, a Kneale..., a mantener que la Lógica y la Matemática son dos disciplinas diferentes ya que L_2 no es más que teoría de conjuntos disfrazada.

El intento de tal fundamentación, por increíble que se considere, quizá se deba a que no se ha visto que L_1 posibilita «expresar» parte del Hacer matemático, como indicara Skolem, pero eso es muy distinto de «fundamentar» aquello que expresa.

No se ha visto que la Lógica formal, construida desde el interior del Hacer global, no es más que una estructura que pretende captar una compleja noción como la de «consecuencia de». Una estructura del mismo tipo que las que Bourbaki calificara «estructuras-madre» y a las que, realmente, debe incorporarse sabiendo que su operador central no es ya la operación interna algebraica, la relación de orden reticular o la relación «entre» o noción de proximidad topológica, sino la de «consecuencia de».

He insistido en que a pesar de estas problemáticas ligadas a las demostraciones y a su nuevo papel existencial, a los problemas notacionales, a las cuestiones básicas de considerar únicamente conjuntos «bien definidos», a delimitar una noción como la de lógica..., hay un predominio de lo que considerar enfoque genético. Es decir, en un primer momento las totalidades que se manejan lo son de números previamente admitidos: naturales, enteros, racionales, reales y entre estos últimos los algebraicos, los trascendentes... Parece que se puede ir elaborando la nueva forma matemática a partir de unas globalidades supuestas admitidas sin más.

Se acepta una base, en principio la Aritmética, y desde ella se van ampliando las colecciones, estableciendo sus propiedades, realizando con ellas comparaciones, operaciones..., bien de modo directo, bien por un proceso, en el fondo, de analogía. Con lo cual, mera satisfacción de carácter psicológico, se admite un contenido matemático que permite superar las posibles dudas que pueda ocasionar esta nueva manera de hacer matemática.

Serán fundamentalmente Cantor y Dedekind quienes, de modo definitivo, lleguen a romper este proceso y pasar a totalidades o sistemas de objetos cuya naturaleza, ahora sí, sea no numérica, incluso sea desconocida. Y es por ello por lo que Dedekind y Cantor terminan creando la Teoría de conjuntos como una nueva disciplina en el interior de este tipo de Hacer global matemático.

Ahora bien, el proceso genético aceptado por los matemáticos a lo largo del siglo XIX muestra debilidades esenciales: es un proceso que oculta el hecho de que el dato previo de los sistemas o agregados supone una auténtica inversión epistemológica. Inversión que, por un lado, y mera consecuencia, conduce a partir del infinito actual para, desde él, definir lo finito; por otro, permite caracterizar lo que desde lo genético se veía como punto de partida y, por ello, indefinible: el número natural. El método genético conlleva realmente un elemento circular, si no autocontradictorio desde un enfoque formal. O, más bien, supone construir un barco con las maderas del barco en el que nos encontramos en alta mar, para acudir a la metáfora de Neurath.

Ese elemento circular, ese ocultar la inversión epistemológica que supone la nueva praxis, provoca tensiones internas al proceso genético. Tensiones que provocan dudas y rechazos al nuevo enfoque de Hacer global. Dudas que conducen a fuertes críticas pero también a radicalizar posturas entre los matemáticos: y basta recordar la posición de Kronecker, por ejemplo. Críticas dirigidas a que las demostraciones no son constructivas, por un lado; por otro, a que las generalizaciones sin limitación alguna parecen conducir a nociones un tanto monstruosas: e insisto en las curvas teratológicas elaboradas por Weiertrass, por Dini y los analistas italianos, la posibilidad de dificultades con el cardinal máximo o con el ordinal máximo...

Tensiones, críticas, tomas de posición que también tienen su repercusión en la vida social de los matemáticos, especialmente de los alemanes. Así, y como mero ejemplo, la creación ya mencionada de la Sociedad Matemática Alemana en 1891 no es más que uno de los reflejos de dichas tensiones. Esta Sociedad acoge, realmente, a los practicantes del nuevo modo de Hacer matemático que nombran a Cantor, significativamente, primer presidente. También he citado los intentos de Gordan para la no publicación de los trabajos de Hilbert, a lo que cabría agregar los ataques de Kronecker contra Cantor, de Cantor contra Veronese, de Frege contra todos, las ironías de Hermite... Y la aparición de una revista como *Acta Mathematica,* fundada y dirigida por el gran matemático Mittag-Leffler como refugio y, en el fondo, portavoz del nuevo modo de hacer..., que, como toda inversión epistemológica, no se difunde y cosifica sin dificultades y polémicas.

5. EL MÉTODO AXIOMÁTICO: SUS DIFERENTES PAPELES

En las tensiones y polémicas entre los matemáticos, enfrentados por el nuevo modo de hacer, va a intervenir, nuevamente, la Geometría a través de su método privilegiado: el método axiomático. Si lo que se pretende es clarificar tanto los conceptos-núcleo de una teoría como las relaciones existentes entre sus elementos, el método axiomático se muestra como uno de los métodos más poderosos de análisis. Como tal, se encuentra implícito en la búsqueda de una conceptualización rigurosa en Dedekind, por ejemplo: al caracterizar la sucesión de los números naturales mediante la noción de cadena tiene que demostrar que el sistema caracterizado cumple las condiciones requeridas para los naturales, además de demostrar que si hay otro sistema que las cumple es isomorfo al primero. Y Peano pondrá de relieve, de modo inmediato, esas propiedades estableciendo la Aritmética mediante el sistema axiomático que lleva su nombre.

Recuerden las palabras que he citado de Dedekind respecto a la noción de cuerpo: un sistema que viene caracterizado de manera completa, perfecta y comprehensiva por unos principios. Precisamente unos principios que, desde nuestra perspectiva actual, son los axiomas que definen la estructura de cuerpo. Y, sin embargo, Dedekind no da el paso hacia la formulación axiomática como hará Peano en cuanto a la Aritmética, porque supone aceptar el método axiomático en una concepción demasiado revolucionaria en ese momento: como instrumento definidor de estructuras. La concepción del método axiomático en Dedekind, Cantor, Weiertrass..., sigue siendo la tradicional o euclídea y se mantienen en la posición que ya apuntara Gauss. De aquí que, para todos ellos, más que axiomatizar a lo euclídeo, lo que importa es analizar conceptualmente.

I. CONCEPCIÓN TRADICIONAL DEL MÉTODO

En su concepción «clásica» o euclídea una teoría axiomática se ve como un conjunto de proposiciones verdaderas acerca de un ámbito determinado de la realidad, donde los conceptos que intervienen se definen en función de unos pocos que se toman como los términos «indefinidos», como primitivos, y las proposiciones se obtienen deductivamente de unos pocos axiomas verdaderos.

En términos actuales, la terminología no-lógica de una disciplina se reduce a un pequeño número de términos no-definidos y a un número, también muy pequeño o lo menor posible, de primeras expresiones que son los axiomas. A partir de estas nociones primitivas y de los primeros axiomas se van demostrando las verdades o proposiciones que componen la disciplina.

Adoptar unos primeros axiomas o proposiciones como puntos de partida se debe, según la concepción clásica, a que no se puede realizar un regreso al infinito: es decir, si se prueba un teorema se hace a partir de otros, éstos de otros, y así sucesivamente. Hay que pararse en algún sitio. Y se para en los axiomas, por supuesto. El mismo argumento sirve para la adopción de unas primeras nociones o términos primitivos.

Aquí se tienen, de modo natural y al menos, problemas pertenecientes a tres campos:

— Metodológico o cómo seguir la marcha siguiente: admitido un sector fenoménico de lo real, determinar unas primeras nociones y principios que se consideren fundamentales. A continuación, elegir aquellos principios que muestren una mayor potencia derivativa pero que, a la vez, sean lo más simples y claros posibles. De modo inmediato pasar a la obtención de teoremas que van a confirmar la teoría en su ámbito proposicional. Simultáneamente puede plantearse la cuestión de si los axiomas elegidos como iniciales son o no redundantes y si hay algún otro principio que, a lo largo de las demostraciones, se maneje de modo implícito. En estos últimos casos, se puede modificar el sistema inicial de axiomas, bien simplificándolo, bien aumentándolo.

— Epistemológico: cómo se obtienen y determinan las primeras nociones y se alcanza el conocimiento de que los primeros principios son verdaderos.

— Lógico: obtenidos los axiomas por los procedimientos que sea, obtenido el punto de apoyo, lo que importa es el proceso demostrativo, la obtención de proposiciones que reflejen las propiedades de los objetos que hay en la disciplina mediante un proceso deductivo.

Tres aspectos que no siempre se han distinguido. Y en esa no distinción se encuentra una de las claves para las discusiones permanentes en torno a la fundamentación.

En el aspecto metodológico se marginan, en general, los otros dos, aceptando el dato previo del sector fenoménico a considerar, así como en el terreno demostrativo se quiere que venga apoyado en las reglas lógicas que, en general, no se explicitan.

Uno de los problemas centrales, en este enfoque «tradicional» es el de la independencia de las nociones y axiomas primitivos. Independencia en el sentido de que ninguno de ellos sea consecuencia lógica de los restantes. Esta independencia entraña la posibilidad de reducir tanto las nociones primitivas como los axiomas al menor número posible. Problema de independencia que dio sus frutos en la Geometría euclídea al conseguir establecer sistemas de axiomas equivalentes y enunciados equivalentes al del paralelismo de Euclides, en lo que se ha denominado el problema del postulado V euclídeo, el problema de las paralelas.

Partir del dato de una disciplina para su axiomatización supone, junto al problema de independencia de sus primeros axiomas, la aparición de otro problema: los axiomas han de ser adecuados o suficientes para dar el total de la teoría, de la disciplina, en el sentido de que toda proposicion que se formule acerca del dominio que cubra la teoría axiomática sea un teorema deducible de los primeros principios elegidos.

Desde lo epistémico, en el enfoque clásico se acepta que los conceptos y los axiomas primitivos se adquieren de modo intuitivo, aunque el término intuición quedaba, y queda, un tanto impreciso y vago y, con el mismo término, se designan posiciones radicalmente diferentes. Así, para Aristóteles los primeros principios se obtienen mediante una especial facultad intelectiva; para Kant, como el espacio y el tiempo son formas de nuestra sensibilidad o precondiciones de la experiencia, resulta que cualquier tipo de principios se basarían en la intuición *a priori* del espacio y el tiempo; para un empirista, por mera abstracción a partir de los sentidos, de la percepción...

En cualquier caso, todas las posiciones aceptan que los primeros principios, los axiomas, son verdades acerca de un sector fenoménico de lo real y, además, autoevidentes. Como son verdaderos, aseguran la verdad de la conclusión. Con ello impiden que se produzcan falacias como aquellas que de premisas falsas obtienen conclusiones verdaderas...

Desde lo lógico, la demostración hace pasar la verdad contenida en los axiomas a la conclusión, a las proposiciones que constituyen los teoremas. La demostración presenta, por ello, un carácter tanto psicológico como argumentativo, y no sólo lógico, en el sentido de entrañar la nota de convicción: más que demostración en el sentido de derivación lógica, es una verificación de la verdad ya intuida de la conclusión, del teorema y, ante esta mostración, no hay lugar para la duda, sino para la aceptación incondicional de lo demostrado.

Carga de verificación y carga de convencimiento psicológico que condicionan, en cierta manera, el papel de la demostración en el sentido de que no requiere ser elaborada con total detalle y pueden establecerse, en algunos casos, meras indicaciones de cómo llevarla a cabo. De aquí que, para el matemático «tradicional», sea más importante captar el teorema que culminar la verificación o demostración del mismo. Ésta viene, en general, guiada por lo que se pretende demostrar-verificar.

Es una concepción del método axiomático que se mantiene hasta bien entrado el siglo XX aunque siempre se ejemplifique en el terreno geométrico. En éste, y al aceptar que los axiomas son verdades autoevidentes acerca de un ámbito determinado de la realidad, la teoría correspondiente podía considerarse, en cierta manera, una teoría física. Así, Pasch, y a pesar de la inflexión que ya señalé, en sus *Lecciones de Geometría moderna*, indicará que los axiomas se obtienen como abstracciones perceptivas o sensoriales del espacio físico; obtenidas las abstracciones mediante un proceso intuitivo, perceptivo sensorial, el matemático olvida esa intuición y pasa a realizar demostraciones constructivas —planos lógico y metodológico—. A la vez, la geometría así construida es operativa o aplicable a la naturaleza porque, en el fondo, su punto de partida es esa naturaleza, el espacio físico.

Matemáticos como Gauss, Weiertrass, Dedekind, Cantor..., consideran que el método axiomático así caracterizado no es instrumento apto para su uso en terrenos diferentes del geométrico, terreno en el que hay que hacer hipótesis sobre la naturaleza del espacio físico. Hipótesis o axiomas que se imponen al matemático, como las leyes de la naturaleza se imponen al físico.

Weiertrass insistirá en que la Aritmética se encuentra libre de hipótesis, no requiere de axiomas de especie alguna. Los axiomas son propios de lo geométrico, no de lo aritmético, en el sentido de que lo geométrico enlaza la construcción matemática con el espacio y la Geometría puede estimarse una disciplina *a posteriori*, dependiente de la experiencia en cuanto a su elaboración, como había mantenido reiteradamente Gauss.

Cantor sostendrá el mismo punto de vista: la Teoría de conjuntos no requiere de hipótesis y sólo se apoya en la definición de conjunto y en la existencia de algunas leyes de la razón como la del buen orden... Incluso un axioma como el arquimediano lo intenta demostrar conjuntistamente para que desaparezcan las nociones de infinitesimales, queridas en el Hacer figural desde su origen. Plantear que es una hipótesis o axioma la propiedad arquimediana y, con ella, la posibilidad de establecer de manera «real» la existencia de los infinitesimales como intentó Veronese, se le muestra a Cantor pura fantasía. Incluso, más radical, piensa que la necesidad de hipótesis o axiomas como intrínsecas a lo geométrico la mantienen personas como Helmholtz que, para Cantor, no ven que la Geometría analítica permite desarrollar aritméticamente las percepciones espaciales sin recurrir a axiomas, por lo que éstos, en el fondo, sobran.

Para buena parte de los matemáticos el método axiomático es apto para el terreno geométrico porque, como he indicado, consideran que se parte de un elemento fenoménico dado: el espacio, y se afirma que la geometría estudia las propiedades de ese espacio, estudio que es el punto de partida para la aprehensión de los axiomas como enunciados verdaderos captados intuitivamente. Por el contrario, en Análisis, Aritmética, Álgebra, no hay manera de «percibir» sus elementos y formular respecto a ellos hipótesis o axiomas como proposiciones verdaderas y autoevidentes. Son las disciplinas que componen lo que denominar Matemática «pura», obtenida por el pensamiento puro.

Escisión planteada por Gauss y que se radicaliza en el Hacer global: si sus conceptos-núcleo son los de sistema y función, la dificultad de establecer unos primeros principios que satisfagan las condiciones que se atribuyen a los axiomas geométricos se radicaliza. De ahí que para mantener la verdad de las proposiciones obtenidas, los matemáticos se apoyen en el proceso genético y acepten partir de sistemas de números naturales, como si estuviesen dados de antemano, para ir construyendo los restantes sistemas de números. Los sistemas aritméticos garantizan, junto a la demostración, la construcción conceptual realizada. Con ello, y junto al papel de garantizar lo construido, el proceso genético queda identificado, también, con el análisis conceptual.

Sin embargo, el trasfondo geométrico que he señalado como un elemento esencial del hacer a lo largo del siglo XIX, permite la construcción de otras geometrías y dar origen a la serie de problemas que he citado. Trasfondo geométrico que, además, obliga a un replanteamiento de lo que considerar tanto proceso genético como método axiomático en sus planos lógico y epistemológico. Y ello porque, entre otras cosas, se tienen logros como los siguientes:

La Geometría Proyectiva supone la eliminación de cualquier forma de intuición perceptivo-sensorial de unos primeros elementos, especialmente los impropios; sus figuras se convierten en ideogramas de carácter heurístico que son, además, eliminables. En principio, la Geometría Proyectiva no parece «surgir» de ningún sector fenoménico de lo real y, sin embargo, su potencia es tal que engloba a la propia geometría métrica euclídea.

Las geometrías métricas no-euclídeas, surgida alguna por proceso independiente a la metodología axiomática euclídea tradicional, plantean tanto el estatuto de la teoría geométrica euclídea —ser la formulación «verdadera» de unas propiedades del espacio— como la consideración de que la Geometría sea una rama de la Matemática «aplicada».

Finalmente, la formulación algebraica, y con ella la posibilidad de plantear posibles espacios concebibles, invierte radicalmente la posición mantenida tradicionalmente: no se parte del espacio para alcanzar una teoría matemática, sino que desde la teoría matemática, en la que se «construyen» distintos espacios, cobra sentido preguntar por el tipo de geometría más adecuada al espacio.

II. MÉTODO AXIOMÁTICO *VERSUS* PROCESO GENÉTICO

Corresponde a Hilbert señalar la contraposición entre el proceso genético y el método axiomático, de manera nítida e insistente. Contraposición a la que se agrega la idea hilbertiana de que existen, en el proceso matemático, tres fases por las que pasa toda disciplina matemática: una fase ingenua; una de carácter formal, en la cual se obtiene una perfección en cuanto al cálculo simbólico y al manejo de las reglas de dicho cálculo explícitamente establecidas; y una fase crítica, de análisis conceptual, en la que se pone de relieve el porqué del propio establecimiento de las reglas formales. Y es en esta última fase en la cual cobra todo su sentido el método axiomático.

Tres fases que en 1927 ejemplifica en la Teoría de invariantes algebraicos, donde le parece que Gordan representa el *culmen* de la fase formalista mientras que sus teoremas de existencia, suplementados por un «cálculo finito» para la computación explícita de las bases, pertenece ya, de modo pleno, a la tercera fase, la fase de análisis crítico.

En 1899, aunque publicado en 1900, en *Sobre el concepto de número*, Hilbert contrapondrá los procesos genético y axiomático. El proceso genético es el que se ha seguido en las investigaciones sobre los principios de la Aritmética. Se centra en partir del número natural, de la unidad y con ella, la sucesión natural, para ampliar a los enteros mediante la introducción de la negación; después a los racionales como par de números enteros con lo cual toda función lineal $a+x=0$ posee un valor nulo. Finalmente se define el número real como cortadura o como sucesión fundamental y se llega a que toda función entera racional e indefinida y, en general, a que toda función continua indefinida $ax+b=0$, admite un valor nulo.

> A este proceso de introducción del concepto de número podemos denominarlo *método genético*, porque el concepto más general de número real se obtiene por sucesivas ampliaciones del concepto de números más sencillos.

Hilbert recuerda que en Geometría no se sigue este proceso, sino el método axiomático. Y del método axiomático da una sorprendente caracterización, totalmente diferente a la tradicional esbozada antes:

> se procura comenzar con la hipótesis de existencia de todos los elementos, esto es, se supone, antes que otra cosa, tres sistemas de entes, a saber: los puntos, las rectas y los planos, y se establecen relaciones entre esos elementos —esencialmente según el modelo de Euclides— por medio de ciertos axiomas [...]. Aparece entonces el obligado problema de demostrar que estos axiomas no presentan contradicción y forman un sistema completo, esto es, debe demostrarse que la aplicación de los axiomas establecidos no puede conducir a contradicción y, además, que tales axiomas son suficientes para la demostración de los teoremas geométricos.

Y Hilbert plantea la cuestión de si el método genético es el único apropiado para la investigación en el campo del Análisis, y el axiomático el único apropiado para el de la Geometría. Su conclusión es clara:

> a pesar del alto valor pedagógico y heurístico del método genético, merece, sin embargo, la preferencia el método axiomático para la representación definitiva de nuestro conocimiento y su plena seguridad lógica.

Método axiomático como instrumento clave, por un lado, para la representación definitiva de nuestro conocimiento, para dar seguridad epistemológica; por otro, para obtener la seguridad lógica. El método axiomático posibilita eliminar las ideas confusas, poner de relieve las suposiciones implícitas que se aceptan, en ocasiones, acríticamente. Cabe afirmar que el método axiomático establece el fundamento de la praxis matemática, aunque el genético muestre una mayor potencia en terrenos como el pedagógico o el heurístico.

Por ser fundamentante de la praxis matemática, el método axiomático no se encuentra ligado por modo exclusivo a lo geométrico, sino que debe utilizarse en todos los demás sectores de esa praxis. Y Hilbert establece una axiomática para la Aritmética, para obtener tanto seguridad epistémica como lógica, es decir, para obtener un Fundamento definitivo de la misma.

He indicado que la formulación de Hilbert es una caracterización que poco tiene que ver con el método axiomático en su concepción clásica. Parte no de un sector fenoménico determinado del cual obtener unas primeras nociones y propiedades por abstracción, intuición, percepción sensorial o de cualquier otro tipo, sino del dato previo de unos conjuntos de elementos de naturaleza cualquiera, aunque se los llame, por tradición en el terreno geométrico, puntos, rectas, planos..., aunque también se les podía llamar «amor», «ley », «deshollinador»... (Frege, 1980, pp. 40-41). Conjuntos de partida cuya única condición es la de ser disjuntos entre sí. Así, los axiomas dejan de reflejar nuestras intuiciones sobre los elementos nucleares de cada teoría, y se convierten en formulaciones de las relaciones entre los mismos.

Hilbert se sitúa de lleno en el Hacer global y adopta sus conceptos-núcleo de partida. El conjunto inicial está dado: un conjunto de elementos existentes cuya naturaleza, en sí, no importa porque lo que importa son las relaciones que los ligan. Bien entendido que esos conjuntos no tienen por qué ser correlatos de objetos físicos en el caso geométrico, no pueden tenerlo en el de la Aritmética, el Análisis, el Álgebra... Éstas parten de agregados que son, en principio, de cardinal infinito.

Con ello, los tres planos señalados —epistémico, lógico, metodológico— se ven afectados de modo radical. Los axiomas no pueden tomarse como proposiciones aisladas que reflejan «hechos» acerca de objetos dados, o abstraídos, de un sector fenoménico de lo real, sino que han de tomarse como sistema de axiomas que, en su conjunto, caracterizan unas relaciones o funciones entre los elementos de esos conjuntos. Tampoco puede decirse, de ellos, que sean «verdaderos», ni autoevidentes...

Hilbert ha cambiado el estatuto del método axiomático y lo ha convertido en instrumento de formación de conceptos a la vez que elemento sustentante, fundacional, de la praxis matemática.

Tratando de evitar la arbitrariedad en esa formación de conceptos y tratando de dar firmeza al elemento sustentante, impone una condición hasta ese momento inexistente al método axiomático: los primeros principios elegidos, los axiomas, han de ser no-contradictorios. Y ello porque los axiomas no reflejan propiedades de objetos o sectores de lo fenoménico previamente dados, sino que formulan relaciones posibles entre los elementos de sistemas previamente aceptados.

Es una problemática grave: no basta dar una globalidad y su posible estructura a partir de otras globalidades, y decir que las nuevas propiedades son meras generalizaciones de las propiedades del sistema de partida. Ello implica, en el fondo, una apoyatura ontológica. Y lo que se ha descartado es, precisamente, esa apoyatura. Eliminada, hay que acudir a otros puntos de apoyo: el metodológico y, en él, el aspecto demostrativo como clave. Hay que demostrar que efectivamente estas relaciones son correctas. Y para Hilbert esa corrección se centra en demostrar la no-contradicción de los axiomas elegidos.

Es idea que va en paralelo a la praxis geométrica donde las geometrías no-euclídeas alcanzan su estatuto existencial pleno a partir, precisamente, de la demostración de su no-contradicción, aunque sea relativa. Algo parecido a lo que ocurrirá con los números complejos que obtendrán su carta de ciudadanía a través de la representación geométrica en primer lugar y, después, a través del método genético.

Si es idea en paralelo al campo geométrico, el método axiomático sufre una transformación en cuanto a su concepción, al aplicarlo a otros campos matemáticos como, en primer lugar, a la Aritmética. Transformación porque es el sistema de axiomas el que establece la existencia no ya de objetos previamente dados, aunque de naturaleza desconocida, sino de la estructura a la que dichos objetos vienen sometidos. Y no puede obtener la no-contradicción a través de un modelo o una representación en una teoría previamente dada: la teoría se constituye por el propio sistema de axiomas, en sí.

En este sentido es destacable que, en esta primera formulación del método axiomático, Hilbert le asigne dos papeles:

a) Dar seguridad, rigor, a unos campos de conocimiento previamente obtenidos por otros procedimientos, campos que resultan de las fases ingenua y formal del proceso matemático. Cuando Pasch, Hölder, Hilbert, Peano..., adoptan el método axiomático lo hacen como método de análisis e instrumento de seguridad y rigor para disciplinas ya elaboradas. Para la Geometría en primer lugar, para la Aritmética en segundo, y se reitera el procedimiento para otras disciplinas como hará el mismo Hilbert axiomatizando la teoría de los vectores, teoría un tanto confusa hasta el momento de esa rigorización. De ahí la petición de Hilbert, en 1900, de que el método se aplique a disciplinas como la física.

Este aspecto tiene implicaciones de muy largo alcance, en otro sentido: se supone que, por el procedimiento genético, se obtienen los contenidos de una disciplina, pero en el desarrollo de la misma no hay lugar para un análisis detallado de sus elementos conceptuales. Es su axiomatización —enfocado el método axiomático como instrumento de análisis crítico conceptual— la que los pondrá de relieve. Así Pasch puso de manifiesto la ausencia en la geometría euclídea de un axioma que reflejara la noción de orden de los puntos de una recta, mostró la ausencia de un axioma que especificara la noción «entre». Y Pasch formuló el principio, que hoy lleva su nombre:

> Una recta que corta a un lado de un triángulo en un punto distinto del vértice debe cortar también a otro lado del triángulo.

De modo análogo Hilbert mostró cómo los principios arguesianos estaban involucrados de manera implícita en la Geometría, modelo de formulación durante siglos.

Un análisis crítico sobre una disciplina ya dada, además de rigorización y seguridad, posibilita establecer qué conceptos entraña cada uno de esos axiomas, o grupos de ellos. Así, en lo geométrico euclídeo Hilbert divide el sistema de axiomas en cinco apartados. Cada uno manifiesta un concepto distinto de la geometría euclídea: el concepto de conexión viene introducido y delimitado por siete axiomas, se requieren cinco para el de orden, uno para el de paralelismo o axioma euclídeo, seis para la noción de congruencia y uno para la de continuidad o axioma arquimediano.

Con un análisis crítico como el anterior —en el cual no se trata de minimizar los axiomas y conceptos primitivos, ni de establecer la posible independencia entre ellos— se ve conducido el matemático no sólo a estudiar los conceptos básicos métrico-euclídeos, sino a estudiar las consecuencias que se obtienen de cada uno de los sistemas y de la alteración de los mismos. Consecuencias que permiten ir más allá del análisis conceptual, un más allá que puede conducir a conformar nuevas geometrías, nuevos sistemas geométricos o teorías en cuanto a su formulación lingüística.

También permite establecer, consecuencia de la clarificación obtenida, el menor número de términos «primitivos» o no definidos de una teoría. Así, la geometría euclídea en el plano se puede reducir conceptualmente a sólo dos elementos primitivos o constantes no lógicas, «punto» y relación «estar entre»; bastan estos dos elementos para su caracterización.

En otras palabras, el método axiomático como instrumento de análisis crítico conceptual sobre una disciplina ya dada, además de dar seguridad a dicha teoría por establecer con nitidez los principios y conceptos fundamentales de la misma, permite elaborar nuevos sistemas, nuevas teorías, e indicar los enlaces entre las mismas. Además de seguridad, muestra un papel metodológico de fecundidad.

Desde esta perspectiva el método axiomático podría verse ligado al método genético como una segunda cara, formando parte de lo que, muy posteriormente, se denomine contexto de descubrimiento. No sólo da rigor y análisis crítico conceptual: desde este análisis también se eleva a elemento de fecundidad constructiva.

b) El segundo papel asignado al método axiomático tiene un carácter diferente: el constructivo existencial. Va a ser por el método axiomático por el cual se caracterice, a partir de un sistema o agregado de elementos cualesquiera, una nueva entidad, un objeto o concepto de segundo nivel. Con el método axiomático se construyen nuevos objetos —calificados en general con el término «estructuras» o «espacios»—, cuyas propiedades se plasmarán en teorías axiomáticas particulares, sectoriales, cada una con un contenido propio. Distintos objetos o conceptos y distintas teorías como ramas de un tronco, el Hacer matemático, con sus características intrínsecas, propias, especiales.

Por construir distintas estructuras o espacios, que conllevan la elaboración de sus teorías correspondientes, se rompe la unidad del edificio matemático —y retomo aquí la metáfora inicial—, rotura de unidad en cuanto al aspecto ontológico. Y mantener la unidad de la Matemática pasa ahora por aceptar el Hacer global como marco general —admisión de colectividades y noción de función o transformación—, así como por el manejo del método axiomático. Método axiomático para dar no sólo justificación y seguridad a alguna de las teorías previamente elaboradas, sino para dar existencia a objetos y conceptos de segundo nivel a partir de los cuales construir, ahora, las teorías matemáticas correspondientes.

III. EL MÉTODO AXIOMÁTICO COMO INSTRUMENTO DE DEFINICIÓN EXISTENCIAL

Cuando Hilbert adopta el método axiomático como instrumento formador de conceptos, desde finales del siglo XIX y primeros años del XX, distingue nítidamente los dos aspectos últimamente señalados: por un lado, dotar de seguridad a lo obtenido genéticamente por otros procedimientos —matemática «ingenua» y matemática formal—, con sus secuelas de rigor y nuevas elaboraciones; por otro, afirmar el papel del método axiomático como instrumento de construcción existencial, con la exigencia de demostrar su no-contradicción interna.

Al plantear el Problema II en 1900, en el II Congreso Internacional de Matemáticos de París, Hilbert indicará la problemática existencial y el papel de la axiomática en ella:

> si se confiere a alguna noción atributos que se contradicen, diré que, desde el punto de vista matemático, esa noción no existe. Por ejemplo, en Matemática no existe ningún número real cuyo cuadrado sea igual a -1.
>
> Si, por el contrario, se puede demostrar que los atributos conferidos a una noción no pueden nunca, por aplicación de un número finito de deducciones lógicas, conducir a una contradicción, diré que se ha demostrado la existencia matemática de la noción en cuestión, por ejemplo la existencia de un número o de una función que cumplen ciertas condiciones.

En el fondo, estas palabras suponen aceptar los tipos mencionados de demostración existencial. Hasta aquí, sin problemas. El problema surge en lo que viene a continuación:

> Si se toman los axiomas relativos a los números reales de la Aritmética, la demostración de la no-contradicción de los axiomas de la Aritmética sería al mismo tiempo la demostración de la existencia matemática del conjunto de todos los números reales, es decir, del continuo.

Un continuo que no es, ya, el de todas las fracciones racionales, de todas las leyes posibles según las cuales pueden proceder los elementos de una serie fundamental o de Cauchy, sino un conjunto de elementos cuyas relaciones vienen regidas por los axiomas. Axiomas que, además, hace que sean aceptables aquellos hechos que se pueden deducir de ellos por medio de un número finito de deducciones lógicas.

Para Hilbert, en 1900, tanto el continuo como el conjunto de todas las funciones existen en el mismo sentido que el sistema de todos los números racionales o que las clases de números y potencias más elevadas de Cantor, pero con una diferencia: para los primeros se puede formular un sistema de axiomas no-contradictorio, lo que no ocurre con la clase de los transfinitos de Cantor. De aquí que esta última clase sea un concepto que, en principio, carece de existencia matemática y por ello tenga que buscarse un sistema de axiomas no-contradictorios para la misma.

De esta forma, para Hilbert, y de manera aún un tanto confusa, porque parece limitarse a la Aritmética, un sistema axiomático implica la existencia de lo que define, siempre que sea no-contradictorio. De manera confusa, en un principio, se trata de establecer que el sistema axiomático deja de ser un conjunto de proposiciones acerca de un dominio dado y se convierte, realmente, en una definición existencial de un objeto, de un concepto de segundo nivel. A la vez, el sistema de axiomas es el punto de partida para el desarrollo proposicional de la teoría acerca del objeto o concepto que él mismo define.

Se tiene, aquí, una inversión respecto a la concepción tradicional en la cual la no-contradicción interna para un sistema de axiomas no dota de existencia a lo definido, ya que esa no-contradicción se obtiene a partir del dato de un referencial, mostrando que hay una interpretación de los símbolos indefinidos que verifican todos los postulados de manera simultánea. Es decir, la no-contradicción se establece a través de una interpretación o modelo ya existente. Lo cual no es más que la generalización de asignar un referente a un término para dotarle tanto de verdad y significado, como de asegurar la existencia del término.

En la idea de Hilbert al convertir la definición implícita en existencial, hay que demostrar que lo ahora definido es, de modo efectivo, no-contradictorio y, por ello, existente. Demostración que ha de hacerse sin acudir a interpretación alguna, y por un proceso demostrativo finito. Hilbert muestra su acuerdo con el hecho de que la no-contradicción de una teoría como la Geometría se haga a través de una interpretación en otra geometría o en la Aritmética y es lo que plasma en su obra *Fundamentos de Geometría.* Pero en 1904 insistirá en que para la demostración de la no-contradicción de la Aritmética —bien entendido que se trata aquí de teoría de números y del análisis—

la llamada a otra disciplina fundamental no parece razonable.

Y en la demostración interna no pueden usarse más que las nociones base de esa Aritmética, si es que se considera que es la Aritmética la disciplina más fundamental. Y el problema es, entonces, averiguar cuáles son esas nociones base.

En 1901, Hilbert dio una lectura en la Sociedad matemática de Gotinga sobre los problemas de completud y decisión respecto a la verdad o falsedad de una proposición a partir de los axiomas. En las notas tomadas por uno de los asistentes a la conferencia, E. Husserl, Hilbert se preguntaba retóricamente:

> ¿Tendría el derecho a decir que toda proposición obtenida sólo con los naturales debe ser verdadera o falsa sobre la base de los axiomas para los naturales? Cuando aseguramos que una proposición está decidida sobre la base de los axiomas de un dominio, ¿qué podemos usar para ello además de los axiomas? El total de la lógica. ¿Qué es esto? Todos los teoremas que son independientes de toda particularidad de un dominio de conocimiento, que se siguen independientemente de todos los «axiomas especiales», de todo material de conocimiento. Pero con ello llegamos así a un punto seguro: ¿en el dominio de la lógica algorítmica?, ¿en el de los cardinales finitos?, ¿en la teoría de combinaciones?, ¿en la teoría general de los números ordinales? Y, finalmente, ¿no es la más rica teoría de conjuntos misma puramente lógica? [De Wang, 1991, p. 102.]

Para Hilbert, como para Dedekind y Cantor, Lógica y Teoría de conjuntos son idénticas. Desde esa identificación, cada proposición está decidida en cuanto a su verdad o falsedad por los axiomas, y no por interpretación alguna, interpretación que supondría la particularidad de un dominio cualquiera de conocimiento, de contenido. Con una precisión, esta determinación de la verdad de la proposición, decidida por los axiomas, no es idéntica a la cuestión de la decidibilidad o existencia de un proceso algorítmico que dé solución, en un proceso finito, a cada problema que pueda plantearse. Aquí se está tratando con el problema de la existencia como consecuencia directa de la demostración de la no-contradicción de los axiomas. Y esta no-contradicción, demostrada, posibilita asegurar la verdad de los teoremas porque ha conseguido establecer la existencia de lo definido.

El problema se centra en que esa demostración no puede hacerse a través de una interpretación: ¿dónde interpretar lo más general, la teoría de conjuntos, que es la propia Lógica, y en ella la Aritmética?

Que esta inversión del método axiomático desde el cual el método axiomático se transforma en instrumento definidor existencial de objetos y, simultáneamente, en instrumento de construcción de sus teorías científicas correspondientes, constituye una novedad para los matemáticos del momento —y una creación personal de Hilbert—, lo reflejan los apuntes que tomara Veblen de la clase de Moore y que fecha en otoño de 1901:

> La idea de la demostración de la existencia de una ciencia es debida probablemente a Hilbert (Congreso de París). La demostración de la existencia de Una Ciencia Matemática podría hacerse demostrando, por un proceso finito sobre la base de los axiomas, que es imposible alcanzar por un proceso finito sobre la base de los axiomas una conclusión contradictoria. [De Scanlan, 1991, p. 993.]

Novedad que no todos los matemáticos aceptan porque supone un cambio de estatuto radical, no sólo del método axiomático en sí, sino de la propia formación de conceptos y teorías en el Hacer matemático. Representativos de esta no aceptación se tienen, entre otros, a Peano, a Frege... Peano, que es, precisamente, uno de los campeones del método axiomático desde finales de siglo, pero de un método axiomático enfocado a la manera tradicional, enfocado como instrumento dador de seguridad y claridad conceptual. Por su lado, Frege, realizando una serie de críticas al enfoque hilbertiano primero de manera privada, epistolar, y luego pública en dos series de ensayos.

En la carta de réplica a Frege, de 29 de diciembre de 1899, Hilbert explicita su concepción del método axiomático más aún que en el libro que sirve de pretexto para el intercambio epistolar: un sistema de axiomas no define los elementos de un conjunto, define la estructura o campo de juego que permite construir, posteriormente, la teoría asociada.

Aunque Frege se mantiene en el enfoque tradicional va a provocar un cierto cambio en el mismo, mera consecuencia de su intento de dotar de rigor al manejo del método axiomático. Así, dada una disciplina habrá que explicitar todos los axiomas —considerados como verdades evidentes— y exigir que todas las demás proposiciones sean demostradas a partir de los axiomas, sin acudir, en el proceso demostrativo, a procesos intuitivos o psicológicos. Hasta aquí, Frege adopta el método axiomático en el primer papel señalado por Hilbert, dar seguridad y rigor a una disciplina ya elaborada.

Pero hay un punto a destacar: Frege exige rigor lógico. Y para ello no sólo hay que explicitar todos los axiomas, sino también todos los medios admisibles de demostración. Esto último no se hacía en el manejo del método axiomático, ni en su versión tradicional ni en la versión hilbertiana. Y un punto más: una vez realizada esta explicitación, Frege exige pasar a una conceptografía adecuada, a un lenguaje sígnico propio sin contaminación del lenguaje natural que evite recursos de intuición. Conceptografía que, en el caso de la Aritmética, no es otra cosa que la Lógica formal que Frege ha elaborado. Petición en línea con la exigida, también, por Peano, para quien la pasigrafía constituye el vehículo imprescindible para la expresión del Hacer matemático.

Son exigencias que implican la formalización de una disciplina previa mediante la formalización de los axiomas y de las reglas de derivación. Formalización que no significa otra cosa que subsumir el método axiomático en la Lógica.

Con una precisión: la formalización para Frege significa precisión derivativa sintáctica, no cambio semántico alguno. Y ello porque las fórmulas del lenguaje formal siguen siendo, para él, proposiciones verdaderas, con contenido de pensamiento, los de la disciplina que se axiomatiza y después se formaliza. En Frege no hay separación entre sintaxis y semántica, no hay posibilidad de establecer niveles lingüísticos.

Lo que no significa que quien siga estas exigencias no rompa el enlace «signos-contenido de pensamiento puro» y lleve las derivaciones al plano estrictamente sintáctico. Es lo ocurrido posteriormente, por lo cual puede decirse que tanto Peano como Frege se encuentran en los auténticos orígenes del formalismo sintáctico.

Independiente de los rechazos fregeanos, hay que observar que desde la posición «tradicional» del método axiomático el problema de compatibilidad o no-contradicción ni se plantea: si los axiomas son verdaderos y la verdad se transmite desde los mismos hasta los teoremas, éstos son verdaderos y toda la teoría lo es. Lo que cabe plantear es la independencia de los axiomas, con la posible reducción de los términos indefinidos al igual que si, elegidos distintos axiomas, cada bloque es suficiente para reflejar el total de la disciplina, es decir, si son o no completos y, con ello, equivalentes o no entre sí...

Es problemática que cambia en el nuevo enfoque del método axiomático, en la inflexión que supone el paso de un enfoque «tradicional» a uno «moderno». Cambio en el que creo que las geometrías no-euclídeas —tanto las métricas como, en cierto sentido, la proyectiva— desempeñan un papel esencial: cada sistema geométrico, cada geometría describe una estructura abstracta. Los teoremas de la teoría no expresan, en sí, ideas verdaderas o falsas acerca de un ámbito determinado de la realidad espacial, porque los axiomas nada dicen de esa realidad espacial, aunque puedan ser interpretados en alguno de esos ámbitos. De aquí que no cabe adscribir a cada una de las proposiciones de una Geometría, ni a la Geometría en sí, el calificativo de verdadera o falsa; lo que se puede pedir de cada geometría es que sea una construcción conceptual coherente. Lo que ahora puede afirmarse no es la verdad de una determinada geometría sino si es aplicable o no a un ámbito de lo real. Las geometrías pierden el estatuto de *la* verdad absoluta en cuanto adecuadas o correspondientes a la realidad y se convierten en construcciones más o menos convenientes para el conocimiento y transformación de esa realidad.

Es un cambio radical en cuanto a la noción de verdad como propiedad atribuible a las proposiciones y teorías matemáticas —y a las científicas en general—. Las geometrías aparecen como construcciones conceptuales independientes a la noción de verdad como adecuación o correspondencia. Son construcciones axiomáticas, estén o no formalizadas, tengan el origen genético que tengan, respondan o no a elementos psicológicos o intuitivos... Y, ahora, se puede decir lo mismo en cuanto a las teorías construidas a partir de la definición implícita de estructuras, a partir del manejo del método axiomático como formador de objetos y conceptos.

En la misma línea el problema central deja de ser la independencia o no de los axiomas, para convertirse en el de ser construcciones coherentes, es decir, no-contradictorias. Y como esa construcción se realiza a partir del sistema inicial de axiomas, ha de ser dicho sistema axiomático el que no sea contradictorio.

Además, y de modo evidente, con el nuevo enfoque la cuestión de suficiencia carece de sentido: la teoría viene dada, precisamente, por los axiomas. Son los que encierran toda la teoría y mediante el proceso demostrativo se van obteniendo las proposiciones pertenecientes a dicha teoría. En otras palabras, una teoría en su sentido formal proposicional no es más que el conjunto de todas las consecuencias «lógicas» de los axiomas, $Th=Cn(Ax)$. Los teoremas muestran lo que estaba, ya, contenido en los axiomas, por lo cual la demostración pasa a tener un papel revelador en el plano psicológico y en el epistemológico, no en el intrínseco conceptual. El sistema de axiomas y la teoría correspondiente no «reflejan» una teoría preexistente, en cuyo caso cabría plantear el problema de la suficiencia. Ahora, se va construyendo, desvelando, la teoría.

Ante esa pérdida veritativa que entraña el nuevo enfoque en lo geométrico, Frege afirmará que las geometrías no-euclídeas han de considerarse como la alquimia o la astrología que, en algún momento, se llegaron a estimar disciplinas científicas. Si el criterio de aceptación de una geometría es el de su verdad, sólo puede existir, para Frege, una geometría verdadera: la métrica euclídea. Las demás no pueden ser verdaderas porque niegan uno de los axiomas verdaderos de la métrica euclídea —el postulado V— y, de aquí que, al no corresponder a la verdad, deban considerarse «falsas» y, por consiguiente, eliminables...

Insisto: el sistema de axiomas es el que dota de existencia a la construcción conceptual siempre que se consiga la demostración de su no-contradicción. Y es a esta concepción a la que se liga Hilbert tratando de llevarla a cabo no ya en la Geometría, sino en la Aritmética —en el Análisis y la Teoría de números—. Lo explicitará en su correspondencia, en la comunicación de 1899 «Sobre el número», publicada en 1900, en el Congreso de París, en sus lecturas de 1901 y 1904, más que en el libro *Fundamentos de Geometría.*

1. LO EXISTENCIAL

Y desde los trabajos de Hilbert, el método axiomático se va a concebir tanto como instrumento formador de conceptos matemáticos, pretendidamente más riguroso y preciso que el considerado hasta ese momento, como formador de las teorías científicas correspondientes.

En el primer caso, y desde la Lógica tradicional, un concepto se caracteriza a partir de unas notas pertinentes o básicas; desde el enfoque cantoriano, mediante una ley, propiedad o predicado que termina plasmándose en el Axioma de comprehensión en la Teoría de conjuntos. En el caso fregeano la función o concepto define su extensión y se tiene que comprobar que algún objeto caiga bajo el concepto, es decir, que el concepto —o su extensión— no sea vacío. Y es lo que rechaza Hilbert, para quien estos tipos de formación de conceptos engendran dificultades, posibles antinomias o paradojas...

Ya he mencionado alguna de las críticas que se le puede realizar a la caracterización tradicional, especialmente las de psicologismo y no clarificación en cuanto a la pertinencia o no de las notas abstraídas. Dificultades que aparecerán igualmente en las líneas cantoriana y fregeana en forma de antinomias.

El método axiomático trata de evitar esas dificultades y se une tanto al método de definición por abstracción, o relación de equivalencia, como a la demostración por reducción al absurdo. Mecanismos constructivos existenciales que, mostrando profundas diferencias entre sí, plantean todos ellos y, fundamentalmente, un mismo problema ontológico: el estatuto existencial de lo definido, de lo demostrado.

Porque al adoptar como punto de partida el sistema o conjunto y establecer, en él, unas relaciones dadas por un sistema de axiomas, ¿se define algún elemento como entidad matemática, como un nuevo objeto del mismo nivel o de nivel diferente al correspondidente a las entidades que lo constituyen? Aceptar el método axiomático como un proceso constructivo de formación de conceptos, ¿supone aceptar la existencia de tales conceptos?

Indiqué que cuando el matemático establece en un conjunto una relación de equivalencia y admite como objetos las clases de equivalencia obtenidas, se produce un proceso constructivo. Reconocimiento de existencia de objetos a partir de una definición «por abstracción», aunque esos objetos sean, ahora, clases, es decir, conjuntos tomados como nuevas entidades... Abstracción, si tiene algún sentido emplear aquí ese término, nada psicológica por cierto. Es un instrumento constructor de objetos que no plantea fuertes dificultades en cuanto a su aceptación, porque se parte del conjunto y de las clases provocadas en él por la relación de equivalencia.

Pero lo que aquí se tiene es una inversión de procesos como los anteriores: ahora se define el objeto o concepto y después se busca el objeto que caiga bajo él. Los axiomas no describen propiedades de entidades matemáticas previamente dadas. Ahora el sistema de axiomas construye un campo de juego y, simultáneamente, regula el juego. Quiero decir, los axiomas son los elementos constitutivos del campo de juego, pero a la vez establecen y delimitan las características de los elementos que pueden aceptarse en el mismo. Simultáneamente, son los principios de los que derivar consecuencias, propiedades o teoremas que compondrán la teoría axiomática correspondiente.

Es claro que si el sistema de axiomas se convierte en definición implícita, si es el encargado de determinar existencialmente un campo de juego en el que trabajar, hay que imponer algunas condiciones a los axiomas: las reglas de juego han de ser mínimamente coherentes, no todo vale en ellas. Coherencia que exige que el sistema de axiomas no sea contradictorio. Bien entendido que es el sistema el que no ha de ser contradictorio y no cada axioma en su individualidad concreta, como quería Frege, sino el sistema como unidad. Es lo que se estima como clave para una posición como la formalista: existir como equivalente a consistencia, pero que trasciende a esa posición, porque la axiomatización no tiene por qué estar formalizada.

2. Dos líneas para el futuro

Conviene realizar, aquí, una precisión: el método axiomático como instrumento de formación de conceptos, de definición implícita, puede adoptarse en dos líneas que tienen sus consecuencias «filosóficas», y muy diferentes entre sí.

Por un lado, la línea que en principio sigue Hilbert. Lo que define un sistema de axiomas es un concepto de segundo nivel —espacio, estructura—, sin tener en cuenta la naturaleza de los objetos de los conjuntos en los que se establecen las relaciones. Esos objetos pueden ser denominados por términos arbitrarios: ya he citado la carta de Hilbert a Frege en la que afirma que en Geometría se pueden nombrar los elementos de los conjuntos base por «punto», «recta», «plano» o por «amor», «ley», «deshollinador»; más matemáticamente hablando, por *x, y, z*... Lo cual implica, a su vez, que el concepto de segundo nivel puede ser aplicado a múltiples campos.

Es decir, el sistema de axiomas caracteriza lo que hoy cabría denominar sistema formal, que tiene una infinidad de sistemas en los cuales aplicarse. Es un enfoque en línea con lo que hoy puede denominarse Teoría de modelos. Enfoque ligado, íntimamente, con el trabajo geométrico antes señalado.

Como consecuencia es claro que carece de sentido plantear la cuestión de existencia de objetos con independencia al modelo en el cual se trabaje. Y también carece de sentido afirmar de una proposición que es verdadera en sí: sólo tiene sentido hablar de su verdad en el modelo en el cual cobre sentido. La cuestión que ahora tomaría una relevancia especial sería la de categoricidad; cuestión que va a ser planteada, por vez primera, por la escuela americana, en concreto, Veblen-Huntington, en los entornos de 1902-1904.

En esta línea, las cuestiones de carácter ontológico quedan devaluadas radicalmente en beneficio de un enfoque metodológico estricto. Reduccionismo que, en el caso hilbertiano, corresponde a lo que califiqué de reduccionismo metodológico, en el aspecto de fundamentación del Hacer matemático. No ontológico porque, aquí, no importa «el» objeto, o «la» estructura... Carece de sentido fundamentar nada en lo que carece de naturaleza...

Como contrapartida, si los axiomas pierden su carácter de proposiciones verdaderas de unos objetos, y con ello, su nota de posible auto-evidencia, el papel de la lógica se hace esencial: los sistemas han de ser consistentes. Y, además, hay que establecer que cualquier otra proposición que pueda obtenerse en el sistema, se obtenga; es decir, el sistema ha de ser decidible.

Con un problema nítidamente señalado por Poincaré: la arbitrariedad electiva de los axiomas y, con ello, una posible separación radical de la Matemática de las Ciencias de la naturaleza. Se pasaría a la construcción de sistemas formales arbitrarios, convencionales, a un juego de ajedrez desprovisto de contenido, contenido que debería tener si mantuviese su enlace con las Ciencias de la naturaleza. Hilbert sólo replicará en 1919 señalando que

> la formación de los conceptos en matemáticas está guiada constantemente por la intuición y la experiencia, por lo que la matemática total es una estructura unificada no-arbitraria. [Hilbert, 1992, p. 5.]

E insistirá:

> las diferentes disciplinas matemáticas existentes son, consecuentemente, partes necesarias en la construcción de un desarrollo sistemático de pensamiento; este desarrollo comienza con cuestiones simples, naturales y procede sobre una línea que esencialmente está trazada por razones internas. No hay lugar para la arbitrariedad. La Matemática no es como un juego que determina la tarea por reglas arbitrariamente inventadas, sino más bien un sistema conceptual de necesidad interna que sólo puede ser así y no de otra manera. [íd., p. 14.]

Todavía Hilbert mantiene la unidad estructural de la Matemática, su no-arbitrariedad, su enlace con las ciencias de la naturaleza... Hay una matemática «real» a la que agregar elementos «ideales» como en Geometría Proyectiva. Sin embargo, la línea iniciada por Hilbert puede independizarse de sus opiniones y, de modo efectivo, se llega a la elaboración de sistemas formales mediante una definición axiomática sintáctica y se espera que alguien encuentre un modelo suyo. De hecho, ha sido una práctica bastante habitual en los terrenos de la Lógica formal en estos últimos años.

Hay una segunda línea en la admisión del método axiomático como formador de conceptos: la que, en cierta manera, mantiene su enlace con un proceso de carácter genético. La que considera el método axiomático como instrumento de definición, pero de las propiedades de una ley de composición en un conjunto previamente dado. Con ello, se convierte en método de definición de estructuras. Es el manejo que, por ejemplo, realiza Hölder cuando caracteriza la noción de magnitud o concepto métrico en 1901, o cuando define la noción de «grupo abstracto», o Huntington cuando establece el conjunto completo de postulados para la magnitud continua en 1902...

Es línea que no pretende ser fundamentante, sino que puede ser calificada de *algebraica* (cfr. Taylor, 1993). En ella se construyen estructuras y no ya sistemas formales que tendrán sus modelos. Es línea que va en paralelo al requerimiento de dotar de seguridad y rigor a la praxis matemática. Es claro que la condición de consistencia exigida al sistema de axiomas pierde su condición de nota esencial, porque el método axiomático como formador de conceptos se alinea con los otros procesos de construcción y reconocimiento de nuevos objetos matemáticos al mantenerse en plano estrictamente epistemológico, aunque adopte, como metodología, la axiomatización.

Es en esta segunda línea en la cobran sentido nociones como la de categoricidad y su enlace con la completitud respecto a la noción de consecuencia semántica; consistencia tanto en su versión sintáctica como en su versión semántica, siempre que se adopte la línea sugerida por Peano, y también Frege como he mencionado antes, de una previa formalización y abandono de la formulación en lenguaje ordinario, lo que no adopta sino a largo plazo; independencia de los postulados a partir de modelos...

Son dos líneas que en los primeros momentos no aparecen muy claramente separadas. Pero que tienen su importancia en la praxis matemática porque es la segunda la que adoptan los matemáticos en una corriente axiomatizadora algebraica. En ella se abandonan, en general, los planos ontológico y fundamentante.

Lo cual no implica que algún matemático, como Zermelo, adopte el enfoque metodológico axiomático y acepte un reduccionismo radical en lo ontológico: los axiomas expresan las propiedades de unos elementos previamente dados... Evidentemente, un desacuerdo total con la línea seguida por Hilbert, aunque al exterior parezcan concordar en todo...

IV. LA POLÉMICA FREGE-HILBERT: CONCEPTOS EN JUEGO

Voy a detenerme en lo que se ha calificado *polémica Frege-Hilbert*. He indicado que tras la publicación por parte de Hilbert de

Fundamentos, Frege inicia una correspondencia crítica en 1899 con Hilbert. Correspondencia que pretende, posteriormente, publicar. Ante la negativa de Hilbert, Frege edita dos artículos en 1903 en los cuales recoge el contenido de sus cartas. Ante la no respuesta de Hilbert y sí de Korselt en 1903, Frege publica otros tres artículos en 1906 con el mismo título, «Sobre los Fundamentos de la Geometría». ¿Pretendió Frege una polémica pública en búsqueda quizá de un reconocimiento a través del prestigio de Hilbert?

Si me detengo en ella —a pesar de reiterar algunos puntos— es porque en la misma se manifiesta una pugna por realizar precisiones en los conceptos, en la terminología del nuevo hacer. Hilbert y Frege han percibido con nitidez que se produce un cambio en el Hacer matemático: cambio en la formación de conceptos con una transformación en los planos lógico, epistemológico, metodológico... Y la «polémica» va acompañada de malentendidos, atribuciones dogmáticas... Pero supone un elemento auténticamente representativo de la actitud general de los matemáticos del momento.

Frege adopta una postura absolutamente tradicional, incapaz de admitir lo que el nuevo hacer implica en su radicalidad, respecto al método axiomático. Incapaz de asimilar las consecuencias profundas de este Hacer a pesar de que, de hecho, y en su trabajo, Frege asume el enfoque del mismo y, más aún, a través de su *Conceptografía* va a elaborar la Lógica formal que, axiomatizada y formalizada, se convertirá en una apoyatura central del Hacer que critica.

Frente a él, Hilbert asume el papel de defensor del nuevo enfoque, transformador del proceso genético en un proceso global axiomático finito; método axiomático como clarificador conceptual pero, más importante, definidor de objetos matemáticos de segundo nivel como los de espacio, estructuras... Adalid del método axiomático en el Hacer matemático, también lo propondrá en el hacer físico, y ello desde 1900.

Ante la carta crítica de Frege, el 29 de diciembre, Hilbert responde:

> Cada teoría no es sino un tinglado o esquema de conceptos, y sus elementos pueden ser pensados arbitrariamente. Si entiendo por puntos, etc., cualquier sistema de cosas, por ejemplo el sistema formado por amor, ley, deshollinador, etc., y considero que todos mis axiomas resultan válidos para esas cosas, entonces también resultan válidos para esas cosas mis teoremas, como, por ejemplo, el de Pitágoras. Con otras palabras: cada teoría puede ser aplicada a una infinidad de sistemas de elementos básicos.

La respuesta de Frege es clara y rotunda. El 6 de enero criticará a Hilbert:

> Me parece que lo que usted en realidad quiere definir son conceptos de segundo orden, pero que usted no los distingue claramente de los de primer orden.

Frege ha visto nítidamente que los axiomas —en este caso los geométricos, pero atribuible a cualquier otro sistema—, si definen algo de modo implícito, definen no conceptos de primer orden como punto, recta, plano..., sino el concepto de segundo orden de espacio euclídeo.

Lo cual no es crítica alguna, sino la certera visión de lo que el nuevo enfoque del método axiomático entraña: algo que estaba en los *Fundamentos* de Hilbert. Aquí explícitamente indica que parte del dato previo de tres sistemas de objetos cuya naturaleza no le importa y a los cuales denomina puntos, etc., y es entre los elementos de los tres sistemas entre los que establece unas relaciones, los axiomas, que son los que dotan de estructura geométrica a dichos sistemas. No define, ni le importa, los objetos de primer orden: están dados; lo que importa es la estructura geométrica, los distintos espacios euclídeos en el ejemplo fregeano que, como estructura, tendrá multitud de interpretaciones. Y es lo que ha vuelto a repetir en la carta a Frege de 29 de diciembre.

Frege ha visto, claramente, que se tiene un cambio de estatuto y de significado de todos los conceptos utilizados. Y es algo con lo que Frege no estaba de acuerdo, aunque no supo explicitar su crítica en este punto. Porque lo que se tiene son dos planos diferentes: Hilbert se sitúa en un terreno básicamente metodológico; Frege en uno básicamente ontológico. Desde el primero, no hay que suponer o admitir entidades objetuales más o menos misteriosas como la entidad «punto», o «recta», como puntos de partida. Basta manejar sistemas de elementos cualesquiera que satisfagan unas relaciones y ya se interpretará. Desde el segundo, esas relaciones sólo tienen sentido a partir del dato previo de unas entidades que son las que confieren de verdad a las posibles relaciones.

Siguiendo en parte la polémica, me limito a esbozar ese cambio de estatuto de axiomas, nociones primitivas, demostración, verdad, aunque, de hecho, me haya referido a estos conceptos de manera constante en lo anterior.

a) *Estatuto de los axiomas.*—Es claro que no son y no pueden ser demostrados en el interior de la teoría que axiomatizan, y ello frente a la concepción tradicional y a la fregeana de que el papel de los axiomas es relativo y pueden ser elegidos unos u otros. Concepción a la que posteriormente se sumará Russell. Esta relatividad queda supeditada, precisamente, al dato previo de la disciplina a la que los axiomas únicamente sistematizan. Pero si los axiomas «definen» la estructura, es que tienen un papel especial. Y surge el problema: ¿qué justificación reciben esos axiomas? ¿Qué fuerza proporcionan a las demostraciones que se apoyan en ellos? El problema es de génesis fundacional con claro matiz epistemológico, no lógico.

Para Frege, situado en el plano tradicional, la justificación de los axiomas deriva del campo en el que la disciplina se esté manejando. En el caso geométrico, los axiomas obtienen su justificación desde la intuición del espacio real. En el caso de la Aritmética, desde los axiomas lógicos. Y la pregunta se traslada a la justificación de estos primeros principios que no necesitan ni pueden ser demostrados. Frege admitirá que, aquí, la Lógica no puede dar respuesta. Únicamente indicará que los axiomas poseen una propiedad especial: la autoevidencia. Y ello implica que no pueden elegirse las proposiciones que uno quiera como axiomas, sino aquellas que, por lo pronto, no sean falsas y, además, sean suficientes para generar los demás teoremas. Una muy débil justificación...

Por verdaderos los axiomas son no-contradictorios. Ya indiqué que éste no era problema sustancial para la visión tradicional del método axiomático. Con palabras de Frege:

> Llamo axioma a los enunciados verdaderos, pero indemostrados [...]. De la verdad de los axiomas ya se sigue que éstos no se contradicen entre sí. Por tanto esto no requiere prueba adicional alguna.

Se parte de la verdad y, por tanto, no hay lugar para la problemática de consistencia. Y son verdaderos porque existe, previamente, un objeto al que los axiomas refieren. Frege, como señalé, se mantiene en un terreno estrictamente ontológico. Desde él señalaría que Hilbert parece decir que si los axiomas no se contradicen entre sí entonces son verdaderos: Frege sigue ligando la no-contradicción con la previa existencia de objetos y, por ello, con la verdad, y lo atribuye erróneamente al nuevo enfoque, en el cual ve, acertadamente, que es la definición implícita la que dota de existencia.

Frente a esta concepción, Hilbert únicamente exige que los axiomas sean no-contradictorios. Con ello las cuestiones de verdad se trasladan a relaciones deductivas. Los axiomas no describen realidad objetual dada alguna, y nuevos sistemas de axiomas crean nuevas teorías matemáticas. Con lo cual, decir que una proposición α es teorema de una teoría T viene a ser lo mismo que decir «α es deducible de $Ax(T)$», donde $Ax(T)$ es una caracterización de los axiomas de la teoría T.

El problema epistemológico de justificar el papel de los axiomas ha variado: no se trata de que procedan de lo real por una u otra intuición abstractiva; se trata de un problema de deducción, es decir, de lo epistemológico se pasa a lo metodológico o a lo que calificar de plano puramente lógico.

Con ello se evitan, simultáneamente, llamadas a algún tipo de intuición, sea empírica, kantiana, platónica... Un teorema de una disciplina matemática sólo puede considerarse establecido cuando se ha deducido de los axiomas que la caracterizan. Y es a esta posición a la que hacen referencia las preguntas tan retóricas que tomó en sus notas Husserl.

Llevada al extremo, es posición que culmina en el deductivismo formalista radical, donde se reducen las cuestiones de significado y referencia al mínimo. Y ello porque una deducción desde los axiomas se puede llevar a cabo sin presuposiciones respecto a la verdad de los axiomas ni a la ontología subyacente de los mismos, por lo que se margina la cuestión de la verdad. Basta construir los términos no-lógicos como variables o letras esquemáticas. Una posición a la que, de momento, no llega Hilbert pero que quiero indicar como una consecuencia de lo que se encierra en la visión «moderna» del método axiomático.

Frege insiste en que lo que hace Hilbert —lo que se hace al manejar el método axiomático en su enfoque definicional constructivo— es definir conceptos de segundo nivel. En la terminología de Frege un concepto no es más que una función F y, por ello, es de la forma «x es un punto», $F(x)$, y es el argumento x el que tiene que ser reemplazado por el objeto «punto». Para Frege hay objetos x como puntos, líneas, planos..., y conceptos F de primer nivel que son funciones de un argumento, argumento que ha de ocupar el objeto correspondiente; también conceptos de segundo nivel $G(F)$... con sus extensiones asociadas —los conjuntos que van a formar los objetos que satisfacen la función proposicional $F(x)$ correspondiente, o que caen bajo tal extensión—. En el fondo, es la función la que crea su extensión pero, para ello, se tiene que dar un objeto de la misma, aquel que la satisface o cae bajo el concepto, pero un objeto ya existente.

Por ello, y como escribe en la carta de 6 de enero de 1900,

> la única forma de mostrar la no-contradicción de un concepto o colección de conceptos es exhibir algo que caiga bajo él (o bajo ellos) [...] la consistencia de una colección de conceptos no garantiza la existencia de algo que caiga bajo ellos; análogamente para conceptos individuales.

En el sistema conceptual de Frege un concepto de primer nivel viene dado por una expresión como $F(x)$ y, de modo análogo, una colección de conceptos por el sistema

$F(x)$
$G(y)$
$H(z)$
...

y para esta colección de conceptos han de encontrarse objetos que caigan bajo la extensión común a todos ellos. La existencia previa de objetos que pertenecen a la extensión común de los conceptos es lo que garantiza la consistencia, y ello porque la referencia de cada concepto o función proposicional es la verdad. Si $F(x)$ es «x conquistó las Galias», como existe un x —César— que hace que la proposición «César conquistó las Galias» sea verdadera, entonces «César» cae bajo la extensión del concepto «x conquistó las Galias» —«César» pertenece a la extensión o conjunto del concepto $F(x)$—. Por ser verdadera, al mostrar un objeto existente que cae bajo su extensión, se muestra la no-contradicción del concepto $F(x)$.

En contraposición al nuevo enfoque axiomático Frege recurre a un ejemplo ya clásico, el argumento ontológico. Sean los conceptos —o funciones proposicionales—

x es un ser inteligente	$I(x)$
x es un ser omnisciente	$O(x)$
x es un ser omnipotente	$O_p(x)$

la no-contradicción de estos tres conceptos no garantiza la existencia de un ser inteligente, omnisciente y omnipotente. Pero Frege, curiosamente, afirma de modo explícito:

> no puedo admitir tal manera de inferir desde la no-contradicción la verdad

cuando de lo que se trata no es de la verdad sino de la existencia.

Frege parte de la clásica concepción axiomática de que es la previa existencia la que dota de no-contradicción a los conceptos o fórmulas proposicionales adoptados como axiomas. Incluso mantiene que la existencia es de objetos, no de conceptos. Y ello a pesar de su afirmación de que los axiomas definen conceptos de segundo nivel, es decir, han de ser de la forma $F(f)$ con «f» como concepto de primer nivel. Pero como un concepto de segundo nivel —un conjunto de conjuntos— no es ni puede ser como los objetos punto, línea..., sino que ha de ser un sistema, agregado o colección que puede tener una cierta estructura interna, no puede ser, para Frege, un ente individual, un objeto de segundo nivel. Los sistemas, agregados o conjuntos y las estructuras que puedan comportar no son objetos, son universales en términos clásicos.

La crítica fregeana, realmente, afectaría al primer sentido de existencia de los tres que indiqué en Capítulo anterior: cuando se dan propiedades incompatibles entre sí entonces puede afirmarse que el objeto no existe. Por ejemplo: un número racional al que se le atribuya como propiedad poseer un desarrollo decimal infinito pero carente de ciclos; ese número racional no existe. O afirmar de un número real que es tal que su cuadrado es -1; no existe. Se puede afirmar, como quería Frege, que la contradicción del sistema o de la fórmula proposicional implica la no-existencia de lo que pretende caracterizar. En sentido negativo la no-contradicción puede manejarse para el problema de existencia: si es contradictorio un sistema de axiomas o fórmulas proposicionales, entonces el elemento definido no existe. Enfoque, ciertamente, válido para el Hacer matemático pero no para el Hacer global o conjuntista en el que se parte de la previa existencia, precisamente, de las extensiones de los conceptos en la terminología fregeana; en el que se parte de una posición inversa a la de Frege.

Es esta novedad la que Frege se niega a aceptar. De aquí que, desde la misma, realice una atribución errónea al nuevo enfoque. Y ello porque en el nuevo enfoque no cabe afirmar de los axiomas que sean verdaderos o falsos respecto a un objeto u objetos existentes previamente, como puede verse que ocurre en los sistemas geométricos. Los axiomas, en principio, carecen de contenido referencial y no son verdaderos o falsos por previamente adecuados o no a unos objetos. El contenido vendrá aportado posteriormente por unas interpretaciones en las cuales, ahora sí, tenga sentido decir que los axiomas, y con ellos los teoremas deducidos de los mismos, queden satisfechos —o sean verdaderos, pero con un sentido de verdad diferente al anterior, el clarificado por Tarski—.

Lo que establece el sistema de axiomas no-contradictorio es la existencia, no la verdad, de una estructura conceptual —no de un objeto singular— que puede satisfacerse en una interpretación. Es lo indicado por Hilbert frente a Frege. Los axiomas son, realmente, esquemas proposicionales y, por ello, predicados de segundo orden, y lo que muestran o exhiben es una estructura de conceptos y relaciones de primer nivel que satisfacen la propiedad definida por el sistema.

De hecho, en versión actual, lo que se tiene es la afirmación de que, si un sistema *K* es consistente, entonces posee un modelo. Y ello es válido para un sistema formal como la Lógica L_1, donde el teorema de completitud establece que cualquier relación definible por un conjunto sintácticamente consistente de fórmulas de primer orden tiene una estructura conjuntista que la satisface o cae bajo ella. Teorema de completitud para L_1 que hubiera sorprendido, evidentemente, a Frege por ir contra su concepción.

Aunque, satisfacción fregeana, en cuanto se amplía el sistema surgen problemas. El teorema de completitud no es válido para sistemas formales construidos en L_2: no toda teoría consistente posee un modelo, salvo que se admitan modelos no-canónicos.

Desde esta posición, con el cambio de estatuto para los axiomas, la demostración de independencia de cada uno respecto a los demás se hace a través de una interpretación o modelo. En el modelo se intenta que uno de los axiomas sea falso mientras que los demás se hacen verdaderos. Algo que se le mostraría monstruoso a Frege porque no puede sostenerse, en modo alguno, que un axioma sea falso: su significado es la verdad... Punto en el que también Russell se mostraría de acuerdo. En *Los principios de las Matemáticas,* 1903, escribirá:

> Se observará que el método de suponer falso un axioma, y deducir consecuencias de esta suposición, que ha sido hallado admirable en casos como el axioma de las paralelas, aquí no es universalmente válido. Porque todos nuestros axiomas son principios de deducción; y, si son verdaderos, las consecuencias que parecen seguirse del empleo de un principio opuesto no se seguirán realmente, por lo que argumentos de la suposición de la falsedad de un axioma son objeto aquí de falacias especiales [p. 15].

b) *Estatuto de los términos primitivos.*—Los términos primitivos en la versión «clásica» eran indefinibles, mientras que los demás se definían en función de los primitivos. Y, al igual que en el caso de los axiomas, la pregunta es: ¿de dónde y cómo reciben significado esos términos primitivos?

Desde la posición «clásica», y la fregeana, ese significado sólo puede ser elucidado, aclarado, explicado, pero nunca definido formalmente. Y esa aclaración permite la comprensión entre los distintos científicos. Constituye una parte de la propedéutica, pero no tiene lugar en el interior de la praxis científica. En el plano propedéutico pueden manejarse, incluso, metáforas en la presentación informal. Algo que es común a todas las teorías abstractas, ya que sus términos sólo pueden ser aprehendidos y comprendidos contextualmente.

Con ello se trata de evitar llamadas a la intuición empírica o abstractiva de los conceptos primitivos, que era lo tradicional y que mantendría Pasch, por ejemplo. Quien criticaría a Euclides en el sentido de que en *Elementos* establece una lista de definiciones que jamás usa y que carecen, además, de sentido. Los términos primitivos no se definen, se aprehenden.

Para Hilbert los axiomas no definen implícitamente los términos primitivos, sino la estructura. Los elementos primitivos deben cumplir las condiciones establecidas por los axiomas que los estructuran. Toda teoría es un esquema de conceptos junto a unas relaciones necesarias con otros conceptos, relaciones establecidas por los axiomas. Hay que tener presente que, con ello, se despoja de ontologismos a los elementos que se están manejando: la naturaleza de los elementos de cada sistema de partida no importa; importará en el momento en que se hagan las interpretaciones, se busquen los modelos. Como construcción conceptual la teoría podrá tener multitud de interpretaciones según cuál sea la naturaleza de los objetos que en cada una de ellas se establezca; pero no en sí, porque de modo interno es una construcción formal. Naturalmente la definición no la hace cada axioma independiente o tomado aisladamente: la hace el sistema total de los axiomas.

En este punto Frege señalaría que este no es proceso definitorio alguno: para él la definición no tiene carácter existencial, sino meramente estipulativo y abreviador, y, por ello, y en el fondo, puede prescindirse de la misma en lo conceptual aunque en lo pragmático sea útil. Pero una definición implícita carece de ese carácter abreviador por lo cual no es una definición. Además, la definición implícita no caracteriza de modo unívoco el término que pretende definir, porque permite multitud de interpretaciones. Lo que se logra, realmente, es la auténtica conquista de la equivocidad, todo lo opuesto al rigor lógico en el sentir fregeano.

Frege se empeñó en no aceptar lo que él mismo había explicitado: que los sistemas de axiomas no caracterizan, ciertamente, objetos de primer nivel, sino objetos de segundo nivel. Y éstos son estructuras y campos de juego en los que pueden intervenir, ahora sí, elementos de primer nivel: los que sean compatibles con el campo de juego establecido. Algo que ya viera Gergonne cuando puso de manifiesto en 1819 el papel de las definiciones implícitas o postulados en la Geometría, básicamente en la Proyectiva, y lo que realmente había visto Dedekind en sus definiciones de cuerpo e ideal.

c) *Demostración*.—En las demostraciones se hacía intervenir —como ya señalé al hablar de Pasch— elementos intuitivos, imágenes, cargas del lenguaje ordinario... Elementos que pueden invalidar la demostración en sí, porque pueden introducirse elementos no propios del campo de juego en el que el teorema esté siendo demostrado. Para evitar tales posibles errores, Pasch, entre otros, aboga por el manejo, en última instancia, de una conceptografía adecuada, aunque él no la utiliza. En la misma línea se situarán Frege, Peano, Schröder... Una conceptografía adecuada que supone el paso a una formalización del lenguaje matemático.

Junto a esta exigencia de formalización —que sólo consiguen Frege y Peano en los finales del siglo XIX— aparece la exigencia de caracterizar la propia noción «demostración»: qué es una demostración, qué condiciones ha de cumplir, qué papeles ha de desempeñar...

Por lo pronto, y en esta línea, se exige que las demostraciones se hagan en el interior del sistema, sin interpretaciones. Y, para Frege, lo que garantiza la validez de la demostración es que las reglas —que deben ser explicitadas— se cumplan estrictamente y que, en una posterior interpretación, los teoremas se satisfagan siempre que se satisfagan los axiomas. La demostración pasa a tener un carácter marcadamente sintáctico: desde lo formal terminará no siendo otra cosa que una derivación formal. Concepto de demostración-derivación formal que, por supuesto, exige de la previa formalización de la teoría que se maneje. Un proceso al que, lentamente, va tendiendo la exigencia de análisis conceptual en el Hacer global.

Frege —quien ha tratado de especificar qué sea una demostración y será uno de los mayores responsables de enfocar la demostración en su sentido de derivación formal— la interpreta, sin embargo, como sucesión de contenidos de pensamientos puros. Y desde esta interpretación no podrá admitir la barbarie de adoptar la derivación formal porque las demostraciones, para él, sólo pueden tener lugar entre contenidos de pensamiento. Escribirá:

> como si hubiera que probar una mera formulación que no exprese idea alguna, y como si luego hubiera que asignar a esa formulación ideas distintas en dominios distintos. !Absurdo! Una mera formulación sin contenido no puede ser probada.

Como en el nuevo enfoque los puntos de partida para las derivaciones se toman como esquemas proposicionales, no pueden expresar contenidos de pensamiento y no pueden ser verdaderos axiomas sino pseudoaxiomas. Frege exclamará:

> De que los pseudoaxiomas no expresan idea alguna se sigue además que no pueden ser premisas de unas cadenas de inferencia [...]. Con los pseudoaxiomas no tenemos todavía ninguna idea y, por tanto, tampoco premisa alguna.

Para Frege los axiomas como esquemas no expresan contenidos de pensamiento puro, y únicamente de contenidos de pensamiento puros pueden obtenerse otros contenidos de pensamiento puro; sólo de ideas se puede llegar a ideas.

Curiosamente resulta que, para un lógico tan puro como Frege, la demostración es un acto de inferencia, y un acto de inferencia supone un acto psíquico en el que se reconoce la premisa como juicio verdadero, y en la inferencia como tal se reconoce como verdadero un juicio sobre la base de los juicios anteriores, por lo que termina reconociéndose la idea final de la derivación como verdadera. En otras palabras, en plena posición psicologista, para Frege no se puede inferir una conclusión de una premisa de la que no se sabe nada. Así, ejemplo clásico, una derivación como la expresada en: de α obtener $\alpha V \beta$, es algo impensable si no se sabe, por ejemplo, la verdad de α. Y, sin embargo, se ha constituido en una de las reglas de inferencia desde el cálculo de deducción...

Siguiendo con su crítica en *Sobre los Fundamentos de la Geometría,* Serie 2.ª, en 1906, escribirá:

> Cuando uno usa la frase «demostrar una proposición» en matemáticas, entonces por la palabra «proposición» uno claramente significa no una sucesión de palabras o un grupo de signos, sino un pensamiento; algo de lo que uno puede decir que es verdad. Y análogamente, cuando uno está hablando acerca de la independencia de proposiciones o axiomas, también esto será comprendido como siendo acerca de la independencia de pensamientos [...].
>
> Tenemos que distinguir entre lo externo, audible o visible que se supone expresa un pensamiento, y el pensamiento mismo. Me parece a mí que el uso que prevalece en lógica, según el cual sólo lo primero se llama sentencia es preferible. Consecuentemente, no podemos decir simplemente

que una sentencia es independiente de otras sentencias; después de todo, ninguno quiere predicar esta independencia de lo que es audible o visible.

Frege insiste: sólo se pueden demostrar pensamientos, y decir que una sentencia está demostrada mediante una deducción no es más que una forma abreviada de decir que es el pensamiento expresado por la sentencia el que se ha demostrado a partir de otros pensamientos.

Claramente una sentencia expresa un pensamiento pero un pensamiento puede venir expresado por sentencias diferentes. Por ello, una derivación de una sentencia de un conjunto previo de sentencias, equivale a demostrar que el pensamiento expresado por la sentencia es consecuencia lógica de ese conjunto de pensamientos. En otras palabras, para Frege es la derivación la que garantiza la demostrabilidad y, con ella, la consecuencia lógica. Frente al nuevo enfoque en el que la derivación se enfoca de manera sintática, Frege mantendrá su oposición. Oposición que, sin embargo, no impidió que el enfoque formal de la demostración, ligado al método axiomático, terminara imponiéndose en el Hacer global.

d) Finalmente, el concepto *verdad,* y no sólo el de existencia, sufre una radical transformación. Ya lo he indicado al hablar de las geometrías no-euclídeas. La verdad ya no se obtiene en la nueva versión vía reduccionismo como pretendía Frege. Para quien las entidades cuestionables han de ser definibles en términos de entidades de existencia evidente; no admite que se postule, sin más, la existencia de unas entidades aunque sean de segundo nivel. No basta, para Frege, afirmar que será la no-contradicción la que asegure dicha existencia, ni siquiera que la misma venga avalada por la construcción de una interpretación. Frege, en este punto, va a aliarse con la escuela axiomática italiana que parte de la existencia del objeto hacia su axiomatización, con lo cual el punto de partida es la verdad del sistema; la no-contradicción se obtiene, ciertamente, a través del modelo pero siempre como una demostración relativa, no absoluta y nunca existencial.

Lo mismo cabe decir en cuanto a la verdad de los teoremas: se reduce a la verdad de los primeros principios autoevidentes, y mantiene que esos primeros principios poseen contenidos de pensamiento verdaderos. No se consideran como meras construcciones conceptuales.

Desde la visión «tradicional» la verdad de las proposiciones es la clave y nada tiene que ver con la no-contradicción. Algo que en la nueva visión del método axiomático se invierte: es la no-contradicción la clave del sistema, aunque ello suponga que la verdad quede relegada a un segundo plano. Si el sistema es consistente, existe y, una vez que existe, cabe hablar de la verdad de lo existente. A lo cual cabría indicar que la única forma de producir la no-contradicción es estableciendo una interpretación —un modelo— que la satisfaga. En lo cual estará de acuerdo también Hilbert y quienes admiten el nuevo enfoque de la axiomática. Pero el objetivo es desprenderse de esa interpretación en aquellos casos que se pueda.

Por otro lado, pueden existir sistemas consistentes pero mutuamente incompatibles. Frege señalará que tales sistemas no pueden ser literalmente verdaderos en uno y en el mismo espacio. Aquí no ve Frege que cada sistema de axiomas caracteriza una estructura, por lo cual sistemas o conjuntos de axiomas incompatibles entre sí tratan de estructuras disjuntas.

V. Y UN BREVE RESUMEN

El método axiomático en su versión nueva abandona cuestiones de carácter ontológico en beneficio de cuestiones metodológicas. Algo que no vio Frege, ni tantos otros, que hacen su crítica desde una posición ontológica al nuevo enfoque de la praxis matemática, posición secundaria para la cuestión metodológica de la misma. Y a la inversa.

Sí la vio Padoa y, con él, la escuela americana de teóricos postulacionales. En 1900 Padoa publica *Ensayo de una teoría algebraica de los números enteros, precedida de una introducción a una teoría deductiva cualquiera*. En él se puede leer:

> Las cuestiones lógicas se hacen así completamente independientes de cuestiones empíricas o psicológicas (y, en particular, del problema del conocimiento) y toda cuestión concerniente a la simplicidad de ideas y a la evidencia de los hechos desaparece [...].

Nítida separación entre los llamados plano genético —de cuestiones heurísticas, psicológicas, pedagógicas..., o contexto de descubrimiento— y plano lógico —cuestiones lógicas y metodológicas... o contexto de justificación—, que también mantiene Hilbert. Años antes de que esta separación cristalice, y con esos nombres, con Reichenbach.

Para Frege, sin embargo, las relaciones lógicas son epistemológicamente relevantes: si un pensamiento α es consecuencia lógica de un conjunto de pensamientos π, es el conocimiento de los elementos de π lo que da firmeza al conocimiento de α.

A su vez, la independencia de α respecto a π muestra que hay alguna fuente de conocimiento que garantiza a α diferente a la fuente de conocimiento que garantiza a π. Y ello tiene consecuencias de carácter ontológico: si α se demuestra a partir de π, ello implica que α no agrega ningún compromiso ontológico nuevo al aportado por π, pero si α es independiente de π ello implica que lo que garantiza a π no se compromete ontológicamente con lo que garantiza a α.

Las críticas al nuevo enfoque, al Hacer global, que aquí sufre una inflexión metodológica apoyada en el método axiomático, indican una problemática y unas posiciones no compartidas por todos los matemáticos del momento. Indican que están surgiendo unos temas y unos cambios de significado en otros términos y que ninguno de ellos aparece claro. No lo están los términos que se manejan de no-contradicción interna o por modelo, independencia de axiomas y cómo obtenerla, existencia de una estructura establecida por la no-contradicción de los axiomas que la definen, existencia de un único modelo o de muchos de una misma estructura que cubre el término categoricidad desde 1904, suficiencia o completud de un sistema de axiomas respecto a una disciplina...

En estos momentos, últimos años del XIX y primeros del XX, no se ha establecido un lenguaje común, una notación común; no se han establecido posibles niveles de lenguaje con la consiguiente separación entre sintaxis y semántica... y, con ello, la admisión explícita de nuevos objetos de segundo orden con propiedades propias que pomposamente se denominarán meta-matemáticas: consistencia —en versiones sintáctica y semántica—, completitud, decidibilidad...

Son elementos que, sin embargo, están implícitos en estas discusiones: y cuando Hilbert pretende la demostración de no-contradicción interna está indicando, con cierta claridad, que se trata de la consistencia sintáctica, mientras quienes siguen manteniendo la demostración de no-contradicción por la interpretación, están manteniendo la consistencia semántica... Nociones que se irán clarificando a lo largo de los años veinte —por el mismo Hilbert, y su escuela, entre otros— y cristalizarán en Tarski y Gödel en los treinta, para convertirse en lugar común de los lógicos a partir de los cincuenta...

En cualquier caso, debo indicar que Frege maneja el método axiomático de manera excepcional y precisamente en el sentido «moderno», aunque no lo reconozca y, por ello, termine enmascarándolo. Es Frege quien axiomatiza por vez primera el Cálculo proposicional y la lógica de primer orden... Sus convicciones epistemológicas y ontológicas le impiden ver el desarrollo metodológico que su trabajo comporta. Y con la crítica a Hilbert desde una sola visión epistémica y ontológica, Frege parece situarse como enemigo de la axiomatización y la formalización: enemigo quizá sí, pero, si se olvida de ese aspecto y se toma la obra fregeana desde lo sólo metodológico, es una formalización realmente perfecta. Con una precisión: hay que traducir su conceptografía a la notación actual, con pérdida de la belleza de sus gráficas espaciales.

Es el mismo hecho de su afirmación de fundamentar la Aritmética en leyes lógicas. Y, para confirmar esta aseveración, construye una lógica adoptando como punto de partida los conceptos esenciales que se manejaban en la praxis matemática del Hacer global: concepto-objeto, extensión de un concepto: conjunto, función... Con ello elaboró un sistema formal lógico, el que pretende captar un matiz de una de las operaciones del sujeto epistémico: la de consecuencia o derivación.

Por otro lado, la concepción de que los sistemas de axiomas definen un nuevo objeto, de nivel distinto al de los elementos que entran en el conjunto de partida, y con ello la teoría asociada, va a ser una de las claves del Hacer matemático posterior, que inicia Peano con su axiomática de los números naturales, Hilbert y la caracterización de espacio vectorial en 1904, Zermelo y su caracterización axiomática de la Teoría de conjuntos en 1908, Steinitz y las primeras estructuras algebraicas desde 1910, Fraenkel y su definición de Anillo en 1914, después de haber establecido en 1912 la axiomática correspondiente a los números p-ádicos de Hensel, Hölder y su caracterización de la magnitud en 1901, Veblen y Hungtinton con el establecimiento de los axiomas de Geometría Proyectiva, de la noción de retículo o álgebra booleana en los entornos de 1910. En todo ello, en el papel que se hace desempeñar a los sistemas de axiomas, una inversión respecto a su papel tradicional que, desde los años veinte, se convierte, a su vez, en tradicional.

Hay que observar que todos los elementos que intervienen en el método axiomático clásico quedan en un muy segundo plano si se acepta que la teoría de la que se parte no está previamente elaborada. Es decir, si se parte de una globalidad de elementos cualesquiera y, en ella, se establecen unos principios constitutivos del campo de juego y regulativos de las propiedades de dichos elementos. Ahora no se trata de analizar supuestos implícitos o conceptos algo oscuros para obtener unos axiomas verdaderos acerca de un ámbito determinado de lo real, ahora los axiomas definen una estructura conceptual que podrá tener unas interpretaciones semánticas, es decir, una aplicación a sectores de lo real, de lo fenoménico. Y esa definición es, por ello, existencial.

El sistema de axiomas, de ser instrumento de análisis y seguridad de algo ya existente, se convierte en elaborador de estructuras y teorías. Pero, como no hay referente previo a las mismas y la definición no implica la existencia de lo definido, entonces toda la clave ha de centrarse en demostrar que el sistema de axiomas no es contradictorio, que la teoría correspondiente tiene un sentido intrínseco. La consistencia se convierte, así, en clave de la existencia. Y algo más: no sólo permite afirmar la existencia de lo definido por no contradictorio, sino que delimita un campo de juego —con lo cual no pueden admitirse elementos no compatibles con el mismo, y si se incluye alguno habrá que modificar el sistema total de axiomas—...

6. DE CRISIS, ANTINOMIAS, FUNDAMENTOS... Y MATEMÁTICAS

En la praxis conceptual matemática del último tercio del siglo XIX surge una nueva forma de trabajar la Matemática, la que adopta como elementos constitutivos, como conceptos-núcleo los de conjunto y función. En esa praxis, que supone nuevas formas de razonamiento, van surgiendo elementos no siempre explicitados en los primeros momentos y que exigen, algunos, un muy duro trabajo de clarificación a los matemáticos, y a lo largo de muchos años. Entre estos elementos menciono los siguientes:

a) Dos enfoques metodológicos: genético o ampliativo y axiomático o clarificador y garante de la seguridad de aquello que se va produciendo.

b) Demostraciones existenciales no computacionales o difícilmente traducibles a procesos algorítmicos, apoyadas en la reducción al absurdo, en la biyección que da paso a la noción de equipotencia o equinumericidad y que, generalizada, origina la definición por abstracción o relación de equivalencia, en el proceso de la diagonal, en el de cadena. Tipo de demostración existencial al que se agrega el establecido por el de la consistencia relativa o por modelo.

c) La aparición de operaciones con sistemas o conjuntos que permiten construir nuevos sistemas o conjuntos: unión, intersección, complementación y, fundamentalmente, el paso al conjunto potencia o conjunto de las partes de un conjunto dado. Estas operaciones no se realizan, en un primer momento, entre conjuntos cualesquiera, sino entre conjuntos numéricos dotados de una cierta estructura, por lo que esas operaciones han de complementarse con la demostración de que el nuevo sistema posea la misma estructura o una más rica que la que tienen los sistemas de partida en la operación. Además, son operaciones que tienen propiedades, como la idempotencia, que desbordan el cuadro de las consideradas leyes formales algebraicas.

d) La confirmación de que existen dos tipos de conjuntos infinitos: numerable y continuo. Ello conduce a plantear la cuestión de si pueden reiterarse algunas de las operaciones anteriores y obtener más conjuntos infinitos diferentes entre sí: por el proceso de la diagonal, a todo conjunto se le puede asociar un elemento que no pertenece a dicho conjunto; por el proceso de la potencia, todo cardinal transfinito tiene un cardinal mayor. Se establecen las sucesiones de los números transfinitos tanto en su versión ordinal como en su versión cardinal.

En este punto quedan en el aire muchas cuestiones. Así, la de si es legítimo aceptar un nuevo principio de inducción que opera sobre conjuntos infinitos dados en acto, principio de inducción transfinita que puede enfocarse, en línea con Poincaré, como un nuevo modo de razonar.

Igualmente, dos proposiciones centrales y que se encuentran ligadas entre sí: por un lado, si entre dos cardinales cualesquiera pueden existir otros; problema que, en el caso de los cardinales numerable y continuo, quiere decir que si entre ambos hay algún otro cardinal o si se tiene $\chi_0 < 2^{\chi_0} = c$. Es la Hipótesis del continuo. Por otro lado, como segunda proposición central, la de si todo conjunto puede ser bien ordenado. Dos problemas que conducen a la construcción de los álefs y sus escalas transfinitas, a teoremas como los de Cantor y de Burali-Forti que van contra la admisión de un cardinal máximo y un ordinal máximo, respectivamente. Pero que también obligan a distinguir entre conjuntos «bien definidos» y no bien-definidos o no-conjuntos, como puede ser el conjunto de todos los conjuntos en el sentir de Cantor... y, fundamentalmente, a que se explicite un axioma como el de elección, que se va a constituir en campo de batalla entre los matemáticos hasta bien entrado este siglo. Obliga a clarificar, a definir, el concepto de finitud, considerado «evidente» desde la visión tradicional.

e) Se establecen nuevos tipos de definición: por recursión, por abstracción o relación de equivalencia, por un sistema de axiomas enfocado como método de definición implícita. Tipos de definición que provocan la cuestión de hasta qué punto la definición implica la existencia de lo definido, y obliga a establecer criterios para aceptar o no tal existencia. En el caso de la definición implícita o por postulados, ese criterio se centrará en que el sistema de axiomas sea no-contradictorio, lo cual obliga a la búsqueda de una demostración de consistencia absoluta, no relativa, para algún sistema definido implícitamente o por postulados...

f) En cualquier caso, con una línea subyacente central: enfocar los sistemas o agregados de manera extensional, no intensional. Ello condiciona el lenguaje y exige la aparición de los cuantificadores de una notación adecuada, y parece factible la eliminación de elementos como los infinitesimales de los terrenos del Análisis, de las equivocidades en cuanto a magnitudes que siendo dejan de ser, el paso a lo que estimar aumento del rigor aritmético.

Son elementos que al ser manejados o introducidos a lo largo del trabajo matemático, propician una serie de sorpresas, de problemas y, consecuentemente, de búsqueda de soluciones a los mismos. Por lo pronto, y como uno de los más llamativos y en principio más conflictivos para la comunidad matemática, la aparición de las funciones teratológicas. Una aparición que provocó auténtica crisis entre los matemáticos, crisis como momento difícil, grave, pero nunca como derrumbamiento de edificio alguno.

Estas funciones obligan a distinguir dos conceptos que, hasta entonces, se consideraban intrínsecamente unidos: los de continuidad y diferenciabilidad. Su unión se debía, esencialmente, al hecho de que el Cálculo se había originado, en realidad, en el estudio y comportamiento de una curva, de la trayectoria que producía un punto en su desplazamiento. Unión que, como he citado, lleva a la idea expresada por Cauchy de que toda función tiene una curva representativa, y el «comportamiento geométrico» de la curva facilita el estudio analítico y algebraico de la función. La aparición de las funciones teratológicas hace que esa convicción se venga abajo. Con ello se provoca la radical separación entre las nociones de función y curva y, a la vez, se plantea la necesidad de redefinir, de «aclarar» conceptos como los de continuidad, diferenciabilidad, derivada...

En estos últimos casos, se llega a redefinir lo que hasta entonces se consideraba operación inversa de la diferenciación, la integración. No sólo se escinden los conceptos de continuidad y diferenciabilidad sino también el de integración y de tal manera que la noción de integral se convierte en autónoma. Ello exige su caracterización propia, interna: hay que definir la noción de integral desgajándola tanto de la diferenciación como de la representación geométrica de ser suma de rectángulos dados por funciones continuas, como había apuntado Cauchy... Y es trabajo que va desde Riemann a Darboux y Stieljes, desde Lebesgue a Denjoy...

Es una crisis que conduce y obliga a precisar nociones consideradas «evidentes» como la noción de curva, de línea recta, de dimensión de las figuras y del espacio..., a reconsiderar la convergencia y unicidad de series como las trigonométricas..., en una palabra, de reconstruir el Análisis y, con él, la Matemática.

Por su lado, y en un plano más conceptual que de praxis interna matemática, se plantea la convicción de que tanto la noción de función como la de sistema o conjunto, son imprecisas, difusas. Los dos conceptos-núcleo centrales del nuevo Hacer global carecen de definición explícita previa, y se habla de conjunto bien-definido sin aclarar a qué denominar «bien-definido». A la vez, se carece de un simbolismo o conceptografía adecuado y común, que posibilite elaborar demostraciones y definiciones rigurosas, que permita una intersubjetividad entre los distintos matemáticos.

Es en este plano donde puede situarse la pretensión de algunos autores como Frege, como Husserl..., de encontrar una fundamentación rigurosa y ya definitiva de este nuevo modo de Hacer aceptando la idea —no compartida por todos los matemáticos del momento— de que constituye todo el Hacer matemático. Fundamentos que otros tratan de encontrar en el signo como Heine, en la razón constructiva como Dedekind, en el dato previo de los números naturales y su manejo por reglas finitas como Kronecker, en el dato de un universo de objetos y relaciones matemáticos que tenemos que intuir como un segundo Cantor...

Bien entendido que, independientemente de cuál sea lo que estimar última justificación o fundamento del nuevo hacer, quienes lo aceptan trabajan en el mismo y encuentran en su praxis una fecundidad insospechada, acompañada de la posibilidad de dar cuenta de problemas que, desde el Hacer figural, quedaban sin explicación. Y esto último indica que, en cierto sentido, el nuevo hacer es más profundo conceptualmente que el Figural.

Esta profundidad y fecundidad conduce a que este tipo de Hacer se adopte en general a primeros de siglo y, con él, se plasmen nuevos temas y campos de trabajo. Conduce a que, en el Congreso de Heidelberg, celebrado entre el 8 y el 13 de agosto de 1904, puedan discutirse, ya, estos temas tomando como base el nuevo enfoque. Discusiones no sólo sobre temas específicos de lo que considerar Teoría de conjuntos. Temas específicos que se centran, básicamente, en las cuestiones originadas con los ordinales y cardinales transfinitos.

I. EL AXIOMA DE ELECCIÓN

Justamente en este Congreso, y como consecuencia de haber adoptado y difundido Hilbert, en 1900, como uno de los problemas centrales de la Matemática del siglo XX el problema del continuo, se va a producir un hecho realmente significativo, provocador de otra crisis entre los matemáticos.

König demuestra, naturalmente por reducción al absurdo, que 2^{χ_0} no es un álef y, por tanto, el continuo no puede tener una buena ordenación y no es un conjunto en el sentir de Cantor. El esquema demostrativo sigue la marcha siguiente: König demuestra, en primer lugar, la desigualdad $\chi_\alpha < \chi_\alpha^{\chi_0}$ Inmediato, la reducción al absurdo:

> Si 2^{χ_0} fuera un álef, por ejemplo χ_β, entonces puede aplicarse la igualdad de Bernstein $\chi_\alpha^{\chi_0} = \chi_\alpha . 2^{\chi_0}$ —demostrada en el anterior Congreso de París— y se tendría $\chi_{\beta+\omega}^{\chi_0} = \chi_{\beta+\omega} . 2^{\chi_0} = \chi_{\beta+\omega}$ lo que va contra la desigualdad de König. La contradicción entraña que 2^{χ_0} no es álef.

La demostración de König provocó auténtica conmoción al hundir uno de los elementos que Cantor consideraba centrales en su teoría. Demostración que, sin embargo, debía contener algún error como mostrará, de modo inmediato, Zermelo a través de un argumento indirecto.

Pero la conmoción sufrida por parte de la comunidad matemática asistente al Congreso no disminuye sino que aumenta y no por resolver Zermelo, de golpe, los dos grandes problemas: que el continuo —y cualquier otro conjunto infinito— puede ser bien ordenado; que todo número cardinal transfinito es un álef, es decir, que dados dos cardinales transfinitos se sigue la ley de tricotomía entre ellos. La conmoción se convierte en crisis por la forma demostrativa explicitada por Zermelo.

Zermelo demuestra, en primer lugar, que todo conjunto puede ser bien ordenado, por lo que el teorema de König no es consecuente. Pero lo que importa es cómo demuestra Zermelo el teorema de Buena ordenación: apoyándose en un nuevo axioma, el Axioma de elección. Y lo hace en una línea que sigue el esquema

> Dado un conjunto M, se utiliza una función de elección sobre la colección de los subconjuntos no-vacíos de M para definir recursivamente un buen orden sobre M.

En esencia Zermelo asocia a cada subconjunto M' de M no vacío un elemento distinguido de M' mediante la función de elección, por lo que obtiene un recubrimiento Γ. Después define un Γ–conjunto como el subconjunto N bien ordenado de M tal que cada $a \epsilon N$ es el elemento distinguido del conjunto $\{b \epsilon N | b$ no precede a a en la buena ordenación de $N\}$. La unión de los Γ–conjuntos se demuestra que es un Γ–conjunto, por lo que debe serlo M. Y, de aquí, M ha de ser un conjunto bien ordenado.

Como consecuencia inmediata se tiene que todo cardinal transfinito es un álef y satisface $m^2=m$, por lo que se asegura la Comparabilidad Cardinal, es decir, dados dos cardinales transfinitos cualesquiera, uno es mayor, igual o menor que el otro. Se ha resuelto el segundo gran problema cantoriano: todo cardinal transfinito es un álef.

En esta demostración lo que entra en juego es el empleo de colecciones infinitas dadas en acto y, sobre todo, el manejo de una función, la función de elección, un tanto sorprendente. Una función que tiene, como argumento, infinitos conjuntos disjuntos y, como valores, elementos. Una función que realiza una elección simultánea, no sucesiva, de uno de los infinitos elementos de cada uno de los infinitos conjuntos dados en acto.

Si la noción de función había generado, ya, problemas con la aparición de las funciones teratológicas, ahora supera cualquier fase como la anterior: la función maneja infinitos conjuntos dados en acto y realiza una elección simultánea de infinitos elementos de cada uno de esos conjuntos. Con una dificultad añadida: no hay forma de construir, de modo explícito, tal función de elección porque el Axioma de elección es puramente existencial.

En su posterior defensa del empleo de este Axioma, de la función de elección, Zermelo indicará en 1908 que él sólo ha explicitado un mecanismo demostrativo que se venía manejando de modo implícito en el Hacer matemático. Así, lo venían usando implícitamente Cantor, Vitali, Hardy, Jourdain... Frente a una crítica de Peano, Zermelo le recordará que el mismo Peano, y en 1890, había ya enunciado este principio y lo había manejado aunque después mostrara sus dudas respecto a su poder demostrativo, manifestando que una elección simultánea sólo es factible en el caso finito.

No es, evidentemente, una defensa muy sólida argumentar que otros lo han manejado, aunque sí argumentar y mostrar que es inherente a una determinada praxis. A pesar de lo cual las dudas permanecen porque ¿se puede concebir una función que tiene como argumento infinitos conjuntos disjuntos, es decir, una función asociada de conjunto y, por ello, de segundo nivel, que «elige», simultánea y no sucesivamente, elementos cualesquiera, pero sólo uno de cada uno de los infinitos conjuntos que constituyen su argumento? La respuesta radical de Zermelo es sí, y afirmará que el Axioma de elección es un principio lógico que

> no puede reducirse, en rigor, a algo más simple, y puede aplicarse sin vacilaciones en la deducción matemática.

Se puede observar que la demostración de Zermelo, con el manejo del Axioma de elección, no es más que una expresión del tipo de demostraciones existenciales no constructivas en el Hacer global. En el fondo no aporta novedad alguna salvo insistir en el hecho de que la noción de función no está claramente delimitada, lo mismo que la propia noción de demostración —por el empleo del método por reducción al absurdo, por la ausencia de unos principios explícitos o constitutivos que determinen el campo de juego en el que se está—.

Como respuesta a las críticas por el manejo del Axioma de elección, por su carácter existencial no constructivo, Zermelo se suma al enfoque que ve en el método axiomático el instrumento auténticamente caracterizador o constitutivo de un campo de juego, único instrumento que permite la definición precisa de los conceptos-núcleo del nuevo Hacer, los de conjunto y función. Zermelo elabora en 1908 la primera axiomatización de la Teoría de conjuntos. Axiomatización centrada en la acotación del tamaño de los conjuntos —para evitar posibles dificultades como la del cardinal u ordinal máximo— y con un papel esencialmente metodológico, aunque reduccionista en lo ontológico.

En la construcción axiomática zermeliana, una posible crítica, y es la realizada por Poincaré, se centra en que ciertamente parece evitar las dificultades conocidas pero no se asegura que no encierre otras salvo que, como para toda construcción axiomática, se demuestre su no-contradicción, lo cual, en 1908, no ha logrado Zermelo ni va a lograr en el futuro.

En cuanto a la demostración en sí, una construcción tan puramente existencial con manejo de infinitos infinitos es la que, realmente, provoca una crisis entre los matemáticos. Algunos adoptarán la postura de Gordan: esto no es demostración, es pura teología. Y los matemáticos se escinden al plantear la conveniencia de manejar o no este axioma y, consecuentemente, la de aceptar un principio como el de Buena ordenación que parece intuitivamente claro, la permanencia de unos problemas como el de la hipótesis del continuo, la escala de transfinitos... En el caso de utilizar el Axioma de elección, tratar de delimitar los teoremas que requieren su uso e intentar rebajar, de alguna forma, su generalidad y establecerlo, en todo caso, para el infinito sólo numerable si es factible... Una labor para el futuro.

Matemáticos de lo que se ha considerado posteriormente escuela semiintuicionista francesa como Borel, Baire, Lebesgue, Hadamard..., y que han sido los más entusiastas defensores del nuevo hacer, entran en pugna pública en 1905 y buscan una delimitación, si no rechazo radical, al empleo del Axioma de elección. Borel recordará en 1950 que para sus contemporáneos y alumnos va a pasar desde una posición de «peligroso revolucionario» en 1898, cuando publica sus *Lecciones sobre la teoría de funciones,* apoyadas en la Teoría de conjuntos, a reaccionario respecto al Axioma de elección. Pero Borel exige

> el derecho que tiene todo matemático a estudiar libremente las materias que le plazcan. Esta libertad es la condición esencial para el progreso de la ciencia; no está limitada más que por la correción lógica de los razonamientos, pudiendo evolucionar la propia lógica bajo formas diversas. Pero todas las definiciones y todos los axiomas son legítimos, desde el momento en el que no entrañan contradicción. [Borel, 1950, p. X.]

Matemáticos como Vitali o Bernstein defienden la conveniencia del Axioma y lo usarán para obtener la demostración de la Buena ordenación en 1905, en 1908... Se mantienen, sin embargo, en el interior de lo que se estima una disciplina concreta y particular: la Teoría transfinita de conjuntos. Es en ella en la que se manejan los ordinales y los cardinales transfinitos, con colecciones de objetos de naturaleza desconocida... No parece afectar a la «auténtica» praxis matemática, donde se usan colecciones estructuradas como los dominios de los racionales, o los dominios de los números complejos, o el dominio de las funciones de variable real...; donde, si se tiene que manejar algún tipo de elección, ésta se realiza no simultánea sino sucesivamente.

Praxis en la cual el manejo del Axioma de elección no parece tener lugar importante y si se requiere del mismo para demostrar un principio tan evidente como el de Buena ordenación, parece preferible adoptar este como axioma. De alguna manera se intuye que ambos pueden ser equivalentes...

Y sin embargo... En 1910, Steinitz realiza lo que se ha calificado de «magnífica síntesis» algebraica: desarrollar sistemáticamente la considerada Teoría de irracionales o, como titula su monografía, *Teoría algebraica de los cuerpos.* En esta obra demuestra que el Axioma de elección también se encuentra en núcleos clave de esa praxis matemática que parecía no tener buenas relaciones con la Teoría transfinita de conjuntos. El Axioma de elección hay que emplearlo tanto en Álgebra como en Topología porque es un elemento más del nuevo tipo de Hacer global, consustancial al mismo, adopte la forma que adopte —y, de hecho, terminará adoptando multitud de formas, todas equivalentes entre sí, por supuesto...—.

Es punto que resalto porque la posición de Steinitz refleja la aceptación, ya casi definitiva, del enfoque de Hacer global axiomatizado. Refiriéndose al trabajo algebraico de Weber indicará:

> Mientras el objetivo central de Weber era un tratamiento general de la teoría de Galois, independiente del significado numérico de los elementos, para nosotros es esencial el concepto de cuerpo el que tiene el foco de interés. La clave del presente trabajo es avanzar una visión de todos los posibles tipos de cuerpos y establecer los elementos básicos de sus interrelaciones.

En otras palabras, desde este enfoque, los distintos sistemas de cuerpos numéricos se ven como manifestaciones de una entidad matemática más abstracta que los subtiende a todos. Y ello permite explicar el éxito del método genético con el que se han ido ampliando los cuerpos numéricos: ampliación sólo en cuanto a la naturaleza de los elementos que intervienen, no en cuanto a esa estructura más profunda que subyace a los mismos. Y, si la naturaleza de los elementos puede marginarse, entonces es la estructura la que se convierte en el objeto de estudio, es a la que Steinitz pretende prestar toda su atención. Con ello se está, ahora, como en las consecuencias de las geometrías no-euclídeas: son las teorías las que se adoptan como objeto de estudio y no ya sus elementos.

En su estudio, metodológicamente, Steinitz establece una serie de etapas: en primer lugar, considerar el cuerpo más simple posible; en segundo lugar, estudiar los métodos que lleven, desde un cuerpo dado, a una extensión del mismo; en tercer lugar, estudiar qué propiedades se conservan en la extensión de cuerpos.

Evidentemente, las extensiones de cuerpos consideradas son extensiones algebraicamente cerradas y se formula un teorema como el siguiente:

> Para todo cuerpo existe una extensión algebraicamente cerrada, unívocamente determinada salvo isomorfismo.

Aunque el contenido del teorema es estrictamente algebraico en el sentido querido por Kronecker, por ejemplo, al presuponer únicamente las cuatro operaciones racionales, Steinitz en su demostración ha de manejar, precisamente, el Axioma de elección.

A partir de este momento el Axioma de elección se mostrará imprescindible para la demostración de otras propiedades en el álgebra, como la de que todo espacio vectorial posee una base. No sólo el Axioma de elección, sino el Hacer global en sí. Y matemáticos como Sierpinski, Lusin..., los que componen las escuelas polaca y rusa de matemáticas, muy ligados a la escuela francesa semiintuicionista, dedican sus esfuerzos tanto a la Hipótesis del continuo como al Axioma de elección, a los conjuntos analíticos...

Con palabras muy críticas de Rey Pastor, en sus *Lecciones de Álgebra,* en la edición de 1957, cabe leer:

> Siguiendo la pauta de Steinitz el álgebra fue sacada de su cauce estricto, delimitado por Kronecker, y no sólo invadió el campo del Análisis, sino que usó sin escrúpulo los métodos más heterodoxos, basados en el postulado de libre elección [p. 323].

Junto a este empleo en terrenos que no son intrínsecos a lo que considerar Teoría de conjuntos transfinitos, lo importante es señalar que el Hacer global ha tomado carta de ciudadanía en campos como el Álgebra, la Topología... Campos en los cuales las estructuras se caracterizan a partir de un sistema de axiomas y se pasa a operar no ya sobre campos numéricos previamente dados, sino sobre sistemas o agregados de elementos de naturaleza desconocida. Campos en los cuales la definición implícita, por postulados o axiomática, se convierte en el punto de partida definicional: es con ella como se caracterizan estructuras como grupo, cuerpo, módulo, espacio vectorial, retículo... Definiciones que mostrarán su no-contradicción de forma relativa: estableciendo diferentes modelos —grupos, cuerpos...—, sean de naturaleza geométrica o algebraica. Modelos que aseguran, en este caso, la existencia de lo definido.

Desde esta visión axiomática, que algunos calificarán de estructuralista, se construyen teorías locales enlazadas todas por un mismo método, el axiomático, como caracterizador de las mismas. Teorías locales bien definidas y, por ello, con posibles enlaces entre sí. Los axiomas determinan los campos de juego de cada teoría local, caracterizan la estructura de la cual se elaboran dichas teorías. La unidad del posible Hacer matemático resultante se encuentra, realmente, en el método axiomático subyacente y no, precisamente, en el proceso genético de ir ampliando desde un sistema dado —el aritmético— hasta otros campos. Un uso del método axiomático no como elemento fundamentante, sino en lo que califiqué de algebraico o semántico.

II. DE ANTINOMIAS Y PARADOJAS

La construcción axiomática de Zermelo tenía otro objetivo, el más llamativo entre quienes se preocupan de fundamentos y sus crisis: superar las antinomias, paradojas o contradicciones que habían sido proclamadas, especialmente por Russell desde 1903, como la manifestación de una «auténtica crisis de los fundamentos de la Matemática». Por lo que hasta aquí se ha dicho, más bien de uno de los aspectos del Hacer matemático, el global. Contradicciones centradas no ya en el concepto-núcleo de función —como en el caso del Axioma de elección—, sino en el otro concepto-núcleo, el de sistema, agregado o conjunto que tampoco había sido caracterizado de modo explícito a pesar de los intentos de Cantor.

Russell, en sus primeros años, pretende fundar toda la Matemática en la lógica. Desde este empeño se encuentra con la paradoja. En carta de 8 de diciembre de 1902, escribe a Couturat:

> He descubierto un error en Cantor, quien sostiene que no hay número cardinal máximo. Ahora bien, el número de clases es el número máximo. La mejor de las demostraciones de lo contrario que da Cantor se encuentra en *Anuario de la Sociedad Matemática Alemana*, I, 1892, pp. 75-78. Consiste en el fondo en demostrar que, si u es una clase cuyo número es α, el número de clases contenidas en u (que es 2^{α}) es mayor que α. Pero la prueba presupone que hay clases contenidas en u que no son individuos de u; ahora bien, si u=clase, esto es falso: toda clase de clases es una clase. [Cfr. Anellis, 1991, pp. 39 y 44.]

Analizando el argumento diagonal de Cantor aplicado a la clase de todas las clases por el cual Cantor llegaba a la conclusión de que no podía existir cardinal máximo, Russell encuentra que en este argumento hay, intrínseca, una antinomia. Y es lo que estalla seis meses después de que hubiera escrito la carta citada a Couturat.

En 1903 llega a la misma conclusión respecto a la demostración dada por Burali-Forti, en 1897, sobre la no existencia del mayor número ordinal. Y encuentra la paradoja en el Axioma V de la construcción de Frege.

El argumento para la obtención de la paradoja de Russell se puede esbozar como sigue:

> Si w es la clase de todos los términos x tales que x no es elemento de x, entonces si w es miembro de w se tiene que w no es miembro de w; si w no es miembro de w, entonces w es miembro de w.

En esquema, si se tiene $w=\{x|x\notin x\}$, entonces si $w\in w\Rightarrow w\notin w$ pero si $w\notin w\Rightarrow w\in w$.

De modo inmediato Russell se dedica tanto a encontrar otras paradojas —como la del mentiroso, el barbero...—, como a difundirlas y a intentar construir un sistema comprehensivo del Hacer matemático.

En su empeño divulgador y catastrofista no se ve solo: al menos Couturat está con él. Por otro lado, König reconoce que en la demostración de que $2^{\aleph_0}$ no es un álef había cometido un error: la igualdad de Bernstein no puede manejarse en la misma justamente cuando α tiene cofinalidad ω, por lo cual $2^{\aleph_0}<\chi_\alpha$. Reconocido, el error se convierte en paradoja, la paradoja de la definibilidad, ordinal mínimo o de König:

> Se consideran aquellos números reales que pueden ser definidos por un número finito de palabras. Esos números forman un conjunto numerable. Se consideran aquellos números reales que no pueden ser definidos de esta forma. Si estos números pueden ser bien ordenados, entonces han de tener un elemento mínimo, su ordinal mínimo. Pero, por lo que se acaba de decir, este número real indefinible puede ser definido en un número finito de palabras. Contradicción...

Y el mismo año de 1905, Richard publica la paradoja que lleva su nombre y que Poincaré matizará y precisará.

Proliferación de paradojas, antinomias en las que, al principio, parece que todo vale. Así, junto a los teoremas de Cantor y Burali-Forti convertidos en paradojas, la de Russell, König, Richard... y, al lado, las del mentiroso, las de Berry, Grelling y hasta se mencionan las de Cervantes y la del cocodrilo... Proliferación ante la cual Peano protestará indicando que hay paradojas serias y otras que son meros acertijos. Apuntará, interesadamente, a que el origen de las paradojas «serias» se debe al manejo del lenguaje ordinario, lleno de vaguedades e imprecisiones. Como solución, Peano mantendrá que sólo un lenguaje formal, el suyo pasigráfico, podrá impedir las ambigüedades y, con ello, la aparición de las paradojas. La formalización sintáctica como meta superadora.

Habrá que esperar a que Ramsey, en 1925, establezca una clasificación de las paradojas «serias» en dos grandes bloques: las paradojas lógico-matemáticas —o formuladas en términos lógicos y matemáticos, como la de Russell, Cantor, Burali-Forti..., — y las paradojas semánticas —en las que intervienen términos como «verdad», «definición»..., como la de Epiménides, Richard, König...—. Clasificación convertida en ortodoxa o tópica a pesar de que es muy superficial porque se apoya en el vocabulario utilizado en la formulación de las antinomias. La precisión obtenida en el desarrollo lógico actual indica que paradojas del segundo grupo pertenecen al primero, ya que algunas de las nociones sintácticas y semánticas han quedado incorporadas a lo que hoy se califica de Lógica matemática o formal.

En cualquier caso las paradojas plantean al matemático unas cuestiones: su origen, posibles métodos y caminos para superar las ya conocidas y evitar que puedan surgir otras en el futuro. Si hay crisis, como en el caso de una enfermedad, ello implica que el médico debe realizar un diagnóstico acertado e, inmediatamente, poner remedio. Metáfora de crisis médica a la que se liga Poincaré, quien se centra en analizar la causa de las paradojas y tratar de establecer el remedio correspondiente.

Siguiendo a Poincaré en sus escritos polémicos con Russell, Peano, Couturat, Zermelo..., se puede observar que hay dos grandes tipos de paradojas: las que afectan al concepto-núcleo de conjunto, y las que afectan a los métodos demostrativos, como la biyección y el método de la diagonal. Con ello, parece que las paradojas son inherentes no ya a un aspecto secundario del nuevo hacer, sino que se encuentran en los núcleos del mismo.

En cuanto a su origen, tanto las debidas a una imprecisión de la definición de sistema o conjunto, como las debidas al método demostrativo de la diagonal, tienen la misma causa: son definiciones y demostraciones impredicativas o autorreferenciales. Caen bajo el Principio del círculo vicioso, nombre que pondrá Russell como reconoce el propio Poincaré.

Tratando de analizar críticamente, aparecen conceptos y principios como el Principio del Círculo Vicioso, términos como «impredicativismo», elementos como autorreferencialidad..., que también van a caer, todos ellos, bajo lo que considerar nociones difusas...

Por supuesto, Russell también se lanza a buscar la causa de las antinomias terminando por aceptar el diagnóstico de Poincaré del impredicativismo o autorreferencialidad como causa. Pero, sobre todo, se lanza a construir un edificio fundacional que no se derrumbe como se derrumbó el edificio construido por Frege —y se vuelve a la metáfora del edificio—. La pretensión russelliana se centraba en poder derivar toda la matemática ya existente de muy pocos conceptos y leyes lógicos, tras su diagnóstico catastrofista provocado por las paradojas o antinomias.

Con varias dificultades en ese empeño que pasan por la noción de ley lógica, supeditada por Russell a la noción de forma lógica: ley lógica como proposición siempre verdadera en función de su forma lógica. Si Frege sustituye la categoría gramatical Sujeto-Predicado por la de Función-Argumento y convierte una oración como «Juancito tiene hambre» en la expresión «*f*(*j*)», y mantiene el carácter demostrativo como esencial para aceptar que una proposición sea analítica, Russell intenta llegar al mismo resultado pero sin aceptar el proceso demostrativo ni partir del Hacer matemático en sí, como le ocurre a Frege, sino a través del lenguaje. Afirmará en *Los principios de la Matemática*:

> La característica fundamental de la lógica, evidentemente, es la que está indicada cuando decimos que las proposiciones son verdaderas en virtud de su forma. La cuestión de la posibilidad de ser demostrada no puede intervenir, ya que toda proposición que en un sistema está deducida a partir de premisas puede, en otro sistema, ser tomada ella misma como premisa [...]. Todas las proposiciones que son demostrables en un sistema lógico admisible deben compartir con las premisas la propiedad de ser verdaderas en virtud de su forma.

Lo importante es la forma de la proposición y su verdad, no su demostrabilidad ni, por supuesto, su dependencia de la experiencia. Las proposiciones de la matemática se le muestran puramente lógicas por formales, y verdaderas en virtud de su sola forma, es decir, independientes a toda experiencia o afirmación de contenido existencial.

El problema se centra en definir, en caracterizar lo que es forma lógica. Problemática en la cual se reemplaza lo oscuro por lo más oscuro. Y ello porque puede afirmarse que la «forma» de una proposición es lo que permanece inalterado cuando todo constituyente suyo se reemplaza por otro de la misma categoría. Con lo cual se está afirmando que estas proposiciones, verdaderas por su forma, no contienen más que variables y constantes lógicas.

Es un giro que inicia una nueva problemática en cuanto al lenguaje, a la lógica, a la posible filosofía analítica, y no en cuanto al Hacer matemático que, por este motivo, y en principio, se margina a este tipo de discusiones... Problemática distinta al Hacer matemático en sí porque se plantea la cuestión de la existencia, en el lenguaje, de unas variables y constantes que son lógicas, lo que entraña que en ese lenguaje hay variables y constantes que no son lógicas. Y un problema: ¿cómo diferenciar, *a priori*, ambas categorías? Hasta el momento en el que escribo, se sigue esperando alguna solución satisfactoria...

Russell ha confundido el terreno y, desde el Hacer matemático, lleva al lenguaje lo que a éste no le corresponde. Porque no se trata de partir del lenguaje ordinario para alcanzar las variables y constantes lógicas y alguna estructura matemática asociada, sino que es desde la estructura matemática desde la cual se determinan cuáles son variables y cuáles constantes y después se pasa al lenguaje ordinario. No ver esto último provoca confusión, como la que cometen algunos tratadistas de Lógica formal que comienzan sus Lecciones por el lenguaje ordinario y, desde él, y con algunos ejemplos, pretenden obtener los conectivos proposicionales como constantes lógicas para después justificar que sólo se tienen en cuenta algunos matices de los mismos; así los de la conjunción o de la disjunción... y, en especial, de la negación. Ocultan que van orientados en su camino: esperan las tablas de verdad, esperan el retículo booleano subyacente, esperan L_1..., y van desgajando las constantes y las variables lógicas deseadas.

Por su lado, la cuestión por la forma lógica conduce al problema de qué entender por proposición analítica o formal en términos de sus constituyentes, y no en términos de cualquier referencia a un modelo o significado. Wittgenstein intenta aportar algo de claridad al convertir una proposición analítica en tautológica apoyándose en las tablas veritativas, lo que sólo es una solución parcial, sólo para un cálculo lógico como el proposicional bivalente.

En su empeño de construir un sistema global que abarque todo el Hacer matemático como mera prolongación de la Lógica, Russell realiza una construción de la lógica en niveles o teoría ramificada de tipos. Teoría ramificada para evitar el impredicativismo o círculo vicioso, clave de las antinomias para Poincaré. Clave aceptada por Russell y que le conduce a una elaboración formal, con Whitehead, realmente artificiosa y *ad hoc* —aunque técnicamente sea una obra magnífica—.

Esta construcción de un complejo sistema lógico de diferentes tipos y predicaciones intensionales, cae bajo dos Axiomas especiales, los axiomas de infinitud y reducibilidad, y una crítica esencial.

El primer axioma —el de la infinitud— es claramente existencial y, por ello, inaceptable desde un enfoque que se pretende estrictamente lógico-formal y en el cual las proposiciones son verdaderas en virtud de su forma y no en cuanto a afirmación existencial o experiencial alguna. El otro es, realmente, una puerta al impredicativismo que se quiere evitar. Dos principios que el mismo Russell acepta a regañadientes pero que no tiene más remedio que incluir para tratar de construir su sistema. Lo cual, ciertamente, no es señal de clara honestidad constructiva porque el pretendido logicismo fundamentalista ya no es tal, sino una elaboración que acepta elementos cualesquiera con tal de llegar al final de la meta.

Y la crítica básica es la de que, desde su inicio, el sistema cae bajo lo que trata de evitar: la autorreferencia. Al ser una teoría ramificada de tipos hay que asegurar una afirmación como «todas las variables cuantificadas de nivel *n* tienen como recorrido las propiedades de nivel *n*», lo cual no es otra cosa que una afirmación general sobre las propiedades de todos los niveles bajo la cual cae la propia afirmación. Del mismo tipo que la que sostiene «todas las propiedades tienen niveles en la teoría de tipos ramificada», lo que implica caer en la antinomia del conjunto de todos los conjuntos, o en la de la propiedad de todas las propiedades.

PM y, sobre todo, las interpretaciones de Russell se muestran, realmente, como un sistema o construcción metafísica y epistemológica sobre la naturaleza de los conceptos, y no como un sistema puro matemático o lógico, como un sistema que pueda fundamentar un hacer, una praxis como la matemática. Sistema o construcción metafísica que, en principio, aborrece de la antinomia, de la paradoja porque es la antinomia la que le provoca su contradicción interna y, consecuentemente, su hundimiento como sistema metafísico cerrado, por lo cual tiene que partir de la eliminación, supresión de cualquier tipo de paradoja...

Russell va a insistir en que la proposición depende de sus constituyentes pero, a la vez, se muestra irreducible a los mismos. Así, desde lo extensional, se puede considerar que una relación binaria está compuesta de pares ordenados de elementos, pero Russell se negará a esta consideración y mantendrá que la relación binaria es irreducible a esos pares constituyentes: la relación binaria, la relación en general, posee una realidad ontológica al estilo de un universal platónico. Esa realidad no puede reducirse a un conjunto de pares ordenados porque supondría aceptar un reduccionismo de la Lógica a la Teoría de conjuntos, reduccionismo que, además de anular todo el pretendido edificio, implicaría reconocer el fracaso del Logicismo, del empeño fundamentalista logicista. Sería la Lógica, ahora, la que se fundamentara en la Teoría de conjuntos, en la Matemática... Proceso que, de modo efectivo, y a pesar de defensores del logicismo y de la Lógica formal, se va a producir pocos años después de la publicación de *PM*.

Como sistema metafísico —que termina en la formulación del Atomismo lógico— *PM* muestra su intrínseca incoherencia, como ya he indicado. Si la esencia de la teoría ramificada de tipos es la noción predicativa de existencia, es decir, la asunción de que una propiedad sólo existe en virtud de una definición que no sea circular, ello implica que es imposible para cualquier concepto aplicarse a todos los conceptos y, en particular, que cualquier proposición pueda ser verdadera para todos los conceptos; y esta concepción pretende ser llevada a cabo mediante un sistema global en el que se está afirmando todo lo contrario...

Será Ramsey quien, en 1920, establezca la defunción al objetivo central de la obra de Russell. Ramsey consigue una elaboración de *PM* con sólo la teoría simplificada de tipos.

Y lo que va a quedar, en la parte técnica, es una magnífica construcción que, si es impotente para lograr su objetivo final —desarrollar todo el Hacer matemático como si éste estuviera ya dado de antemano y para siempre—, va a mostrarse como un sistema formal que muestra dos caras. Por una, servir como ideografía, como lenguaje básico para la expresión del Hacer matemático; por otra, servir de modelo axiomático de lo que puede considerarse como un sistema de Lógica formal.

Es esta última cara la considerada desde 1917 por Hilbert y quienes siguen el enfoque axiomático del Hacer matemático global. En este caso, y como sistema formal codificador de la Lógica, cae bajo las mismas cuestiones de toda teoría formal axiomática: las de su consistencia, completitud, decidibilidad. Cuestiones ahora específicas para un sistema de Lógica enfocada, insisto, como una disciplina formal y no como base fundamentante del Hacer matemático. Cuestiones que serán planteadas por Hilbert en el Congreso de Bolonia, en 1928.

Cuestiones a las que se ligará Gödel, quien responderá positivamente en cuanto a la completitud de L_1 en 1930, y negativamente en 1931 en cuanto a la completitud de cualquier sistema lo suficientemente potente para contener la Aritmética, negativamente para demostrar, en el interior de un sistema formal, su propia consistencia. Limitaciones, ahora sí, intrínsecas de los sistemas formales a las que se sumarán las de decidibilidad en 1936...

III. TRIUNFO DEL REDUCCIONISMO CONJUNTISTA, CON LIMITACIONES

Excepcional polemista y divulgador, Russell concita la polémica en su trabajo. En la discusión intervienen Poincaré, Couturat, Peano, Zermelo... Discusiones en cuanto al objetivo de fundamentar el Hacer matemático como si éste estuviera ya plasmado de modo definitivo y en una base estrictamente lógica... Discusiones que van a quedar algo marginadas al interior de la praxis matemática, interior en el cual las discusiones que se tienen, realmente, son las provocadas por el Axioma de elección.

Y de tal manera que, haciendo camino, a lo largo de esa praxis, el enfoque pretendidamente intensional dado por Russell a las relaciones y desde el cual un par ordenado no puede ser básico y carece, en sí, de sentido, viene a ser eliminado por Hausdorff en 1914, cuando define el par ordenado como conjunto en términos distributivos, en términos estrictamente conjuntistas. Desde esta definición, las relaciones y, con ellas, las funciones y operaciones, pasan a ser elementos propios del Hacer global, no lógico-formal como pretendía Russell quien, años después, recordaría:

> Pensaba de las relaciones, en aquellos días, exclusivamente como intensiones [...]. Me parece que, aunque desde el punto de vista de un cálculo formal uno puede considerar una relación como un conjunto de pares ordenados, es sólo la intensión quien da unidad al conjunto.

Las nociones de relación y, especialmente, la de función eran nociones básicas en el Hacer matemático pero no encontraban una definición precisa. En cuanto a la noción de relación Peirce, Schröder, Peano..., las trataban como conjuntos de pares ordenados. En el caso de Peano para hacer más flexible y manejable un simbolismo que facilitara la práctica matemática. Desde esa praxis, para Peano una sucesión no era otra cosa que una función sobre los naturales.

Sin embargo, la noción de par ordenado, de n-tupla, quedaba como noción primitiva, en un enfoque estrictamente intensional. De aquí la crítica que sobre todos ellos realizará Russell para quien es la noción en sí de relación la que se presenta como intensionalmente primitiva.

Peano volverá a insistir, en sus ensayos de 1911 y 1913 sobre el concepto de definición, en que es la noción de par ordenado el concepto básico sobre el cual caracterizar la noción de relación binaria y, con ella, la de función, que se le muestra como un tipo especial de relación.

De aquí que la definición de Hausdorff de par ordenado como conjunto, a la que se sumará la dada por Wiener en 1919 y finalmente por Kuratovski en 1921, tenga un papel esencial en el terreno conceptual y no sólo el entrevisto en un primer momento de poder eliminar el axioma de reducibilidad.

Esta definición permite clarificar por reducción uno de los conceptos-núcleo esenciales del Hacer global: el de función. Ahora se puede definir el concepto función en término de conjunto de pares o

n-tuplas ordenados de elementos de los conjuntos iniciales y final, pero sin tomar ese par o n-tupla ordenada como noción primitiva, sino como noción derivada, precisamente en términos del otro concepto-núcleo, el de conjunto. Basta considerar el producto cartesiano de los conjuntos como el conjunto de las n-tuplas ordenadas y definir la relación como un subconjunto del mismo. Inmediato, aparece el concepto «función» como un tipo especial de relación, la relación funcional.

Se ha simplificado, así, el Hacer global en el que ahora se maneja, por modo exclusivo, sólo uno de los dos elementos centrales del nuevo hacer.

No sólo simplificación, sino que al definir en términos conjuntistas uno de los conceptos que desde el Logicismo russelliano se consideraba primario, el de relación, resulta que el intento de fundamentación logicista queda asumido por el fundamentalismo conjuntista. Programa logicista que, como tal, puede quedar para la historia.

La eliminación se produce en el mismo terreno intrínseco al Hacer global: eliminación de lo intensional en beneficio de lo extensional. Russell trató de apoyar su proyecto metafísico fundacional en una mezcla entre lo extensional y lo intensional, pero la caracterización de uno de sus conceptos intensionales básicos, la relación, en términos extensionales, supuso, junto a la previa aceptación de axiomas como el del infinito y el de reducibilidad, que todo su programa quedara en el aire... Tan en el aire que fue adoptado como sistema formal axiomatizador lógico, lo que iba contra el espíritu fundacional logicista russelliano...

Y una figura central en este punto es la de Hausdorff. Publica en 1914 lo que puede estimarse una obra esencial para el Hacer global, su libro *Teoría de conjuntos.* Una teoría de conjuntos que, frente a la Teoría axiomatizada de Zermelo, pretende delimitar el marco del Hacer matemático «moderno», su lenguaje notacional, sus conceptos-núcleo esenciales. No Teoría axiomática o formal, sino simplemente marco para el nuevo hacer, lo que calificar de teoría «intuitiva» de conjuntos. Fue una obra que conformó el primer gran libro de «texto», el primer gran compendio sistemático de esta Teoría.

En esta obra late, en el fondo, la convicción de que todo el nuevo Hacer se apoya en esta base. Apoyo en el sentido de convertirse el lenguaje conjuntista en instrumento heurístico y metodológico indispensable para la praxis matemática, porque la teoría «ingenua» proporciona un marco de juego suficientemente adecuado para la misma.

Lo importante, por ello, no es lo ontológico en sí, sino el marco epistemológico y metodológico en el que realizar el producto matemático.

Es la idea que recorre toda la obra, aunque Hausdorff la identifique con un pretendido enfoque «formal». Formal por no plantearse cuestiones de carácter ontológico, sino limitarse a un plano heurístico y metodológico, en un nivel estrictamente pragmático. Un enfoque formal que, de aceptarlo, iría en paralelo a una posición como la de Gordan en el Hacer figural. Afirmará:

> Esta explicación formal dice lo que se supone que hacen los números cardinales, no lo que son. Se han intentado definiciones más precisas, pero son insatisfactorias e innecesarias. Las relaciones entre números cardinales son simplemente formas más convenientes de expresar relaciones entre conjuntos; *debemos dejar la determinación de la «esencia» de número cardinal a la filosofía.* [#5; cursiva mía.]

En esta obra, auténtica primera enciclopedia del nuevo modo de enfocar la praxis matemática, Hausdorff define el par odenado extensionalmente en la forma

$$(x,y)=\{\{x,1\},\{y,2\}\}$$

donde 1 y 2 son objetos ajenos a la situación. Definición problemática cuando todos los objetos son conjuntos, y que será definitivamente aclarada por Kuratowski en 1921 cuando establezca la definición hoy canónica de par ordenado como

$$(x,y)=\{\{x\},\{x,y\}\}$$

A pesar de su insuficiencia Hausdorff caracteriza la noción de función en términos de conjuntos de n-tuplas ordenadas y, por su definición, en términos de la noción primitiva de conjunto. Con ello las relaciones de orden aparecen como colecciones de pares ordenados, de una manera que ha quedado canonizada en el nuevo hacer. Correlaciona los conjuntos con sus funciones características, lo que le permite manejar sin problemas el método de la diagonal, en un uso también hoy canonizado. Es claro que Hausdorff acepta el Axioma de elección sin limitación alguna. Manejo que le conduce a explicitar lo que hoy se denomina «paradoja de Hausdorff» y que será enunciada, posteriormente, por Tarski y Banach...

Con esta enciclopedia se tiene, a partir de 1914, un cuadro bastante completo que conforma el terreno de juego del conjuntismo, triunfante un enfoque metodológico, más bien pragmático.

La simplificación conceptual que conlleva se ha interpretado, por otro lado, como el definitivo triunfo de un reduccionismo radical conjuntista: todo el Hacer matemático encuentra su expresión en términos de conjuntos y el Hacer matemático no es más que tal teoría. Es la interpretación reduccionista que había adoptado, por ejemplo, Zermelo y que se seguirá en la praxis matemática de enfoque pragmático. Incluso tratando de imponerse como «matemática moderna» en planes de enseñanza de algunos países... Sin embargo, este reduccionismo ontológico conjuntista supone una posición ontológica tan metafísica como la de Russell.

Quienes mantuvieron o mantienen el triunfo como éxito definitivo, olvidan algunos elementos básicos como el ya citado de que la propia Teoría de conjuntos se ha escindido en varias ramas incompatibles entre sí según los axiomas que se tomen, por lo que si se acepta el reduccionismo habrá que precisar a cuál de las diversas Teorías de conjuntos se realiza. Olvidan que la propia Teoría de conjuntos aparece axiomatizada adoptando uno de los instrumentos metodológicos centrales del Hacer global... A lo que aquí agrego:

En el mejor de los casos lo que se puede admitir es que gran parte de las teorías matemáticas puedan interpretarse, no reducirse, en modelos de alguna de las Teorías de conjuntos existentes. Y ello en el sentido de que sus objetos se interpreten como definidos en términos de pertenencia a algún conjunto dado, mientras que las proposiciones que se conviertan en teoremas se interpreten como verdaderas en el modelo conjuntista adoptado. Admisión que no supone, en modo alguno, un reduccionismo ontológico, sino un uso de carácter metodológico estricto, a la vez que un reconocimiento de que las Teorías de conjuntos forman un haz teórico matemático realmente importante. Pero en el mismo plano que lo conformaba lo Figural. En otras palabras, es reconocimiento de que las Teorías de conjuntos constituyen un tipo de hacer junto a otros en la praxis matemática.

Enlazado con lo anterior, en el concepto-núcleo «función» —del que he insistido en su carácter de noción básicamente difusa— no sólo interviene un elemento conjuntista. En el concepto «función» hay otro aspecto esencial: el algorítmico, que sólo se manifiesta a través de la computación o a través de la noción de operador. Y el carácter algorítmico u operacional de la noción «función» no queda limitado ni recogido en un enfoque «estático» conjuntista del Hacer matemático. El no recoger este aspecto algorítmico ha sido uno de los puntos centrales para las discusiones respecto al carácter puramente existencial de principios como el de elección, de demostraciones como las dadas por Hilbert...: no construían la función, no computaban la base.

Tratar de recoger el aspecto computacional constructivo, algorítmico, incardinado en el concepto «función», es uno de los objetivos que ha conducido al Hacer computacional. Una praxis que ha constituido una nueva inversión, muy actual, respecto al Hacer global. De aquí la afirmación de que el reduccionismo ontológico conjuntista sólo capta uno de los aspectos intrínsecos de esta noción al enfocarla como mera relación funcional, mero conjunto.

Por otro lado, también parece olvidarse que el Hacer global ha supuesto la aparición de nuevas formas de razonamiento. Y esta aparición implica que la razón constructiva matemática puede ir más allá, transformándose como se transformó al pasar del Hacer Figural al Global. Quiero decir, la praxis matemática no queda limitada, de manera ya definitiva, a un cierto tipo de hacer. Sería caer en los mismos dogmatismos que se encierran en los reduccionismos tanto ontológicos como metodológico.

En este sentido, y en el Hacer global, el Hacer matemático no es una praxis limitada a conjuntos, sino que lo importante es el establecimiento de relaciones y operaciones por las cuales cada uno de los conjuntos, o una clase de los mismos, pueda convertirse en una estructura, bien del tipo de las estructuras consideradas «madre» por los bourbakistas, bien en el sentido aquí apuntado de estructura formal caracterizada por el operador interno «consecuencia de». Construidas estas estructuras, hay que manejarlas como nuevos objetos, plantear posibles morfismos entre ellas...

Y no sólo construir estructuras, lo que básicamente importa en el Hacer matemático —sea Figural o Global, o el más reciente Computacional— es la construcción de modelos posibles de sectores de lo real y, como tal, mostrar su posible aplicación a tales sectores. Y en lo real no se consideran tan sólo conjuntos de elementos cualesquiera, sino que hay elementos objetuales de muy distintos niveles organizativos, así como la exigencia de computaciones y mediciones... El Hacer global aparece como uno de los instrumentos que el matemático construye para esa elaboración posible de modelos de lo real, no reducido, ni reducible, a lo conjuntista ontológico.

IV. LA PRAXIS MATEMÁTICA Y EL MANEJO DE LAS ANTINOMIAS

Los dogmatismos fundacionalistas, con sus reduccionismos ontológicos especialmente, provocan ciertos rechazos entre los matemáticos, para quienes la libertad electiva —he citado a Cantor, a Borel— es esencial. Y el Hacer matemático trata de marginarse a los mismos adoptando una posición más favorable a enfoques de tipo epistemológico y metodológico que, en el fondo, reflejen ciertos aspectos constructivistas, reconociendo que el concepto «constructivismo» es ampliamente difuso.

En este sentido las polémicas en torno a las paradojas y a su papel respecto al Hacer matemático oscurecen un hecho: el que las mismas, desde el Hacer matemático, no son algo traumático, sino, por el contrario, un elemento que puede convertirse en realmente positivo. No implican derrumbe de edificio alguno salvo para quienes ideológicamente pretenden establecer el último y definitivo fundamento al Hacer matemático, salvo para los profetas de desdichas como señalara Poincaré. Para los matemáticos las paradojas se convierten en un problema que hay que analizar, estudiar y, sobre todo, aprovechar. Los matemáticos no enfocan las paradojas con la potencia catastrofista que le asignaron algunos filósofos, especialmente Russell.

Voy a limitarme, aquí, a señalar algunos puntos en el empleo de esas paradojas y las consiguientes desavenencias o separaciones entre los «matemáticos» y los «filósofos».

Por lo pronto se observa que Cantor, en su correspondencia con Dedekind en 1899, considera la colección Ω de todos los números ordinales como en la llamada paradoja de Burali-Forti y la utiliza de manera positiva para dar expresión a su Absoluto. Define «multiplicidad absolutamente infinita o inconsistente» como la que es injectiva con Ω y propone que, por este hecho, esas colecciones no sean propiamente conjuntos. De esta manera Cantor podía probar los límites transfinitos usando su concepto positivo de potencia. Igualmente establece varios principios de existencia de conjuntos: aquellos que proceden de la unión y, en cierta manera, establece las formas de lo que desde Zermelo serán los axiomas de separación y reemplazamiento. Con estas consideraciones vuelve a uno de sus temas centrales: demostrar que todo conjunto puede ser bien ordenado realizando un esquema demostrativo en la forma

> Si una colección no puede ser bien ordenada entonces es biyectiva con Ω y, de aquí, tiene que ser absolutamente infinita. Consecuentemente no puede ser un conjunto.

La paradoja de Cantor parece haber sido conocida por Hilbert y Zermelo hacia 1902, pero ninguno de ellos la consideró como paradoja. En el caso de Hilbert, y como escribe a Frege en 1903, esa dificultad revela que es la formación de conceptos lo que no está claro en el Hacer matemático y es lo que hay que precisar. En el de Zermelo, la utiliza, al igual que Cantor, como un criterio delimitador para lo que considerar conjunto. Es un punto en el que volverá a insistir en 1908:

> Si en teoría de conjuntos nos limitamos a un número de principios bien establecidos como los que constituyen la base de nuestra demostración —principios que nos permiten formar conjuntos iniciales y derivar otros de los dados—, entonces las contradicciones pueden ser evitadas.

Y precisamente como primer teorema de su Teoría axiomática de conjuntos Zermelo establece que

> para cualquier conjunto x hay un y, $y \subseteq x$, tal que $y \notin x$, por lo cual no hay conjunto universal.

La paradoja de Russell queda, así, eliminada.

En 1897 Burali-Forti había demostrado la proposición

> la serie de todos los números ordinales, que se puede ver fácilmente que es bien ordenada, debe tener como tipo ordinal el mayor de todos los números ordinales ß. Sea la serie de los números ordinales anterior seguida por su tipo ordinal correspondiente. Esta serie tendrá como ordinal ß+1, que ha de ser mayor que ß, que se ha supuesto el mayor de todos los ordinales.

Como consecuencia Burali-Forti indicaría que el teorema fundamental de Cantor de que todo conjunto puede ser bien ordenado es incorrecto. La proposición anterior se califica «paradoja de Burali-Forti», pero no fue considerada como tal ni por el autor ni por quienes, tras él, la manejaron.

Así, Jourdain, en 1904, utilizó un argumento apoyado precisamente en un modificación «positiva» de la proposición de Burali-Forti. Jourdain da la demostración en dos etapas. En la primera demuestra que todo cardinal es álef o mayor que todos los álefs; demostración que es una modificación de la dada por Hardy el año anterior y en la cual maneja el axioma de elección de manera implícita, como reconocerá posteriormente Zermelo. En la segunda demuestra que es imposible que exista un cardinal mayor que todos los álefs y emplea, para ello, una versión modificada de la proposición de Burali-Forti. Consecuencia de ambos teoremas, Jourdain obtendrá que todo cardinal es un álef.

Años después, en 1915, Hartog en lo que hoy se denomina «teorema de Hartog» en la Teoría de conjuntos, establece:

> Para cualquier conjunto *M* hay un conjunto bien ordenado *E* que no es aplicable inyectivamente en *M*

y, para ello, hace uso «positivo» de la paradoja de Burali-Forti.

Por no continuar, Gödel, en su demostración, recordará el empleo de la paradoja de Berry como uno de los motores de la idea de su demostración..., y el elemento considerado por Poincaré como causa de las antinomias, la autorreferencia, se convierte en uno de los instrumentos más operativos a través de los teoremas de punto fijo...

Dos posturas ante las paradojas: la de quienes, analizándolas, tratan de manejarlas en su praxis sin considerar que este manejo pueda llevar a contradicciones y, con ellas, a la supresión de cualquier tipo de fundamento del Hacer matemático; la de quienes las ven como el motivo central del derrumbamiento de su praxis, de su trabajo. Estos últimos como Frege o Russell, porque pretenden que ese Hacer sea un Hacer ya definitivamente establecido, un hacer atemporal en el cual el matemático se limita a descubrir objetos, relaciones entre esos objetos...

Escisión entre «matemáticos» y «filósofos» que muy pronto será denunciada por algunos matemáticos. Así, Schoenflies, en sus panoramas de 1908 y 1913 sobre la Teoría de conjuntos desde 1897, señalará que las paradojas no pertenecen a la Matemática sino a la «filosofía» (Jourdain, 1915, p. 207).

Hausdorff en 1908 deplora toda la controversia, las disputas que se han organizado sobre los fundamentos y que se le muestran estériles. Lo que le importa a Hausdorff es el estudio de los tipos ordinales no-numerables, establecer la hipótesis generalizada del continuo, clarificar nociones como la de cofinalidad y plantear la posibilidad de un cardinal límite regular no numerable... Para Hausdorff, en 1914, la «esencia» de número cardinal es asunto de filósofos, como he citado.

En 1915, en sus *Fundamentos de Aritmética,* Loewy adopta como base la serie de los números naturales. Serie que sólo puede venir dada por la axiomática. Indicará que la justificación ontológica de esta sucesión es oficio de filósofos, no de matemáticos, por lo cual un problema como el de la consistencia de dicha serie lo escinde en dos: la consistencia relativa, la dada por la serie de números, y la consistencia absoluta que no ha de ser buscada por los matemáticos...

Distintos enfoques, distintas consideraciones en torno no sólo a las antinomias, sino en cuanto a la praxis del Hacer matemático: para quien pretende un reduccionismo ontológico o metodológico, una praxis cerrada, una especie de planeta que hay que ir descubriendo; para quien la practica, un proceso en el que se va realizando un producto; un proceso con altibajos, con dudas, con proposiciones que quedan más o menos demostradas como indicaría Baire, con problemas que se resuelven pero que dan paso a nuevos problemas...

7. A MODO DE CIERRE, TEMPORAL

En 1908 aparecieron dos grandes proyectos reduccionistas en lo ontológico, de fondo metafísico, de fundamentar el Hacer matemático con formulaciones muy delimitadas: la formulación axiomática conjuntista de Zermelo y la sugerencia logicista de la teoría ramificada de tipos de Russell. Ambas, como proyectos que irán siendo precisados, formalizados.

La teoría ramificada de tipos como base del logicismo dará paso a *Principia Mathematica,* que se irá publicando desde 1910 y que tendrá poca repercusión en el interior de la praxis matemática, aunque servirá como plasmación axiomático-formal de lo que considerar lógica, enfocada como un sistema formal más. Es lo adoptado por Gödel, por ejemplo, para sus demostraciones de limitación de los sistemas formales... Es lo adoptado por el Círculo de Viena en su programa metafísico de establecer unas Ciencias Formales y Físicas...

La axiomática de Zermelo, con las modificaciones de Skolem de 1921 para precisar el término «propiedad bien definida», que había quedado en el aire, y las ulteriores modificaciones de Fraenkel, culminará en lo que se considera Teoría axiomática ZFS.

Con algunas discusiones posteriores, la problemática de unos fundamentos del Hacer matemático queda latente. Con una precisión: la praxis matemática sigue su línea adoptando, ya en general, el Hacer global como campo constitutivo y regulativo de dicha praxis. Hacer global en el cual entra de lleno el manejo de las estructuras caracterizadas mediante el manejo del método axiomático como instrumento definidor existencial.

Los matemáticos se dedican a su praxis —con creación de nuevas disciplinas como la topología con Brouwer como una de las figuras clave, el cálculo matricial, la Topología, el Análisis funcional, la mecánica estadística, la definitiva plasmación de la noción de espacio vectorial...—, en la que se incluye una atención por los temas de la Física, para lo cual alguna de esas disciplinas se van a estimar básicas. Temas a los que Poincaré, por ejemplo, había venido dedicando trabajos, discusiones, presencia en Congresos..., y el intento de la formulación de una nueva teoría como la de la relatividad en los entornos de 1905, precisamente en plena discusión contra los reduccionismos sectoriales logicistas... Temas a los que igualmente la escuela hilbertiana de Gotinga presta máxima atención y en la cual estudian Heisenberg, Schrödinger, Born, Von Neumann, Weyl..., o los ligados a Emmy Nother...

La teoría de la relatividad tiene fuertes y profundas repercusiones en terrenos algo alejados de la praxis científica, como en los movimientos de arte vanguardistas, especialmente a partir de la formulación de la teoría especial, dada tanto por Hilbert —con un enfoque en línea metodológica axiomática— como por Einstein en 1916. Junto a esta teoría surgen otros temas de esa misma física que requieren la atención de algunos matemáticos: la definitiva aceptación de la composición atómica de la materia con su comportamiento cuántico, por ejemplo, paso obligado a la creación de otra de las grandes áreas de conocimiento del siglo XX: la Mecánica cuántica.

Muchos campos a los que prestar atención... Y se observa una cierta atonía en cuanto a las discusiones, antes tan vivas, entre algunos matemáticos en cuanto a su hacer.

La situación tal como se presenta en los entornos de 1915 puede ser clarificada por la declaración de tres matemáticos:

El británico Philip Jourdain, en el Prefacio a su traducción de los ensayos de Cantor de 1895 y 1897, reconoce:

> La revolución filosófica causada por el trabajo de Cantor fue aún mayor, quizá, que la matemática. Con pocas excepciones, los matemáticos alegremente aceptaron, construyeron, examinaron y perfeccionaron los fundamentos de la imperecedera teoría de Cantor; pero muchos filósofos la combaten. Esto puede deberse a que muy pocos la comprenden. Creo que este libro puede ayudar a hacer la materia mejor conocida tanto para los filósofos como para los matemáticos [p. vi].

Quizá más significativa, por espontánea, al ser plasmada en género privado epistolar, se tiene la visión de Norbert Wiener (cfr. Mazani, 1990). En su visita a Europa, sigue el consejo de Russell y marcha a Gotinga a estudiar no sólo los fundamentos de la matemática, sino la teoría atómica de Bohr, la mecánica estadística, el movimiento browniano... El trabajo de la escuela lógica de Cambridge, hacia 1914, se encuentra realmente restringido y de ahí el consejo de Russell para que vaya a Gotinga. Y Norbert Wiener será el único que contribuya en la línea de una teoría axiomática de conjuntos con la definición de par ordenado como conjunto.

Contribución, como ya he señalado, no muy bien vista por Russell, quien le escribirá en 1919:

> Yo no creo que una relación pueda ser considerada como un conjunto de pares ordenados,

ante lo cual Wiener replicará:

> Me parece que lo que es posible en matemáticas es legítimo.

Pero, además, un sistema cerrado de lógica matemática, para Wiener, no es posible y, en consecuencia, no es legítimo.

Desde su estancia en Gotinga, Wiener escribirá en carta de julio de 1914 a Russell:

> La lógica simbólica goza de poco favor en Gotinga. Como siempre, los matemáticos no tendrán nada que hacer con algo filosófico como la lógica, mientras que los filósofos no tendrán nada que hacer con la matemática como símbolos. Por esta razón, no hay ningún trabajo original en este tiempo: es desalentador tratar de hacer trabajo original donde se sabe que nadie a quien hablar entenderá una palabra.

Y se matricula con Laudan en Teoría de grupos y con Hilbert en Ecuaciones diferenciales. En cuanto a los Fundamentos, objetivo central de su viaje, el único que se dedica a ellos es Husserl, y Wiener se matriculará con él en los cursos sobre los escritos éticos de Kant, los principios de Ética y el seminario sobre Fenomenología. La opinión de Wiener, en la misma carta, es rotunda:

> Debo confesar que las contorsiones intelectuales a través de las cuales uno debe encontrarse en la actitud verdaderamente fenomenológica están extremadamente lejos de mí. Las aplicaciones de la Fenomenología a la matemática, y las pretensiones de Husserl de que ninguna explicación puede darse de los fundamentos de la matemática sin partir del enfoque fenomenológico me parecen absurdas.

Fundamentos de la Matemática desde la Fenomenología, como si el logicismo hubiera desaparecido y el conjuntismo se hubiera convertido, en su enfoque heurístico y metodológico apoyado en la axiomática, en el cuadro matemático de base.

Y un tercer matemático, el español Julio Rey Pastor. Al cuadro de base conjuntista hará referencia en el curso que dio en la primavera de 1915 en el Ateneo de Madrid, recogido en su *Introducción a la Matemática Superior. Estado actual. Métodos y Problemas,* editado en 1916. Introducción a lo que califica de «Matemática moderna» (p. 5) y que es la matemática posterior a los trabajos de Riemann y

Weiertrass. Los conceptos clave de la misma son, para Rey Pastor, los de «conjuntos, funciones, grupos» (p. 6), de manera que

> la Matemática futura [...] será la Ciencia de los Conjuntos [p. 9].

En ella se manejarán conjuntos finitos e infinitos, aunque reconoce que todavía permanecen problemas abiertos como el del continuo. De manera radical, Rey Pastor afirma:

> No podemos entrar en esta cuestión del conocimiento del infinito actual, la cual corresponde a la Filosofía y no a la Matemática; pero si no podemos concebirlo, sabemos manejarlo; y este estudio del infinito actual —obra admirable de Cantor— ha revolucionado esta ciencia; dentro de pocos años será el comienzo obligado de todo libro de matemáticas [p. 15].

No sólo comienzo obligado sino realmente estructurador de todas las ramas de la Matemática, apoyadas en la unión de dos métodos: el genético y el axiomático. Una Matemática que tiene problemas abiertos, ciertamente, pero como siempre en ella...

He citado a Rey Pastor por la primera edición de su curso de 1916. La segunda edición, totalmente transformada, se publica en 1951 y constituye la antítesis de la primera. Se reconoce

> el entusiasmo del que estaba contagiado el autor de estas conferencias, en las que se concedía al transfinito injusta preponderancia [p. 21]

porque líneas antes se lee:

> En los comienzos del siglo XIX [*sic*], efímera edad de oro del cantorismo, se consideraban la Aritmética y la Geometría transfinitas de Cantor como base obligada de todo el Análisis; y a ellas dedicaban extenso capítulo preliminar los nuevos tratados. Los éxitos de la escuela francesa (Borel, Baire, Lebesgue, Fréchet) afirmaron este prestigio [p. 20].

Consecuencias del efímero triunfo del cantorismo y el heterodoxo zermelismo, Rey Pastor destaca, en esta segunda edición de 1951,

> la arbitrariedad, como característica de la nueva Matemática [p. 10].

Y los matemáticos de este medio siglo XX se dedican al uso y abuso de las estructuras abstractas, convertidos en constructores pedantes de efímeras teorías que duran lo que sus autores, edificadas en el aire, frente a la actitud de los auténticos matemáticos del siglo precedente, centrados en la resolución de problemas específicos, duraderos, actitud mantenida en este siglo por muy pocos matemáticos, entre los que Rey Pastor menciona a Jacques Hadamard...

Es después de la Primera Guerra Mundial cuando surge otra situación de crisis motivada por una crítica al Hacer global, precisamente. Crítica a una de las consecuencias que del mismo se tenían: al adoptar los sistemas como dados en acto se partía, en el fondo, del infinito. Y es este concepto el que se considera problemático.

Desde esta posición hay un acercamiento de algunos matemáticos, como Skolem o Weyl, hacia líneas constructivistas que quieren representadas, básicamente, por Poincaré. Línea constructivista que va a adoptar especialmente el matemático holandés Brouwer, con su intuicionismo radical, anunciado en su tesis de 1909 y en su disertación de octubre de 1912, pero que había marginado en su obra sobre topología. Brouwer pretende eliminar el elemento existencial no constructivo del Hacer matemático. Las demostraciones existenciales han de mostrar el elemento definido, lo cual implica que las mismas, así como toda la praxis matemática, se limite a un cuadro básicamente finito. El infinito ha de ser desterrado de esa praxis, porque el infinito no existe en ninguna de las parcelas de lo real físico. Lo que se tiene, así, es un intento de eliminación de todo el Hacer global. Y algo más; también en Brouwer hay un ataque a lo que considerar lógica clásica: un principio lógico implícito como el de la bivalencia veritativa, admitido como esencial, debe ser puesto en cuarentena, como toda la Lógica que no puede regular el Hacer matemático... Consecuentemente no caben demostraciones por reducción al absurdo como instrumentos dadores de existencia matemática, que es previa a dicha demostración...

Frente a este intento eliminador de una praxis fecunda, Hilbert se siente en la obligación de salir en defensa del paraíso de Cantor, aun reconociendo la necesidad del elemento finitista en esa praxis. Los elementos infinitos los considera Hilbert como los elementos ideales que se introducen en la Geometría Proyectiva —nuevamente el papel geométrico, ahora proyectivo, como trasfondo para la praxis conceptual matemática— para dotar de simetría y completitud a la misma, para un replanteamiento y explicación justificadora de lo construido. En defensa de, y con metáforas de golpes de Estado, de intentos revolucionarios más o menos bolcheviques, Hilbert plantea un programa que procure dotar de seguridad a la introducción de esos elementos ideales, el Programa de Hilbert.

Pero eso corresponde, ya, a una segunda historia, a la que se inicia después de la Primera Guerra Mundial y, principalmente, a partir de los años veinte, y en la que se entremezclan factores no matemáticos, sino algunos que también tienen que ver con la expulsión de los matemáticos alemanes de los Congresos internacionales.

Limitados a la considerada «crisis de los fundamentos de la Matemática», de una matemática que se va construyendo desde los finales del siglo XIX junto a y frente a la matemática que se venía practicando desde el XVII, la situación descrita en las palabras de Jourdain, de Norbert Wiener, del primer Rey Pastor, como propia de los entornos de 1915, es una situación que permite volver a la pregunta inicial de este trabajo. La de si hubo una auténtica rotura de los fundamentos de la Matemática a primeros años de este siglo, la de si la aparición de las paradojas provocó una crisis en los cimientos de la Matemática. Más rotundo, si es que había cualquier tipo de fundamentación del Hacer matemático que sufriera cualquier tipo de fractura.

Por lo expuesto hasta aquí, la respuesta es, claramente, no. Lo que se tiene es un nuevo tipo de Hacer matemático que se va desarrollando sin tener de antemano los conceptos-núcleo plenamente determinados, ni los métodos demostrativos, ni las notaciones adecuadas... A lo largo de esa praxis los matemáticos van creando nuevos métodos demostrativos, nuevas definiciones, nuevas formas de establecer la existencia de los objetos que se manejan —con escisión entre objetos de diferentes niveles—, van clarificando conceptualmente algunas de las nociones básicas; haciendo camino, van estableciendo nuevas formas de razonamiento...

No hay, en ello, hundimiento fundacional alguno, porque no había nada que fundamentar ontológica o metodológicamente; lo que se tiene es creación de una nueva manera de enfocar el Hacer matemático.

En esa labor creadora aparecen dificultades, conceptos difusos, demostraciones no claras, aseveraciones polémicas entre quienes participan en esta creación conceptual. Dificultades que posibilitan, sin embargo, clarificaciones conceptuales y, con ello, precisiones y avances en este nuevo hacer.

La afirmación de ausencia de crisis, de fundamentaciones radicales, se alza frente a una visión especial que surge, al menos, en Descartes. Y frente a una visión que pretende que todo esté fundamentado en unas verdades definitivas, y ya para siempre, los matemáticos del último tercio del siglo XIX y primeros años de éste, muestran, por el contrario, que su Hacer matemático, su praxis, se reafirma como praxis humana, como producción y producto que realizan unos miembros de esa especie, los matemáticos.

Praxis que, de fundamentada, lo estará en la razón y en su interrelación con la *physis*, no en noción alguna de verdad o principio trascendental. Donde fundamentar se identifique, en todo caso, con búsqueda crítica de clarificación conceptual, con eliminación de ideas poco claras, con intento de caracterizar con precisión los conceptos utilizados, con intentos de resolución de problemas que den paso a otros problemas que, a su vez, precisen el alcance de los anteriores...

Debo señalar que en ese proceso constructivo no sólo se produce un Hacer matemático, que en el caso del Hacer global ha supuesto una auténtica explosión creadora y una profundización de lo que considerar Matemática a lo largo de este siglo. Haciendo camino, la reflexión constructiva crítica de los matemáticos ha obligado, he indicado, a clarificaciones conceptuales, a análisis de su propio hacer. Una labor en la que intervienen, básicamente, los matemáticos, pero que conduce a alguno de ellos —como, en particular, a Dedekind, Cantor, Frege, Husserl, Russell, Hölder, Weyl...—, a desviarse de la propia praxis matemática para concentrarse en esos elementos conceptuales de clarificación. Y se observa que, desde este proceso de nuevo Hacer matemático, Frege discutirá el papel del lenguaje, las nociones de sentido, referencia, significado; Russell iniciará la teoría de las descripciones; Husserl llegará al método fenomenológico...

Haciendo camino clarificador conceptual matemático se van creando disciplinas como la Filosofía del Lenguaje, o la Fenomenología, a la vez que va cristalizando la Lógica formal y se inician enfoques como el analítico en Filosofía... No sólo praxis matemática interna o con su siempre elemento constitutivo para las disciplinas consideradas científicas, sino praxis que condiciona también el pensamiento en campos aparentemente alejados.

REFERENCIAS

ANELLIS, I. H. (1991): «The First Russell Paradox», en *Perspectives on the History of Mathematical Logic*, ed. Th. Drucker, Birkhäuser, Basilea/Boston/Berlín, pp. 33-46.

BISHOP, E. (1975): «The Crisis in Contemporany Mathematics», *Historia Mathematica*, 2, pp. 507-517.

BLANCHETTE, P. A. (1996): «Frege and Hilbert on Consistency», *Journal of Philosophy*, XCIII, n.º 7, julio, pp. 317-336.

BOREL, E. (1950): *Leçons sur la Théorie des fonctions*, 4.ª ed., Gauthier-Villars, París. La 1.ª ed. es de 1898. Cada edición fue enriquecida con Notas, entre las que se encuentra la IV, correspondiente a la polémica de 1905 con Baire, Lebesgue, Hadamard, pp. 150-179.

BOURBAKI, N. (1948): «L'architecture des mathématiques», en Le Lionnais (ed.), *Les grands courants de la pensée mathématique*, Cahiers du Sud; trad., Eudeba, Buenos Aires.

CANTOR, G. (1915): *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, trad. al inglés, prefacio y notas de Ph. Jourdain, reimp., Dover, Mineola, Nueva York.

CANTOR, G./DEDEKIND, R.: Correspondencia, trad. franc. en J. Cavaillès, *Philosophie Mathématique*, Hermann, París, 1962, pp. 179-252.

CAUCHY, A.-L. (1994): *Curso de Análisis*, selección, trad. y notas de C. Álvarez Jiménez, introd. de J. Dhombres, Mathema, México. Comprende siete capítulos de *Análisis Algebraico* de 1821 y diecisiete de *Lecciones sobre el cálculo infinitesimal* de 1823.

CORRY, L. (1996): *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*. Birkhäuser, Basilea/Boston/Berlín.

DAUBEN, J. W. (1990): *George Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Princeton University Press, Princeton, NJ. La 1.ª ed. es de 1979.

DE LORENZO, J. (1971): *Introdución al estilo matemático*, 2.ª ed., Tecnos, Madrid, 1989.

— (1980): *El método axiomático y sus creencias*, Tecnos, Madrid.

— (1992): *Experiencias de la razón*, Universidad de Valladolid.

— (1992): «La Matemática, ¿incompleta, aleatoria, experimental?», *Theoria* VII, pp. 423-450.

— (1993): «La razón constructiva matemática y sus haceres». *Mathesis*, 9, México, pp. 129-153.

— (1996): «The Mathematical Work-Mode and its Styles», en Ausejo y Hormigón (eds.), *Paradigms and Mathematics*, siglo XXI, Madrid, pp, 215-232.

— (1996): «El ordenador y la demostración matemática», en Echeverría, De Lorenzo y Peña (eds.), *Calculemos... Matemáticas y libertad*, Trotta, Madrid, pp. 187-201.

DEDEKIND, R. (1872): *Continuity and Irrational Numbers*, traducido al inglés en *Essays on the Theory of Numbers* por Bermann, Dover, 1962.

— (1888): *The Nature and Meaning of Numbers*, traducido al inglés en *Essays*, cit.

— (1890): Carta a Kefernstein, 27 de febrero. Trad. inglesa en Van Heijenoort (ed.), pp. 98-103.

FEFERMAN, S. (1977): «Categorical Foundations and Foundatios of Category Theory», en R. Butts (ed.), *Logic, Foundations of Mathematics and Computability*, Reidel, Nueva York, pp. 149-169.

— (1984): «Foundational ways», en Jäger-Moser-Remmert (eds.), *Perspectives in Mathematics, Anniversary of Oberwolfach 1984*, Birkhäuser, Basilea/Boston/ Berlín, pp. 147-158.

— (1985): «Working Foundations», *Synthese* 62, pp. 229-254.

FREGE, G. (1884): *Die Grundlagen der Arithmetik*. Trad. U. Moulines, *Fundamentos de la Aritmética*, prólogo J. Mosterín, apéndice Cl. Imbert, Laia, Barcelona, 1972.

— (1980): *Philosophical and Mathematical Correspondence*, Mc Guinnes ed., trad. Kaal. Oxford.

GERGONNE, J. D. (1824): «Recherche de quelques unes des lois générales qui regissent les polyèdres», *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*, vol. XV.

— (1826): «Considérations philosophiques sur les éléments de la science de l'étendue», *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*, vol. XVI.

— (1827): «Recherches sur quelques lois générales qui regissent les lignes et surfaces algébriques de tous les ordres», *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*, vol. XVII.

— (1847): «Note sur le principe de dualité en géométrie», *Mémoires de la Academie des Sciences de Montpellier*, vol. I.

GRATTAN-GUINNES, I. (comp.) (1980): *From the Calculus to Set Theory, 1630-1910. Introductory History*, trad. M. Martínez, *Del Cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica*. Alianza, Madrid, 1984.

GRAY, J. (1987): «The Discovery of Non-Euclidean Geometry», en *Studies in the History of Mathematics*, ed. E. R. Phillips, The Mathematical Association of America, Washington, DC, pp. 37-60.

HAUSDORF, F. (1914): *Mengenlehre*, trad. de la 3.ª ed. de 1937 *Set Theory*, en Chelsea, 1962, con dos apéndices de Goodstein.

HEINZMANN, G. (ed.) (1986): *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano. Textes de la discussion (1906-1912) sur les Fondements des mathématiques*, A. Blanchard, París.

HILBERT, D. (1899): *Fundamentos de Geometría*, trad. de la 7.ª ed. de F. Cebrián, CSIC, Madrid, 1953.

— (1900): «Über den Zahlbegriff», como Apéndice VI de 1899.

— (1902): *Sur les Problèmes futurs des mathématiques*, trad. francesa de M. L. Laugel, Gauthier-Villars, Montrouge; reed., J. Gabay, París, 1990.

— (1905): «Sobre los fundamentos de la Lógica y de la Aritmética», Comunicación al Congreso de Heidelberg de 1904. En 1899.

— (1992): *Natur und mathematisches erkennen*, Curso dado en el verano de 1919 en Gotinga. Editado por Rowe de los apuntes tomados en clase por P. Bernays. Birkhäuser, Basilea/Boston/Berlín.

— (1993): *Fundamentos de las Matemáticas*, trad. de L. F. Segura, Mathema, México. Comprende varios ensayos de los que, aquí, afectan esencialmente: «Pensamiento axiomático» (1917), «La nueva fundamentación de la matemática» (1922), «Los nuevos fundamentos de las matemáticas» (1922) y «Acerca del infinito» (1926).

JAFFE, A. (1997): «Proof and the Evolution of Mathematics», *Synthese*, 111, pp. 133-146.

JOURDAIN, Ph. (1915): «Preface» a Cantor, *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, Dover, Mineola, Nueva york.

LAWVERE, W. (1966): «The Category of Categories as a Foundation for Mathematics», *Proceeding of La Jolla Conference on Categorical Algebra*, Springer, Nueva York, p. 1-20.

MARQUIS, J-P. (1995): «Category Theory and the Foundations of Mathematics: Philosophical Excavations», *Synthese*, 103, pp. 421-447.

MASANI, P. R. (1990): *Norbert Wiener 1894-1964*, Birkhäuser, Basilea/Boston/Berlín.

MEDVEDEV, F. A. (1991): *Scenes from the History of Real Functions*, Birkhäuser, Basilea/Boston/Berlín.

OTERO, M. (1997): «Structure deductive et ontologie des théories; un cas de proto-métamathématique: la dualité dans la géométrie projective du debut du XIXe siècle», *Galileo*, 2.ª época, n.° 15, pp. 25-36.

PASCH, M. (1882): *Vorlesungen über neuere Geometrie*, trad., con notas y adiciones del autor, Alvarez Ude y Rey Pastor, *Lecciones de Geometría Moderna*, Junta para la Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas, Madrid, 1913.

PLA, J. (1993): *Axiomes alternatives de la Teoría de conjunts i llur influència en matemàtiques*, Institut d'Estudis Catalans, Barcelona.

POINCARÉ, H. (1894): «Sur la nature du raisonnement mathématique», *Rev. Méth. et de Morale*, 2, pp. 371-384. Cap. I de *La Science et l'Hypothèse*, Flammarion, París, 1902.

— (1902): «Les fondements de la Géometrie. Analyse et discussion de l'Ouvrage de Hilbert: *Les fondements de la Gèometrie*», en *Oeuvres complètes*, t. XI, Gauthier-Villars, Montrouge, 1956, pp. 92-113.

REY PASTOR, J. (1916): *Introducción a la Matemática superior. Estado actual. Métodos y problemas*, Biblioteca Corona, Madrid.

— (1951): *La Matemática superior. Métodos y problemas del siglo XIX*, Iberoamericana, Buenos Aires, Es la 2.ª ed. de la anterior, radicalmente transformada y convertida en su antítesis.

— (1957): *Lecciones de Álgebra*. 4.ª ed. totalmente revisada, Madrid.

RUSSELL, B. (1903): *Los principios de la Matemática*, trad. de J. C. Grimberg, Espasa Calpe, Buenos Aires, 1948.

SCANLAN, M. (1991): «Who were the American Postulate Theorists?», *Journal of Symbolic Logic*, 56-3, pp. 981-1002.

TAIT, W. W. (1996): «Frege versus Cantor and Dedekind: On the Concept of Number», en M. Schirn (ed.), *Frege: Importance and Legacy*, De Gruyter, Berlín, pp. 70-113.

TAYLOR, R. G. (1993): «Zermelo, Reductionism and the Philosophy of Mathematics», *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 34-4, pp. 539-563.

VAN HEIJENOORT, J. (ed.) (1967): *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Harvard University Press, Cambridge, MA.

WANG, H. (1991): «Gödels's and Some Other Examples of Problem Transmutation», en Th. Drucker (ed.), *Perspectives on the History of Mathematical Logic*, Birkhäuser, Basilea/Boston/Berlín, pp. 101-109.

WAERDEN, B. L. van der (1985): *A History of Algebra*, Springer, Berlín/Heidelberg.

WEBB, J. C. (1997): «Hilbert's Formalism and Arithmetization of Mathematics», *Synthese*, 110, pp. 1-14.

ZERMELO, E. (1908): «Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I», *Mathematische Annalen*, 65. En Heinzmann (1986). Trad. inglesa en Van Heijenoort (ed.), pp. 199-215.