JAVIER DE LORENZO

KANT Y LA MATEMÁTICA

El uso constructivo de la razón pura

tecnos

Diseño de cubierta:
Juan Manuel Domínguez

Impresión de cubierta:
Gráficas Molina

La presente obra ha sido editada mediante ayuda de la Dirección General del Libro y Bibliotecas del Ministerio de Cultura.

Telémaco, 43 - 28027 Madrid
ISBN: 84-309-2207-5
Depósito Legal: M-27873 -1992

Printed in Spain. Impreso en España por Mapesa, C/ Villablino, 38.
Fuenlabrada. Madrid

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

1. Hay autores para los cuales la Filosofía de la Matemática comienza en Frege: todo lo anterior, prehistoria. Como señalan Aspray-Kitcher (1988), la visión ortodoxa de los historiadores del pensamiento, la que ha prevalecido hasta casi nuestros días, atribuye a Frege haber «creado» la Lógica formal, planteado los problemas considerados como clave de la Filosofía de la Matemática —además de iniciar la Filosofía del lenguaje— y haber realizado el intento más riguroso de establecer un Fundamento de la Matemática.

Desde esa visión ortodoxa-clásica no se ha tenido en cuenta la declaración explícita de Frege de que en su obra, la de su primera época, lo que pretende es perfeccionar el pensamiento kantiano en cuanto a la Aritmética, manteniéndolo en cuanto a la Geometría. Tampoco que pensadores tan diversos como Poincaré, Brouwer, Hilbert... hubieran acudido al patronazgo kantiano. No se tenía presente, en esa visión canónica, ortodoxa, que es en el cuadro conceptual kantiano en el que se mueve no sólo Frege, sino gran parte de la discusión filosófica matemática constructivista.

No se tenía en cuenta algo más claro: si ciertamente Kant no compuso tratado sistemático alguno acerca de la Filosofía de la Matemática, toda su obra viene subtendida por la problemática matemática. Incluso atacará a los matemáticos porque

> apenas han filosofado jamás sobre sus matemáticas (tarea nada fácil) [B 753],

por lo que, en el fondo, será él quien trate de cubrir esa laguna y llevar a cabo lo que deberían realizar los propios matemáticos, realizar una Filosofía de la Matemática. Declaración explícita de Kant de que en su obra sí se encuentra tal realización y, con ella, la clarificación de los principios, campos propios, métodos, problemática y fundamentos de la Matemática. Más aún, ahora implícito, Kant pretende haber resuelto el fundamento epistemológico de la Matemática —lo que también pretenderá, en su momento, Frege— porque ha mostrado cómo es posible el conocimiento científico y, a la vez, ha establecido las barreras propias de ese conocimiento frente a las del pensamiento puro. Ha delimitado, así, el campo propio en el que cualquier conocimiento puede proseguir, ahora sin barrera intrínseca de tipo alguno.

El enfoque constructivista y obligadas precisiones desde los teoremas de incompletud de la Aritmética de Gödel, indefinibilidad de Tarski, indecidibilidad de Church en cuanto a los límites de los sistemas formales, en cuanto a las posibles diferencias entre los razonamientos lógico formal y matemático han llevado a renovados estudios sobre la Filosofía de la Matemática anterior a Frege y, en particular, sobre la kantiana por parte de autores como Hintikka, Parsons, Kitcher, Risjörd, Friedmann... en estos últimos años.

Estudios —junto a los elaborados en cuanto a la influencia kantiana sobre el neopositivismo, sobre la Filosofía de la ciencia...— por los que se está alcanzando una nueva visión, que a su vez se pretende convertir en ortodoxa, en la historia de las ideas en torno a la Filosofía de la Matemática. En ella se retrotrae el planteamiento de la problemática de la Filosofía de la Matemática desde Frege a Kant.

Teniendo presentes las declaraciones explícitas de Kant y el interés actual por su pensamiento en cuanto a la Matemática, se hace conveniente, entre otras razones, tratar ese pensamiento de Kant en cuanto a la Matemática, en cuanto a su Filosofía de la Matemática.

2. Y lo primero, observar que algunos autores han indicado que la conceptuación kantiana en este terreno es la parte más débil de su creación. Cabe achacarle, por un lado, falta de coherencia interna, incapacidad para captar la Matemática de su época; por otro, que el hacer matemático posterior hace inviable su posición; en particular, y sobre todo, la existencia de teorías como las conjuntistas y, más aún, de las Geometrías no-euclídeas.

Las Geometrías no-euclídeas, con sus repercusiones en teorías como la de la relatividad, son estimadas como piedra de toque de la Filosofía de la Matemática kantiana en el sentido de que si es incapaz de dar cuenta de tales sistemas formales, de esas Geometrías no-euclídeas, esa Filosofía de la Matemática se mostrará incapaz de dar cuenta del hacer matemático en su totalidad. De ahí que, cuando menos, tal filosofía deba ser ignorada, si no denostada.

Ahora bien, se puede admitir que si su pensamiento en cuanto a la Matemática falla, es toda su creación la que se viene abajo. Para Kant la Matemática es uno de los *dos* usos de la razón y observa que, por la certeza y necesidad que se le atribuye, ha influido sobre los filósofos de manera tal que han creído que el método matemático podría aplicarse al filosófico. Aplicación que, para Kant, ha tenido un resultado nefasto; ha provocado una auténtica desvirtualización de la filosofía. Se hace objetivo esencial, en Kant, tarea básica y primaria de la *Crítica*, marcar los límites del conocer matemático para que la filosofía pueda moverse en su campo propio, libremente, sin la «nefasta» influencia del método matemático. Para el buen filosofar es preciso la previa delimitación de los dos usos de la razón pura.

Delimitación que requiere, claramente, de la caracterización intrínseca de tales usos; requiere de la clarificación de los métodos estrictamente matemáticos, así como del objeto de la Matemática.

Esa tarea básica y preliminar de la razón crítica viene condicionada, así, por la Matemática, lo que se refleja en la posición antagónica de Kant respecto al dogmatismo que, para él, está representado por Leibniz-Wolff. Dogmatismo que enfoca el conocimiento como exclusivamente conceptual, al modo matemático.

3. En polémica implícita, en intentar liberar a la filosofía del influjo matemático, Kant sostiene que el conocimiento sólo puede venir dado por la unión de la sensibilidad y el entendimiento, sólo puede venir dado por la existencia de lo que calificará juicios sintéticos *a priori*, que constituyen el cuerpo proposicional de la teoría Matemática, mientras que serán los juicios analíticos los característicos de la filosofía.

Son los juicios sintéticos *a priori* los que posibilitan la Matemática y, con ella, la ciencia natural, como disciplinas cognoscitivas. Y la tarea de la filosofía, desde el comienzo, se centrará en establecer la posibilidad de estos juicios, y con ella de la matemática. De modo explícito Kant afirma:

> En último término, la crítica de la razón nos conduce, pues, necesariamente a la ciencia [B 22].

Cabe asegurar que es la Matemática la piedra de toque, con prioridad lógica, del planteamiento epistemológico kantiano —que se condensaría en realizar la pregunta adecuada—. Más aún, de su solución, porque es la matemática la que le conduce al establecimiento de la escisión, y enlace, entre la sensibilidad y el entendimiento; la que conduce a la solución de la existencia de los juicios sintéticos *a priori*; consecuente, la que lleva a buscar la solución delimitadora en la línea de la crítica. Consecuente, la que muestra que esa crítica es, simultáneamente, una verdadera Filosofía de la Matemática.

Es claro que la exposición kantiana no emplea, ni menciona, este origen, y que Kant pretenderá ir más allá del hacer matemático, pero además de que la *Crítica de la razón pura* culmina, precisamente, con la diferencia de Matemática y Metafísica y la asignación de papel preponderante a esta última, en la Introducción, Sección V, hará referencia a que todas las ciencias teóricas de la razón contienen juicios sintéticos *a priori* como principios. Esa misma Sección contiene la pregunta epistemológica clave, aquella a la cual debe dedicarse como tarea esencial la razón pura: ¿cómo son posibles los juicios sintéticos *a priori*?, que conlleva, claramente, la cuestión ¿cómo es posible la matemática? y, con ella, ¿cómo es posible la ciencia natural? Y la respuesta establecerá el uso puro de la razón en la fundamentación tanto de la Matemática como de la ciencia natural pura y, con ello, la delimitación de la propia filosofía.

4. Si he indicado que actualmente se está creando una nueva visión en la cual la Filosofía de la Matemática comienza en Kant, debo remarcar, y por lo antes esbozado, que en Kant la Filosofía de la Matemática es algo inseparable de su concepción epistemológica global, así como del papel que hace desempeñar a la Lógica formal, que, en sus términos, es Lógica general pura. Constituye una unidad orgánica, por lo que desgajarla y considerar como parcela propia, acotada, los pensamientos kantianos respecto a la Matemática, conduce a atribuciones erróneas, a desenfoques.

De entre éstos, y puede estimarse como francamente ilusorio a pesar de que es terreno de actual discusión, se tiene la sugerencia —que iré haciendo a lo largo de este trabajo— de que la posibilidad lógico-formal pueda ser dotada, en un momento posterior, de posibilidad real. Es lo que supondría, para un posible defensor kantiano, la capacidad de construir sistemas formales consistentes a los que poder dotar, posteriormente, de significación con validez objetiva, es decir, se los pueda convertir en conocimiento. Y ello supondría, a la vez, la admisión de que en el sistema kantiano pueden tener sentido las geometrías no-euclídeas y, así, se puede sostener toda su posición en Filosofía de la Matemática.

Lo cual carece de sentido, realmente, porque si bien no puede mantenerse, como veremos, que las Geometrías no-euclídeas puedan ser fundamentadas o explicadas desde el kantismo, ello no invalida todo su pensamiento. No se trata, como se ha querido desde la visión ortodoxa, del todo o nada.

Se requiere, por ello, de un recorrido, por breve que sea, de las concepciones de Kant respecto a la Epistemología como, desde ellas, de la Lógica.

5. Finalmente, aquí, debo advertir que la Filosofía de la Matemática kantiana, que se origina como consecuencia de su intento delimitador y, con ello, clarificador de los dos usos de la razón pura, encuentra su plasmación radical —por ese origen— en su obra *Crítica de la razón pura*. Lo cual no implica, evidentemente, que Kant no haga referencia al pensamiento matemático en otros escritos. Pero esas referencias van a ser, ya, de algo resuelto: la criba de la razón ha permitido marcar los límites y, con ello, clarificar y poder emplear la razón de un modo correcto en cada uno de sus campos propios, sin las mezclas anteriores.

Es el motivo por el cual me limito, aquí, básicamente a esta obra kantiana. Más aún, a la segunda edición, la de 1787. Las citas de la *Crítica de la razón pura* las hago de la edición B y, siempre, de la versión española realizada por Pedro Ribas.

1. EL SISTEMA

1.1. EL MARCO PREVIO

1. Por lo pronto, Kant se mueve en el plano racionalista empirista en el que todo conocimiento se escindía en dos grandes apartados: el de las verdades de razón y el de las verdades de hecho.

En su *Monadología*, parágrafo 33, Leibniz afirma:

> Asimismo hay dos clases de verdades, las de razón y las de hecho. Las verdades de razón son necesarias y su opuesto es imposible, y las de hecho son contingentes y su opuesto es posible. Cuando una verdad es necesaria se puede hallar su razón por medio de análisis, resolviéndola en ideas y verdades más simples, hasta que se llega a las primitivas.

Y en el parágrafo 35, continúa:

> Y se dan, finalmente, ideas simples, de las que no cabe dar definición. También hay Axiomas y Postulados o, en una palabra, *principios primitivos*, que no pueden probarse ni necesitan prueba; son éstos las Enunciaciones idénticas cuyo opuesto encierra una contradicción expresa.

Leibniz adopta, como elemento clave, un criterio lógico-formal: el principio de contradicción, y un método, el analítico o resolutivo para los conceptos, mientras que asume el criterio derivativo formal para las proposiciones. Los conceptos de razón pueden ser analizados por el método resolutivo hasta alcanzar los conceptos primarios, ciertos e indudables; las verdades de razón pueden reducirse derivativamente hasta los juicios de identidad. En ambos casos el método queda condicionado por la consistencia formal. Por otro lado, a las verdades de hecho también se les aplica el mismo criterio formal de consistencia por el que su opuesto es posible.

Es el plano conceptual puro el que parece presidir el pensamiento leibniziano. Plano al que, sin embargo, agrega una condición modal, la necesidad de las verdades de razón.

Existencia de dos tipos de conocimiento, conceptual-fáctico; de un método analítico o resolutivo conceptual; de un criterio de consistencia que conlleva la condición modal de necesidad. Notas que me interesa destacar aquí, pues Kant las aceptará, en el fondo, aunque les pretenda asignar un matiz diferenciador.

Es el escéptico Hume quien despertará a Kant del sueño dogmático. Sueño que atribuye a la filosofía de Leibniz-Wolff y que, según expresará en *Crítica*, no es otra cosa que

> la pretensión de avanzar con puros conocimientos conceptuales (los filosóficos) conforme a unos principios —tal como la razón los viene empleando desde hace mucho tiempo—, sin haber examinado el modo ni el derecho con que llega a ellos [B XXXV].

El error del dogmatismo se centra en proceder con sólo lo conceptual, cuyo criterio es el de contradicción. Y el no preocuparse, subrayará Kant, de las condiciones reales de dicho conocimiento, problema ni siquiera planteado. Es el que Kant se cuestionará, realmente.

Ahora bien, si Hume es quien despierta a Kant de su sueño dogmático, no es menos cierto que Hume también mantiene la misma dicotomía leibniziana respecto al conocimiento. Para Hume, en su *Investigación sobre el conocimiento humano*,

> Todos los objetos de la razón o de la investigación humana pueden dividirse naturalmente en dos clases, a saber, *relaciones de ideas* y *cuestiones de hecho*. De la primera clase son las Ciencias de la Geometría, el Álgebra y la Aritmética y, en pocas palabras, toda afirmación que sea o bien intuitiva o bien demostrativamente cierta. [...] El contrario de toda cuestión de hecho es siempre posible, porque no puede implicar nunca una contradicción.

Las relaciones de ideas son, para Hume, ciertas y evidentes y, lo que es más importante, las proposiciones matemáticas

> se pueden descubrir por la mera operación del pensamiento, independientemente de lo que exista en parte alguna del universo.

Independientes a su existencia material, esas ideas se apoyan, mantendrá Hume, y en última instancia, en la experiencia.

Se encuentran, así, en Hume, las mismas notas que en Leibniz: dos tipos de conocimiento; uno, cierto y evidente, el matemático; otro, contingente. Criterio diferenciador, la consistencia. Y, al igual que Leibniz, aunque pretenda una crítica del dogmatismo racionalista, Hume tampoco se abocará a analizar, a criticar las condiciones y posibilidades del conocimiento.

Y esto último constituye una de las tareas centrales de la razón crítica para Kant, y de aquí que se convierta en uno de sus puntos de crítica a los pensadores anteriores pero, a la vez, se convierta en un elemento que considera como uno de sus aportes más originales.

Esquemáticamente, cabría sostener que un dogmático apuesta por un racionalismo sin experiencia; un escéptico a lo Hume, por un empirismo sin necesidad racional. Y ambos van a tener, por ello, una radical dificultad: justificar el conocimiento del mundo. Frente al escéptico, cuyo valor es meramente crítico porque el conocer científico, la Matemática y la Mecánica newtoniana están ahí, entre otros, un estar ahí como conocimiento que no cabe suprimir o desconocer..., el dogmático se ve impotente para enlazar las verdades de razón con las fácticas.

Impotencia que, en el caso de Leibniz, se resuelve según Kant con una falsificación o adulteración de lo que el mero sentido común, que no exige reflexión sutil alguna, muestra: que la representación de un objeto en la intuición es mera receptividad y no conocimiento. Un dogmático como Leibniz falsea al afirmar que la representación receptiva *es* conocimiento de la cosa en sí, de la naturaleza de los objetos, aunque admita que tal conocimiento se muestra algo oscuro. Kant acusará de engaño a una posición como ésta porque no es que en esa receptividad se obtenga un conocimiento oscuro, es que en la misma, por su naturaleza, no se produce conocimiento.

Leibniz ha confundido la receptividad, la sensibilidad, con el conocimiento, con el entendimiento y ha llegado a identificar la representación sensible con la imagen de la cosa.

Un dogmático, para Kant, no es otro que aquel que confunde entendimiento y sensibilidad, entendimiento con la intuición sensible que no puede dar más que reacciones subjetivas, afecciones de las cosas y nunca la cosa en sí. Confusión de planos por no haber llegado a plantear la pregunta correcta, la adecuada en cuanto a las auténticas condiciones del conocimiento. Unas condiciones que, en todo caso, y para un dogmático, pasan por una actualización de la esencia, por una completud de lo posible. Es lo que, en Leibniz, permite obtener la existencia; de lo posible a lo actual. Lo que supone, claramente, una marginación de la experiencia, invirtiendo lo que, para Kant, constituye el único punto de partida del conocimiento.

2. Si éste es un muy breve resumen de un marco previo, hay que hacer constar, en él, una problemática, ligada a todo lo anterior, pero ahora centrada en el razonamiento matemático. En él, aparece una muy vieja dificultad, la que surge de la admisión de una fase en el razonamiento matemático en la que se requiere de un elemento singular, a la vez que se pretende que ese razonamiento sea universal.

Si es el proceso que aparece en los teoremas de los *Elementos* de Euclides con las fases de particularización, elaboración y generalización o universalización, será Descartes quien plantee nuevamente el problema admitiendo la necesidad de esa fase de concreción, la necesidad de la figura singular y material en el proceso demostrativo matemático. Necesidad de particularización como elemento diferenciador entre el razonamiento matemático y el silogístico. Diferencia, además, que muestra que el primero es irreducible al segundo.

Trata Descartes de superar la dificultad sosteniendo que el objeto matemático posee una cierta naturaleza, forma o esencia determinada por la figura que es inmutable y eterna, independiente al espíritu (cfr. *Quinta meditación*). La esencia de ese objeto, de esa idea innata, es la que constituye el objeto de la intuición matemática. Esencia reconocible en la figura concreta cuyo papel se centra, precisamente, en posibilitar la intuición de la esencia que subtiende a dicha concreción material.

Frente a Descartes, frente a esa esencia inmutable y eterna que habría que captar mediante la intuición —una intuición sensible trascendida por una intelectual—, los empiristas y, en concreto, Locke opondrán la concepción de que el objeto matemático no es otra cosa que un *concepto general*. Como concepto, el triángulo no será isósceles, ni escaleno, ni rectángulo... Y la figura material, singular, lo que hace es permitir alcanzar dicho concepto general.

Frente a un platonismo intuicionista cartesiano, un conceptualismo lockeano. Justificaciones finales distintas aunque, en ambos casos, aceptación incondicional y no explicada de que se requiere, como necesaria, de una fase de singularización en el razonamiento matemático. No se busca una justificación para tal necesidad, aunque sí se pretenda una solución para la universalidad contenida en la imagen singular, concreta, que dicha fase implica.

Como señala Beth (1961, 8), es Berkeley quien llega a plantear, con nitidez, el problema. Un problema que, en el fondo, se escinde en dos:

— Justificar la necesidad de que intervenga, en la demostración matemática, ese elemento particular, sea figura u operación concretas; justificar la necesidad de esa fase de particularización.

— Explicar cómo, a pesar de esa particularización, el razonamiento matemático da paso a una conclusión universal; justificar la fase de universalización.

Dos problemas permanentes en la problemática del razonamiento matemático y que siguen vigentes hoy día como tales problemas en el interior de campos como los logicistas, formalistas y conjuntistas. Dos problemas que subtienden el pensamiento kantiano, y en su enfoque epistemológico pretenderá superar, precisamente, los dos.

Convierte el primero en una de las condiciones esenciales del conocimiento: para lograrlo el sujeto hace intervenir en la intuición pura la representación material del objeto concordante con el concepto, representación singular que es la única manera de dotar de validez objetiva a dicho concepto. Con esta admisión, a la vez, se pretende dar solución a otro problema, el existencial ontológico.

El segundo problema lo resuelve apoyándose en la noción de esquema que, como producto de la imaginación pura, alcanza la universalidad asociada al concepto gracias a un proceso constructivo, con lo que sortea, así, las dificultades que mostraba la representación singular para alcanzar, desde esa singularidad concreta, la universalidad requerida por el conocimiento...

Una problemática estrictamente matemática pero que, claramente, incide en cualquier intento de solución epistemológica. Problemática propia del marco previo en el que situar, obligadamente, a Kant.

3. Hay que observar que, en todo lo anterior, se tienen tres elementos en juego: lógico, epistemológico, modal, subtendidos siempre por un criterio valorativo. Por el primero, los juicios cabe escindirlos en analíticos y sintéticos; por el segundo, el conocimiento se escinde en *a priori* y *a posteriori*; por el tercero, las relaciones de ideas, los juicios analíticos, las verdades de razón, se muestran necesarias, no contingentes.

Para Kant el plano básico va a ser el epistemológico pero en cuanto estudio de las condiciones de posibilidad del conocimiento. Sólo desde ese enfoque podrá, posteriormente, hacer un juego constructivo, un empleo adecuado de la razón: porque no basta decir que hay conocimiento conceptual y conocimiento empírico, sino que, desde lo racional, hay que plantear las posibilidades del mismo. Bien entendido que lo que no se hace es, precisamente, conocimiento científico, situados en un plano de distinto nivel.

El problema se centra, entonces, en los elementos constitutivos del sujeto para que tenga lugar el conocimiento, no sólo el pensamiento o las sensaciones. Es lo que conviene analizar en un primerísimo lugar.

4. No sin advertir, previamente, que la solución kantiana a la problemática de dogmáticos y escépticos, a la problemática que se plantea en el razonamiento matemático con sus dos fases, a la problemática del conocimiento en general, es una solución que se incardina en el pensamiento global de la Ilustración. Esquemáticamente, esta solución puede esbozarse como sigue:

Se acepta que la razón es la productora de conocimiento, pero de acuerdo, siempre, con la experiencia. Y el filósofo tiene como misión, entre otras, alcanzar los principios por los que esa razón produce, como fuente, dicho conocimiento con motivo de la experiencia. Para ello, ese filósofo, en su búsqueda crítica, logra establecer tres niveles en el proceso epistemológico. Niveles jerarquizados de mayor a menor particularización:

— la obra en sí, con su concreción singular pero, a la vez, arquetípica;

— las reglas, métodos o esquemas —los géneros— que permiten la producción o creación no sólo de dicha obra, sino de múltiples concreciones singulares de la misma;

— los principios de la razón, constitutivos y, por ello, condicionadores del establecimiento de las leyes o reglas anteriores, con validez general.

De esta forma, los principios constitutivos permiten establecer los esquemas regulativos o géneros, que se plasman en distintas figuras, operaciones, obras literarias, artísticas...

Desde este enfoque se observa que los principios son los que establecen las condiciones formales, siempre *a priori*, bajo las cuales puede surgir el método o regla que, por tal establecimiento, encierra la universalidad que se plasma en cada representación. Y ello porque esos métodos o esquemas conducen a las producciones o representaciones singulares, concretas que no son otra cosa que las figuras en la Geometría, los métodos de cálculo en la Aritmética y el Álgebra, la obra poética o literaria en la Literatura.

Es tarea o labor crítica del filósofo —además de tener una faceta educativa— alcanzar la visión, precisamente, de esa escisión en tres niveles propia de la razón por la que dé cuenta de esa terna constitutiva del conocer, del producir poético; en el fondo, constitutiva de ella misma. Tarea que se condensa en el establecimiento de la razón crítica —razón poética— que posibilite responder a la pregunta: cómo es posible la Matemática —la obra literaria—, mediante la exposición y valoración de los tres niveles apuntados.

Constituyen estos tres niveles una arquitectónica donde, insisto, los principios de la razón establecen las condiciones de validez de las reglas o esquemas y éstas, como reglas, posibilitan la elaboración de obras singulares. Son los principios de la razón los que condicionan los esquemas o métodos; los esquemas los que permiten elaborar la obra.

Y si la razón poética, literaria, muestra como uno de sus principios el de ficción o fantasía que condiciona las reglas o géneros que posibilitan al sujeto crear o producir la obra literaria, ésta se produce de acuerdo con la experiencia, porque dicha obra, que nunca es mero reflejo de la naturaleza, viene condicionada por la constitución del propio sujeto que no puede imaginar fantásticamente lo que le apetece... Un racionalista puro olvidaría el papel condicionador del cuadro contextual empírico en el que se encuentra el autor literario...

Para la búsqueda de los principios de la razón crítica, de la razón poético-literaria, no se ha de partir de la obra literaria, de la figura concreta o singular, sino que es a esa obra, a esa figura, a la que se llega. La figura singular, la obra literaria mostrarán unos rasgos accidentales, propios de su singularidad concreta, pero no los propios del esquema ni, mucho menos, de los principios que son los que, en última instancia, posibilitan tal concreción singular. Un empirista puro olvida el papel de la necesidad de los principios constitutivos que impiden que la obra literaria sea un mero elemento concreto y no arquetípico, olvida el papel creador del autor literario...

Carece de sentido, desde esta perspectiva, achacar incompetencia o incomprensión a quien no distingue las notas accidentales de las relevantes en la figura; el incompetente es quien hace ese intento de distinción donde carece de sentido hacerlo. Lo cual no es obstáculo para que la figura concreta, la fórmula numérica particular no constituyan una ayuda, una heurística en la búsqueda tanto de los esquemas como de los principios de la razón crítica o de la razón poética...

En las palabras anteriores he procurado mantener una terminología lo más kantiana posible pero, a la vez, lo más próxima a la terminología de un crítico de la razón poética, Gianvincenzo Gravina. En su *De la razón poética*, de 1708, Gravina va a establecer, con plena nitidez, los tres niveles, y va a la búsqueda de los principios que constituyen las condiciones de validez de las reglas que puedan producir la obra, en su caso, poética, literaria. Niveles en los que, además, establece la solución de que en lo singular se muestre lo universal, singular como arquetipo, como producto de la universalidad contenida en los métodos condicionados por los principios constitutivos de la razón...

Y con ello indico, simultáneo, que la aportación kantiana, en lo que calificar su terreno propio, el epistemológico, se inscribe en un ámbito mucho más amplio, tanto en la problemática como en la solución: búsqueda de la razón crítica o poética, dato de principios constitutivos y regulativos; paso al nivel de esquema, reglas o preceptos y, finalmente, establecimiento de la obra particular. Todo regido, por supuesto, por un enfoque constructivo propio de la razón: el matemático construye sus conceptos, sus demostraciones; el autor construye la obra, no deriva o copia. Acto constructivo, por supuesto, a través de la experiencia, nunca contra ella...

1.2. LA CLAVE EPISTEMOLÓGICA

NOCIONES BÁSICAS

Kant parte de un hecho: existen disciplinas cognoscitivas que han seguido el seguro camino de la ciencia —la Matemática, las ciencias naturales—, mientras que en filosofía se tiene una permanente *diafonía doxón*. Y ese seguro camino de la ciencia se ha basado en el método que dichas disciplinas han seguido: abordar la naturaleza llevando en una mano los principios según los cuales sólo pueden considerarse como leyes los fenómenos concordantes mientras que en la otra mano debe realizar el experimento que se haya proyectado de acuerdo con tales principios. De aquí su afirmación:

> la razón sólo reconoce lo que ella misma produce según su bosquejo [B XIII].

Es enfoque a resaltar porque, desde el mismo, Kant niega que el racionalismo y el empirismo sean concepciones adecuadas. Ni la razón sola permite la obtención de conocimientos, ni la *empiria* pura; ni la mente es una tabla rasa que recibe, pasiva, las sensaciones, ni tampoco puede dar conocimiento de la naturaleza sin dichas sensaciones. Con una precisión: no basta la mera observación desnuda, pasiva, o la recopilación de datos sin una organización previa: el experimento es un acto dirigido a responder y verificar una pregunta, que hace la razón, previa; es, siempre, una experiencia dirigida por la razón. Y ello porque, y cito el *dictum* clásico kantiano:

> aunque todo nuestro conocimiento empiece *con* la experiencia, no por eso procede todo él *de* la experiencia [B 1].

Si bien el conocimiento puede ser tanto sensitivo como conceptual, los dos requieren, para serlo, de la representación. Y esa representación, en lo epistemológico, puede ser de dos tipos, esencialmente distintos: intuición y concepto.

Ello exige, claramente, la admisión en el sujeto cognoscente de dos facultades: Sensibilidad y Entendimiento. Y el problema se centra en la caracterización de ambas facultades, analizar sus principios para su posible uso. La primera supone la capacidad que el psiquismo del sujeto cognoscente posee de recibir representaciones; la segunda, la capacidad de producir dicho sujeto representaciones por sí mismo. La sensibilidad aporta la intuición que sólo *puede ser sensible* (B 75) y por la cual se nos da un *objeto singular* (B 377).

La intuición sensible, a su vez, se escinde en dos: *empírica*, si contiene sensación, es decir, si modifica el estado del sujeto; *pura*, si no hay mezcla de tal sensación, quedando en el plano de percepción objetiva. La intuición sensible pura sólo contiene la forma con la que se intuye algo.

Por su parte, el concepto se refiere de modo mediato al objeto, a través de una característica común del mismo.

Si a través de ambas facultades el sujeto cognoscente posee la capacidad de ser afectado por los fenómenos y tener representaciones singulares, intuiciones sensibles, empíricas o puras, y la capacidad para formar conceptos, respectivamente, el conocimiento se obtiene de la síntesis conjunta de ambas facultades. Entendiendo por síntesis

> el acto de reunir diferentes representaciones y de entender su variedad en un único conocimiento [B 103].

Síntesis previa a cualquier análisis, conceptual, de las representaciones; análisis imposible si esas representaciones no están previamente dadas, porque ningún concepto puede surgir, en cuanto a su contenido, de modo analítico.

Hay que subrayar, por las consecuencias que tiene para la posición kantiana respecto al conocimiento, que aquí se trata de las condiciones objetivas del sujeto cognoscente —un sujeto trascendental— en cuanto tal, no de su constitución psicológica o antropológica —no del sujeto empírico—. Constitución que permite la realización del acto de síntesis y, con ella, obtener el conocimiento. Kant es radicalmente explícito:

> sin sensibilidad, ningún objeto nos sería dado y, sin entendimiento, ninguno sería pensado. Los pensamientos sin contenido son vacíos; las intuiciones sin conceptos son ciegas... Ni el entendimiento puede intuir nada, ni los sentidos pueden pensar nada. El conocimiento únicamente puede surgir de la unión de ambos [B 76].

Bien entendido que se pueden tener sensaciones o imaginaciones; siendo la imaginación la facultad de representar un objeto en la intuición incluso cuando éste no se halla presente y que, como tal facultad, determina *a priori* la sensibilidad y suministra la intuición a los conceptos del entendimiento por lo que permite una acción de éste a objetos de una intuición posible (B 151-2). Y de modo análogo, el entendimiento puede producir nociones con las que elaborar ideas que hasta pueden rebasar la posibilidad de la experiencia... En ambos casos se tendrán sensaciones e imaginaciones, se tendrán pensamientos; no conocimiento. Éste sólo viene dado por el acto sintético de ambas facultades.

Aún más, tal síntesis también se requiere para que las mismas representaciones tengan un contenido o significado objetivo. Es lo que establecerá Kant al afirmar:

> El uso trascendental de un concepto en algún principio consiste en referirlo sólo a cosas en general y en sí mismas (objetos que no nos son dados en la intuición y que, consiguientemente, no son sensibles —a mano en ejemplar de Kant—) mientras que el uso empírico de ese mismo concepto consiste en referirlo sólo a fenómenos, es decir, a objetos de una *experiencia* posible. La imposibilidad de otro uso que este último se ve clara a partir de lo que sigue. Lo primero que se exige de todo concepto es la forma lógica del concepto (pensar) en general. En segundo lugar, se le exige la posibilidad de darle un objeto al que se refiera. Sin tal objeto no tiene sentido alguno y carece por completo de contenido, por más que siga poseyendo la función lógica capaz de construir un concepto a partir de datos eventuales. Ahora bien, no podemos suministrar un objeto al concepto sino mediante la intuición [B 298].

Es la intuición, y sólo la intuición, la que posibilita dar un significado objetivo, un contenido, al concepto. La facultad de la sensibilidad contribuye a nuestra experiencia al establecer el objeto ante el aparato sensorial; en ese establecimiento, hay que distinguir la materia de la forma de lo aparecido. La intuición pura, forma pura de la sensibilidad, es lo que permanecería en la representación de un objeto al apartar de la misma lo que el entendimiento produce o piensa de ese objeto y, a la vez, lo que pertenece, en tal representación, a la sensación. Y ese resto, que sigue siendo intuición sensible, aunque prescinda ahora del objeto real de los sentidos o la sensación, es lo que Kant califica como forma de la sensibilidad.

Un ejemplo kantiano quizá aclare su pensamiento: se da ante el sujeto cognoscente un cuerpo. El entendimiento piensa de él, como conceptos, los de sustancia, divisibilidad, fuerza...; la sensibilidad capta como notas que afectan al sujeto las de impenetrabilidad, dureza, color... Si se eliminan esas notas, lo único que permanece es la extensión y la figura. Y serán estas notas de la intuición empírica las constituyentes de la intuición pura (B 34).

Se observa que estas notas no son constitutivas del objeto, sino que lo son del sujeto cognoscente, y ello porque sin las mismas ningún objeto podría darse a la sensibilidad. Son notas *a priori*, necesarias para que este darse pueda ser alcanzado, notas que no permiten, evidentemente, dar contenido. Insisto: como forma de la sensibilidad *a priori* es una nota constitutiva del sujeto, no de los objetos a ser conocidos. De aquí la afirmación kantiana de que toda representación se capta según esa forma pura.

Se muestra la existencia en Kant de dos planos distintos en cuanto a la constitución del conocimiento. Por un lado, un enfoque lógico por el cual el sujeto se estructura en sensibilidad y entendimiento; por otro, un enfoque de carácter metafísico por el que se presentan receptividad y espontaneidad. Es en la receptividad, subjetiva, en la que se muestran los fenómenos, mientras que el entendimiento carece de tal nota de subjetividad en cuanto que espontaneidad.

Precisamente por la receptividad, subjetiva, cabe afirmar que no hay un más allá del fenómeno, que no hay conocimiento del objeto en sí porque no hay más allá de la representación.

Lo representado en la representación es el fenómeno que es interno a la representación, no copia de algo exterior a ella. De aquí que el objeto de la intuición sea fenómeno, como objeto de los sentidos que, como tales, son subjetivos. Consecuentemente, la realidad no va a ser otra cosa que la representación de un sujeto pensante.

En la *Estética* indicará que esa receptividad, propia de la sensibilidad, aparece estructurada. Estructura de la receptividad mediante dos formas puras de la sensibilidad, dos formas como principios del conocimiento *a priori*. Son espacio y tiempo. Son formas que no fundamentan o garantizan la posibilidad del conocimiento fenoménico: sólo implican la subjetividad en cuanto receptividad, en general, de los fenómenos. En otras palabras, las condiciones de posibilidad no son causas, sino un mero cuadro formal en el que se da el conocimiento.

Espacio, tiempo son los campos que Kant asignará como propios a la Matemática, evidentemente en su enlace o síntesis con el entendimiento para que pueda tenerse conocimiento. Enlace por el cual la Matemática va a reducir todos sus conceptos a intuiciones que puede ofrecer *a priori*.

Sin el objeto aportado a través de la sensibilidad no hay conocimiento objetivo, aunque puedan existir ideas, con sus representaciones conceptuales correspondientes. Sólo la unión de las formas o cuadros conceptuales, de los conceptos puros del entendimiento o formas *a priori* de lo representativo —categorías—, con las formas de la sensibilidad que definen la totalidad de lo que puede aparecer al sujeto, sólo la unión de lo experiencial subjetivo y la espontaneidad del entendimiento puede producir conocimiento.

Esa estructuración de la receptividad, esas dos formas puras de la sensibilidad no son determinaciones dadas en sí, ni condiciones de los objetos como cosas en sí. Son las formas sensibles de la intuición del sujeto. Todas las maneras directas de los fenómenos y las relaciones de los mismos en el espacio y el tiempo desaparecerían si se hiciera abstracción del sujeto; más aún, si se prescindiera de la naturaleza subjetiva de los sentidos en general. Incluso el espacio y el tiempo desaparecerían, ya que no pueden existir como objetos en sí, porque son fenómenos y su existencia se encuentra, únicamente, en el sujeto.

De esta manera no cabe distinguir la representación de un fenómeno y el objeto en sí. Porque el espacio y el tiempo son, como formas de la sensibilidad, subjetivos. Ahora bien, el fenómeno experienciado trasciende la subjetividad individual porque el espacio y el tiempo poseen valor universal y, por ello, un valor objetivo respecto a todo lo que puede ser presentado al sujeto en la experiencia.

Y aquí se tiene una inflexión en cuanto al significado de los términos objetivo y subjetivo, inflexión a como venían manejándose desde la escolástica. Espacio y tiempo subjetivos por ser condiciones con que se estructura la receptividad y, a la vez, objetivos porque todo fenómeno se presenta bajo las formas de tal receptividad.

Esta doble posición, lógica y metafísica, conduce a Kant a la afirmación de contraponer su doctrina al dogmatismo; una nueva doctrina que calificará como *Idealismo trascendental*. Doctrina que hace del espacio y el tiempo formas sensibles de nuestra intuición. Es lo que le diferenciará de Leibniz, por ejemplo, para quien el espacio y el tiempo, aunque no sean propiedades del ser en sí, expresan relaciones fundadas en el ser. Un ser cuya naturaleza, ahora, y desde este idealismo trascendental, va a ser incognoscible. El conocimiento quedará limitado, por ello, al mundo de los fenómenos. Es limitación que condiciona, claramente, el paso de la ontología a la epistemología.

PENSAR ≠ CONOCER

Dado un cuadro como el anterior, con su doble juego metafísico y lógico, considero fundamental insistir en la escisión kantiana entre pensar y conocer apoyada, ahora, en la idea de pensamiento posible que puede alcanzar, o no, el nivel de conocimiento objetivo. Es lo que se señala en el último texto citado y que puede reiterarse en la existencia, en Kant, de dos tipos de posibilidades: lógica y real, teniendo en cuenta que adopta como primer postulado del pensar empírico el siguiente:

> 1. Lo que concuerda con las condiciones formales de la experiencia (desde el punto de vista de la intuición y de los conceptos) es *posible* [B 265],

mientras que lo que se halla en interdependencia con las condiciones materiales de la experiencia es *real*.

El entendimiento y la razón pueden producir nociones y con ellas ideas, con sólo posibilidad lógica ateniéndose a las condiciones formales de los conceptos. Condiciones formales que se centrarán en la consistencia, en la no-contradicción de los mismos. Si este pensamiento con posibilidad lógica quiere alcanzar el nivel de conocimiento, de validez objetiva, habrá que dotar a sus conceptos de tal validez a través de una representación intuitiva.

Kant aclarará el postulado de posibilidad con un ejemplo. Ejemplo que marcará, aún más nítidamente, la diferencia entre el pensar y el conocer:

> El que un concepto semejante se halle libre de toda contradicción, es una condición lógica necesaria. Pero ello no basta, ni

> de lejos, en relación con la realidad objetiva del concepto, es decir, con la posibilidad de un objeto como el pensado a través del concepto. Así, el concepto de una figura encerrada entre dos rectas no implica contradicción alguna, ya que los conceptos de dos rectas y su cruce no implican la negación de ninguna figura. La imposibilidad no descansa en el concepto como tal, sino en la construcción de tal figura en el espacio, es decir, en las condiciones del espacio y de la determinación de éste [B 268].

En este ejemplo —uno de los postulados, no se sabe si apócrifo, de los *Elementos* euclídeos—, son las condiciones del espacio y la determinación del mismo las que impiden que se obtenga una significación objetiva, un conocimiento asociado a un concepto que cumple la condición formal del entendimiento puro: no ser contradictorio.

Esa determinación, en el caso kantiano, es la que lleva a la aplicación de los principios a las sensaciones y viene dado por las formas *a priori* constitutivas del sujeto cognoscente. Son las condiciones constitutivas del sujeto las que establecen la posibilidad o imposibilidad real del conocimiento porque permiten o impiden realizar la síntesis entre la figura —objeto material dado a la sensibilidad— y lo pensado. En palabras kantianas,

> El pensar es el acto de referir un objeto a una intuición dada. Si esa clase de intuición no es dada, entonces el objeto es meramente trascendental, y el concepto del entendimiento no tiene otro uso que el trascendental, a saber, como unidad del pensamiento de una variedad en general. Consiguientemente ningún objeto es determinado mediante una categoría pura en la que se prescinda de toda condición de la intuición pura, que es la única posible para nosotros [B 304].

Podría plantearse, aquí, una sugerencia, a pesar de palabras como las antes citadas: el sujeto cognoscente produce conceptos, pensamientos que, siguiendo las condiciones formales de todo pensar, son consistentes. Puede mantener tal pensamiento como posibilidad lógica, como sistema formal pensado que, todavía, queda en ese plano del pensar por el que aún no es conocimiento. Sólo después, y gracias a la creación de la representación concordante en la intuición sensible, pura o empírica, de un fenómeno o esquema, ese pensar, ese sistema formal, pasa a ser estimado como conocimiento con validez objetiva.

Si acudimos a la historia, es lo que ha ocurrido, y ocurre, en las ciencias, en la matemática. Han ido surgiendo conceptos, teorías que carecían de representación figural asociada, a veces como cálculos, a veces como sistemas simplemente consistentes.

Desde esta sugerencia, y en particular, cabe admitir la existencia de sistemas formales como las Geometrías no-euclídeas. Construidas como pensamiento puro, como sistemas formales, faltaría aportarles, únicamente, y en un momento posterior, y atendiendo siempre a las condiciones formales de la intuición pura, un objeto intuible o una imagen representables en dicha intuición para que los sistemas formales —posibles lógicamente— fueran considerados como conocimiento objetivo.

Y esto es lo que los matemáticos han logrado gracias a la construcción de modelos geométricos a lo largo del siglo XIX. Precisamente en uno de ellos se verifica, se tiene la representación del ejemplo mencionado como imposible por Kant.

El ejemplo de espacio encerrado entre dos rectas, concepto consistente o no-contradictorio, viene representado hoy día en la Geometría elíptica doble, donde, en lugar de manejar el plano o superficie de curvatura constante e igual a cero, se maneja la superficie esférica o superficie de curvatura constante negativa. Es claro que la representación de «recta» en esta última sigue concordando con el concepto que de la misma se tenía en la euclídea, la de venir dada como «la más corta» entre dos puntos, como la geodésica de la superficie considerada.

Este modelo de Geometría doble elíptica constituiría, así, una representación figural que dotaría de significación al sistema formal establecido y ese sistema pasaría a ser, kantianamente, sistema cognoscitivo.

Desde esta sugerencia, la posición kantiana sería compatible con la creación de las Geometrías no-euclídeas, de cualquier sistema formal, por el mero hecho de no ser contradictorio, aunque el mismo careciera de imagen o representación intuitiva asociada.

En concreto, y en cuanto a la Geometría como estudio de la forma pura del espacio, podría argumentarse que Kant no dota de estructura a dicho espacio, por lo cual el espacio, esa forma pura, ni es métrico euclídeo ni métrico no-euclídeo, ni siquiera métrico o no métrico. El espacio, en Kant, tendría una significación diferente de la que hoy se le da en la matemática: no es un concepto, sino una forma de la intuición y, por no ser un elemento conceptual, no puede atribuírsele el calificativo de euclídeo o no. Consecuente, se tiene la posibilidad de construcciones matemáticas de cualquier tipo de estructura, posibilidad centrada, ahora lo diría Kant, no en el pensamiento no-contradictorio, sino en la sensibilidad, carente de estructura, pero que es la que establece, precisamente, las condiciones de representación de los fenómenos en la intuición pura.

Si se admite que esas condiciones pueden variar, quedar dotadas de distintas estructuras geométricas en cada ocasión, entonces cabe hacer representaciones de los distintos sistemas formales pensados. En un caso, se obtiene una representación en métrica euclídea; en otro, en una geometría elíptica doble..., sabiendo, que esas representaciones son incompatibles entre sí. De esta manera, las Geometrías no-euclídeas no irían contra la concepción kantiana, frente a lo que los matemáticos, desde Gauss, vienen sosteniendo.

Por lo dicho hasta ahora, parecería una sugerencia que no negaría Kant: el pensar se convertiría, en algún momento, en conocer. Sin embargo, es una sugerencia inaceptable para un kantiano. En este contexto, que esa posibilidad lógica se pueda convertir en real en un futuro, significa no ya que el conocimiento es algo transformable, cambiable, sino que lo cambiable es la propia facultad de la sensibilidad, las condiciones del espacio y su determinación.

Es una sugerencia que supone, por un lado, la admisión de un proceso histórico, en el que se acumula el conocer, progresa, como ocurre en la Matemática. Pero que supone, a la vez, que en ese proceso también cambia el sujeto cognoscente, sus condiciones de sensibilidad. Y esto último es lo que negaría, radicalmente, Kant. Las facultades del sujeto, entendimiento y sensibilidad, parecen inmodificables, eternas. Y, para Kant, son esas condiciones —y no que lo que pueda ser representado dependa tanto del sujeto cognoscente y del espacio como sistema conceptual— las que imposibilitan el paso del pensar al conocer. La ahistoricidad kantiana es, en este punto, absoluta; se observará la misma, igualmente, en cuanto a la Lógica general pura. Y que el sujeto cognoscente pueda venir dotado de una forma de la sensibilidad amorfa, condicionada, entonces, por los distintos fenómenos, es opuesto a la concepción kantiana: no hay objetos en sí que afecten a la sensibilidad, sino que hay un acuerdo entre la forma de la aprehensión y la manera en la que esos fenómenos se dan ante dicha sensibilidad.

Por otro lado, es una sugerencia encontrada con la concepción epistemológica kantiana de ser el conocimiento un acto sintético en el que se produce, como tal acto, dicho conocimiento. Un acto que requiere combinar, en síntesis única, las dos facultades, el entendimiento y la sensibilidad. La sugerencia suprime, precisamente, dicha síntesis, convirtiendo el conocimiento en un proceso en dos fases, al menos: una discursiva y puramente conceptual; la otra, sensible, representacional. No sería, en el fondo, más que una vuelta a posiciones precríticas, como la dogmática, algo que deseaba superar, precisamente, Kant.

Para Kant, los sistemas formales pensados, no construidos, constituirían meras producciones conceptuales, vacías, carentes de valoración como conocimiento; meras ilusiones de saber. Y ello porque les faltaría la componente existencial material de la que ese conocimiento tiene que venir dotado, pero no posteriormente, sino desde su propia constitución. Y, por lo dicho, esta componente existencial no puede ser aportada desde la sensibilidad ya que ésta, en el pensamiento puro, nada puede hacer.

He insistido en este punto —al cual volveré, reiteradamente, y con la misma sugerencia, para obtener mayores precisiones— porque considero clave la diferencia entre posibilidad lógica y posibilidad real o lógico-trascendental. Clave para evitar malentendidos y, a la vez, para insistir en el enfoque epistemológico kantiano, donde el conocer es un acto de unión, de síntesis de las dos facultades. No es primero pensar y buscar después la representación, o a la inversa. El conocimiento es el acto sintético de producir, simultáneamente, representación y concepto. Como tal acto, exige del proceso constructivo y cierra el paso, desde el contexto en el que estamos situados, a la sugerencia antes hecha.

En cualquier caso reitero que la síntesis que posibilita el conocimiento, el enlace entre entendimiento y sensibilidad, es, siempre, sensible, en cualquiera de sus dos acepciones: empírica, pura. En nota a pie de página, en la segunda edición, Kant reitera:

> si prescindimos de la intuición sensible (la única que tenemos), no podemos justificar ninguno de estos conceptos ni, consiguientemente, mostrar su posibilidad real. No nos queda, en este supuesto, más que la posibilidad lógica, es decir, la posibilidad del concepto (pensamiento). Pero la cuestión no es ésta. La cuestión es si el concepto se refiere a un objeto y si, consiguientemente, significa algo [B 302].

Y subrayo: es la intuición empírica más clave aún que la pura para el paso de la posibilidad lógica a la posibilidad real. Una intuición empírica subtendida por la acción del sujeto cognoscente, acción que es la que, evidentemente, produce la síntesis. Así, y por mera insistencia, menciono las palabras kantianas:

> Aunque sea posible *a priori* una intuición pura con anterioridad al objeto, esa misma intuición sólo puede recibir su objeto, es decir, su validez objetiva, a través de la intuición empírica, de la que constituye una mera forma [B 298].

Con lo cual parecerían invertirse los papeles: gracias a que existe la posibilidad de una intuición empírica, existe la posibilidad empírica pura y, con ella, la posibilidad del conocimiento objetivo. Es punto en el que Kant insiste en cuanto a la Matemática. Intuiciones puras son, por ejemplo, el espacio tiene tres dimensiones, entre dos puntos sólo pasa una recta... Estas intuiciones puras se producen, según Kant, en el psiquismo, pero nada significan si no se puede mostrar su significación en los fenómenos, en los objetos sensibles, si no se puede dar una figura material que lo represente.

El matemático es quien, diferenciándose del filósofo, del metafísico, hace cumplir esta condición de presentar a la intuición sensible el objeto correspondiente a los conceptos puros, y de aquí que convierta a la Matemática en auténtica ciencia cognoscitiva. En Geometría lo hace mediante la construcción de la figura, que es el fenómeno presente, empírico; en la Aritmética lo hace apoyándose en el concepto de magnitud y su sentido en el número, a través del ábaco, las rayas materiales que se presentan a la vista...

Para finalizar este breve apunte acerca de la epistemología kantiana, querría reiterar un elemento clave de su enfoque: el objeto en sí, su naturaleza, es incognoscible. Sólo se conoce el fenómeno, nunca la cosa en sí, y ello porque las intuiciones no son más que una representación fenoménica:

> permanece para nosotros absolutamente desconocido qué sean los objetos en sí, independientemente de toda receptividad [B 59].

Y volverá a insistir:

> los fenómenos son simples representaciones de cosas que nos son desconocidas, por lo que respecta a lo que ellas sean en sí [B 165].

Habría, en Kant una radical inconsecuencia: la afirmación

> las cosas que intuimos no son en sí mismas tal como las intuimos, ni sus relaciones tienen en sí mismas el carácter con que se manifiestan [B 59]

supone, claramente, que sí sabemos algo de la cosa en sí, al menos para que tenga sentido la afirmación de que no son como las intuimos.

Ironías aparte, el conocer viene dado por una interrelación entre la naturaleza y el sujeto cognoscente de tal manera que

> las leyes no se hallan en los fenómenos, sino que existen sólo en relación con el sujeto en el que los fenómenos inhieren (en la medida en que tal sujeto posea entendimiento), al igual que los fenómenos no tienen existencia en sí, sino sólo en relación con el mismo ser (en la medida en que posea sentidos) [B 164].

La interrelación viene condicionada por la constitución del sujeto. Otros sujetos, de constitución distinta (B 43, 72, 139, 344...), podrán poseer otro tipo de conocimiento en su interrelación con la naturaleza. Kant sólo se ocupa del modo de percibir del sujeto humano (B 42). En cualquier caso,

> Aun en el caso de que sean posibles otras formas de intuición que el espacio y el tiempo, al igual que otras formas de entendimiento que las discursivas del pensar o del conocimiento conceptual, nos es totalmente imposible pensarlas o hacerlas concebibles. Pero incluso si pudiéramos hacerlo, tales formas no pertenecerían a la experiencia, que es el único conocimiento en el que se nos dan objetos [B 283].

Claramente son las categorías del entendimiento, las formas de la sensibilidad los elementos componentes básicos para el elemento cognoscitivo humano. En concreto, por el espacio y el tiempo como formas puras de la sensibilidad, por la sensación como materia para dicha sensibilidad. Formas puras constitutivas de la facultad de la sensibilidad del sujeto cognoscente humano y, por ello, necesarias dado que todo fenómeno lo es por las formas de espacio y tiempo, inherentes al sujeto.

Kant marca, así, un límite radical a las pretensiones de cualquier saber objetivo, independiente del sujeto.

Una barrera al *non plus ultra* con el que los físicos, los filósofos de la naturaleza pretendían conocer y, con ello, dominar y transformar a la naturaleza. Hay, para Kant, un *Ignorabimus* esencial.

Volviendo a la sugerencia antes realizada de la posible identificación de pensar y conocer, de pasar de lo posible lógico-formal a lo posible real, y desde la marcación de estos límites, puede afirmarse la imposibilidad de sistemas como las Geometrías no-euclídeas, pero ahora por la negación kantiana a aceptar que sea el espacio, como objeto, quien posea una u otra estructura geométrica y, desde la misma, sea la naturaleza quien la imponga al sujeto en cuanto sujeto cognoscente. Del espacio en sí nada podemos conocer...

De esta manera, la pregunta por si sería factible la elaboración de sistemas formales consistentes —Geometrías no-euclídeas en particular— desde el campo de la Lógica trascendental tendría una respuesta negativa, al igual que la dada desde el ámbito de la Lógica formal. Esa respuesta depende de los modos del conocer *a priori*.

Es desde aquí desde donde la negación kantiana a la sugerencia apuntada cobra todo su sentido: los sistemas formales ni siquiera existirían como conocimiento con posibilidad formal porque no puede darse para ellos objeto alguno en la intuición. No se pueden construir los objetos correspondientes y dotar de contenido existencial a los objetos formales, matemáticos, de modo simultáneo a su concepción formal.

Y no se pueden construir porque Kant establece los modos de conocer del sujeto de manera que jamás pueda presentar ante la intuición una figura encerrada por dos líneas rectas, por ejemplo, como representación propia de un espacio métrico no-euclídeo. Y si se tomara el modelo de una pizarra esférica y, en ella, se trazaran dos geodésicas, que como antes he indicado hacen los matemáticos con el modelo para la Geometría elíptica doble, lo que Kant argumentaría es que lo que se tiene es una superficie esférica con arcos de meridiano *en* un espacio métrico euclídeo y no un auténtico plano rienmaniano.

Aún más, cualquier modelo que se elabore de las Geometrías no-euclídeas será un modelo *en* un espacio euclídeo porque es de éste del que no se puede salir el sujeto cognoscente. Cabría decir que, precisamente por ello, la representación de los sistemas geométricos no-euclídeos son modelos y no auténticas representaciones, imágenes en sí, de dichos sistemas. Y lo mismo si se habla de un espacio n-dimensional, irrepresentable ante la intuición: no hay objeto figural correspondiente del mismo y, por ello, no hay el aporte existencial imprescindible.

Desde los modos del conocer *a priori* las elaboraciones formales carecen de sentido porque, para ser conocimiento, habría que aceptar que las condiciones de la construcción de dichos conocimientos no dependen tan sólo del sujeto cognoscente, sino del espacio como elemento objetivo, con su estructura propia —métrica euclídea, por ejemplo—. De esta manera se están atribuyendo propiedades estructurales al espacio como objeto en sí, no como forma de la intuición. Con lo cual se tendría un problema añadido: si el conocimiento es síntesis, cómo poder realizar la misma entre el sujeto cognoscente y un objeto en sí, con sus propiedades propias. Precisamente, un problema que Kant pretende superar al ser consciente de que no lo resolvieron satisfactoriamente ni los dogmáticos ni los escépticos.

Debo señalar que Kant conoce perfectamente la representación de un triángulo sobre la superficie esférica porque lo menciona en la Sección 13 de *Prolegómenos*. Es evidente que Kant la considera como representación propia en un espacio métrico euclídeo y no cabe hacer lectura de que ese triángulo curvilíneo, sobre tal superficie esférica, suponga el manejo de Geometría no-euclídea alguna, como parece sugerir Risjörd (1990, 135). La Geometría esférica es clave en Astronomía de posición, por ejemplo, pero no por ello se hace Geometría no-euclídea sobre la misma cuando lo que se pretende es calcular la posición de un planeta del sistema solar...

Desde los modos del conocer *a priori* kantiano no puede admitirse la idea de un espacio conceptual más una estructura, más una geometría que, constituida por unos axiomas, den forma a ese espacio. Distintos conjuntos de axiomas provocarían estructuraciones diversas. No cabe admitir, desde lo kantiano, lo que los matemáticos admiten: que las experiencias pueden ser conceptualizadas por sistemas geométricos muy diferentes. Obligaría a Kant a admitir que las formas de la sensiblidad son o cambiantes o amorfas para poder hacer representaciones intuibles para los sistemas geométricos, lo que ya he indicado que haría irreconocible su concepción.

Consecuentemente, y a modo de primer resumen: por admitir que las formas de la sensibilidad, especialmente la del espacio, venga determinada por una forma especial, que se plasma, en Kant, en que los fenómenos se presenten bajo la métrica euclídea; por negar que la naturaleza pueda tener unas propiedades objetivas y se sea incapaz de asegurar que el espacio, en sí, posea una u otra estructura, independiente del sujeto cognoscente, Kant se ve imposibilitado para aceptar la existencia de Geometrías alternativas como componentes cognoscitivas. Se ve imposibilitado para dotar de aporte existencial a los posibles conceptos del pensamiento puro. Con ello vuelve a remarcar la diferencia entre pensar y conocer, entre posibilidad lógico-formal y posibilidad real (lógico-trascendental).

Podría argumentarse que, pese a esa imposibilidad de las construcciones geométricas no-euclídeas, en la diferencia entre pensar y conocer parece anticiparse Kant a la problemática del compromiso ontológico que condicionará la crisis de los fundamentos en el hacer matemático tras el manejo explícito del axioma de elección. Para un kantiano, para quienes se negaron a admitir un axioma como el de elección, el conocer no es de lo existencial puro o formal, sino que ese conocer lo ha de ser de manera que suponga, para el concepto, la existencia material de lo definido. En el ejemplo mencionado, o se da una función de elección concreta, o carece de sentido el manejo del Axioma de elección.

Y toda la problemática matemática que se origina tras la formulación explícita de ese Axioma de elección se centra en la posibilidad de dotar de existencia constructiva a esas elaboraciones conceptuales o aceptar el manejo de sistemas matemáticos sin poder dotarles de elemento existencial alguno. Fundamentalmente cuando se maneja no el plano figural, concreto, como ocurre con Kant, sino el global o conjuntista. Teniendo presente, con Kant, que el pensar formal es siempre factible; pero se puede pensar en sistemas formales, en fantasmas o en dioses. Lo que no implica que ellos existan, con el mismo tipo de existencia.

El pensamiento debe estar sometido, de modo exclusivo, a las condiciones formales de la razón pura, la consistencia o no-contradicción. Condición puramente negativa, lo que no impide pensar conceptos puros consistentes —espacio encerrado entre dos líneas rectas en el plano métrico euclídeo— ni conceptos empíricos con imposibilidad real —reloj marino, ejemplificará Kant—. En ambos casos, los pensamientos pueden limitarse a ser lo calificable de «monstruos de la razón», imposibles de realidad alguna. Y no por la realidad en sí, incognoscible para un kantiano, sino por las condiciones subjetivas del sujeto cognoscente, incapaz de sintetizar la sensibilidad con el entendimiento en casos como los anteriores.

Esa incapacidad y el deseo, claramente valorativo, en Kant de impedir la proliferación de monstruos y que se les pueda considerar, incluso, como si fueran conocimiento, conducen a mantener que sólo el proceso constructivo, sintético, que conduce o hace llegar al concepto, es conocimiento. Proceso constructivo no exclusivamente conceptual: se muestra el fenómeno o se construye, dando objetividad y significado al concepto. De otra manera, se quedaría en mero pensar vacío, ilusorio.

Aquí se tiene, evidentemente, una de las fuentes kantianas del constructivismo matemático contemporáneo, aunque el mismo, en alguna de sus versiones, rechace la concepción del espacio como la forma de la facultad de la sensibilidad del sujeto cognoscente en el sentido querido por Kant. Igualmente se encuentra una de las fuentes del antiformalismo kantiano respecto a la Matemática.

Pero esto último nos conduce a considerar la concepción que Kant posee de la Lógica.

1.3. EL CONCEPTO DE LÓGICA

LÓGICA GENERAL PURA Y LÓGICAS

Hay, en Kant, no sólo la admisión de que el sujeto cognoscente posee entendimiento y sensibilidad, sino también la de que todo en la naturaleza se produce según reglas. Todo tiene un orden y una forma, sean geométricos —espacio y tiempo—, sean lógicos —categorías—. Ironías aparte, como antes, ello implica que el ejercicio de ambas facultades del sujeto se efectúa, obligatoriamente podría decirse, según reglas, según leyes, que no pueden venir dadas en lo empírico sino en lo *a priori*, que es lo que condiciona que las mismas sean necesarias.

Una legalidad conceptual —trascendental— que es la impuesta por la constitución cognitiva en la experiencia o, lo que es equivalente, causalidad como concepto puro del entendimiento. Junto a la cual hay que admitir una legalidad teorética o legalidad en la naturaleza, presupuesta por la posibilidad de descubrir leyes empíricas y que supone un orden necesario en la naturaleza, aunque no tenga nada que ver con las cosas mismas, con los objetos en sí.

Uno de los objetivos del filósofo es averiguar qué reglas son éstas. Bien entendido que se trata de pensarlas con independencia de cualquier tipo de aplicación de las mismas. Hay que pensarlas con independencia al objeto; hay que pensarlas *a priori* por lo que mostrarán su carácter de necesidad. En otras palabras, las reglas se descubren y se obtienen con independencia de la experiencia, son *a priori* y sólo conciernen a la forma pura.

La ciencia que estudia las reglas de la sensibilidad es la Estética; su objeto, las formas puras del espacio y el tiempo. La ciencia que estudia las reglas del entendimiento puro es, por su lado, la Lógica general pura, campo propio del que somete a estudio aquellas reglas a las que el mismo entendimiento puro está sometido.

Desde esta perspectiva, y tras señalar que la Lógica general pura sólo trata de las leyes necesarias del entendimiento y la razón en general, cabe observar que Kant se sitúa en una posición de cierre respecto a la Lógica. Quiero decir, para él, la Lógica constituye una ciencia completa, que ha nacido, así, de la cabeza de Aristóteles. No hay, en la Lógica, proceso histórico alguno. Ni siquiera cabe hablar de progresos en la misma. Tal ha sido su perfección que no ha necesitado dar ningún paso atrás desde Aristóteles, y lo curioso es que

> tampoco ha sido capaz, hasta hoy, de avanzar un solo paso. Según todas las apariencias se halla, pues, definitivamente concluida [B VIII].

Si se han introducido, por parte de algunos autores, elementos psicológicos, metafísicos, antropológicos..., esa introducción lo que ha hecho es desvirtuar la naturaleza formal de la Lógica, desfigurarla.

La facultad del entendimiento, así, viene regulada desde el origen de la especie humana, y sus leyes han podido codificarse de una vez y para siempre. Un cuadro en el que el desvelamiento histórico no existe.

Para Kant, la Lógica general pura

> no hace más que exponer detalladamente y demostrar con rigor las reglas formales de todo pensamiento [B VIII-IX].

En la Lógica

> hacemos abstracción de todas las condiciones empíricas bajo las cuales actúa nuestro entendimiento [B 77].

Más aún, la Lógica general pura

> hace abstracción de todo contenido del conocimiento del entendimiento [B 79].

Por ello sólo tiene que ver con la simple forma del pensar; consecuente, con los principios *a priori* del mismo. Como definición-resumen cabe citar la dada en la especie de manual-resumen que lleva por título *Lógica* y que constituye una compilación de los escritos kantianos realizada por Jäsche en 1800. En esta obra se lee:

> La lógica es una ciencia racional no sólo según la forma, sino también según la materia; una ciencia *a priori* de las leyes necesarias del pensamiento, no con relación a objetos determinados, sino con relación a todos los objetos en general; es, pues, una ciencia del recto uso del entendimiento y de la razón en general: no de manera subjetiva, es decir, no según principios empíricos, psicológicos (cómo piensa el entendimiento), sino de manera objetiva, es decir, según principios *a priori* (cómo el entendimiento debe pensar) [*Lógica*, ed. Ac., pp. 12-17].

Se observa la consideración kantiana de la Lógica general pura: cómo el entendimiento *debe* pensar. Nuevamente el enfoque modal, ahora normativo, que subtiende toda la creación kantiana. Pero ello significa que, en cuanto a su uso, la Lógica general no es más que un canon del entendimiento y de la razón, naturalmente en relación con el aspecto formal de su uso.

Al estimarse canon, la Lógica se muestra como propedéutica pero, aún más básico, con un aspecto instrumental en el sentido de que su uso consiste en vigilar el recto uso del entendimiento; vigilar que se den en él las condiciones formales de su empleo. Desde este punto de vista, la Lógica general pura carece de papel positivo alguno en el pensamiento kantiano: es meramente negativa. Pureza formal de la Lógica, aun a costa de su negatividad.

Algo que se va a reflejar, igualmente, en cuanto al problema de la verdad: si de un modo clásico la verdad se iba a enfocar como la adecuación entre la cosa en sí y la cosa pensada, al desaparecer la cosa en sí tal adecuación sólo puede venir establecida entre representación y representación, es decir, sólo puede venir establecida como comparación entre representaciones. Lo cual, evidentemente, desvirtúa el sentido originario del criterio veritativo. Sin embargo, cualquier tipo de saber muestra juicios verdaderos, verdad como concordancia, calificable como verdad material, objetiva. Desde el terreno de la lógica este aspecto no puede tenerse en cuenta porque no hay materia cognoscitiva.

Por este motivo, en lugar de adecuación, Kant tiene que pasar a una concepción de la verdad como coherencia: acuerdo del pensamiento consigo mismo. Pero en doble vertiente: acuerdo de la representación con el fenómeno para el sujeto empírico, y que es lo que ahora habrá que calificar como verdad material, y acuerdo del pensamiento consigo mismo para el sujeto trascendental: verdad de la representación particular en tanto que es o no compatible, o no contradictoria, con otras representaciones.

Como la Lógica general pura no trata con dichas representaciones, resulta que, en ella, lo único que importa, en el acto judicativo lógico-formal, es la consistencia del juicio, que el mismo no sea contradictorio: si tal contradicción existe, la adecuación no es posible, pero desde lo formal puro. Y la contradicción aparece cuando se atenta a alguna regla o ley lógica. De aquí que pueda afirmarse que, si existe un criterio lógico-formal de verdad, éste viene tomado en el sentido del acuerdo del conocimiento con las reglas formales del entendimiento y la razón.

La verdad «formal», la que establece las garantías del criterio lógico veritativo, es, en realidad, una condición negativa de la verdad material, objetiva, e incluso, para manejarla, hay que hacerlo tras un previo y notable conocimiento de los objetos (B 77).

Es el papel que se asigna a la Lógica en cuanto al conocimiento: establecer las condiciones formales del juicio en su aspecto negativo, una vez que el juicio se haya formado.

De aquí el aspecto analítico que subtiende este enfoque de la Lógica: es el análisis el que permite diseccionar y regular los elementos que entran en el conocimiento *a* *priori*, a través de las categorías de conceptos, juicios, razonamientos, pero atendiendo únicamente a la forma de los mismos. La Lógica general pura no agrega conocimiento alguno al sujeto; en todo caso analiza, deriva: se mantiene en el ámbito del entendimiento puro, no en el de la sensibilidad.

Esta concepción constituye uno de los motivos por el cual Kant rechazará la visión dogmática de los racionalistas, de quienes veían un papel positivo en la Lógica. Generalizando, de aquellos que reducen la Matemática a la Lógica dado que la Matemática ha de proceder por síntesis, no por mero análisis. La Matemática produce conocimiento, no así la Lógica, canon negativo del conocimiento.

La reducción de la Matemática a la Lógica, desde esta perspectiva, exigiría para poder llevarse a cabo que la Matemática dejara de concebirse como disciplina cognoscitiva. De no ser conocimiento, de ser puramente conceptual, formal, es plausible esa reducción. Pero hay que observar que esta reducción comienza por eliminar uno de los rasgos esenciales de la Matemática, ser conocimiento. Y si hago hincapié, aquí, en este posible reduccionismo, es porque una posición en la que esa consideración de no dar conocimiento de la naturaleza atribuida a la Matemática hace que la misma pueda quedar reducida a mero sistema formal y, con ello, a la Lógica. Y es la posición mantenida desde Russell a los neopositivistas.

A veces, sin embargo, la Lógica general pura puede presentarse ligada al contenido de conocimientos. En este caso se dirige a las reglas de uso del entendimiento pero ahora bajo las condiciones empíricas subjetivas que lo favorecen o dificultan. Es lo que Kant calificará como Lógica general *aplicada*. General porque sigue sin atender a la diferencia de los objetos. Sin embargo, en este uso la Lógica deja de ser canon del entendimiento en general, pero no por ello se convierte en instrumento u organon para avanzar en el saber. El papel que ahora tiene la Lógica también se muestra negativo: tratará del origen del error, del estado de duda, del escrúpulo... con la intención de superarlos y ello de manera, por supuesto, empírica. De aquí que no pueda ser ciencia verdadera y demostrada sino que constituye más bien una purga o criba de la razón. El uso de esta lógica aplicada lo denomina Kant

> un catártico del entendimiento común [B 78].

Por otro lado Kant admite la existencia de lo que denomina lógicas peculiares del saber: las constituidas por aquellas reglas que garantizan el buen pensar en campos cognoscitivos propios. Desde este enfoque esas lógicas peculiares sí constituyen auténticos *organon* de cada una de las ciencias. Obligadas propedéuticas de cada saber particular, no pueden identificarse con la Lógica general pura porque esta última

> incluye las reglas absolutamente necesarias del pensar, aquellas sin las cuales no es posible uso alguno del entendimiento [B 76].

Dado el éxito de las lógicas peculiares, que pueden estimarse como métodos para avanzar en cada uno de los saberes a los que se aplican, podría intentarse el trasvase y considerar a la Lógica general pura como un *organon*, como un instrumento para hacer avanzar el saber, en este caso el saber del entendimiento puro. Es tentación que Kant repudiará al indicar que, cuando se le asigna dicho papel, lo único que se obtiene es un saber ilusorio, ficticio; es un papel en el que la Lógica se muestra como una Lógica de la apariencia dado que con ella no se obtiene saber, alejada como está de la sensibilidad, por lo que no puede producir síntesis alguna. Es un manejo indigno de la filosofía, convertida la Lógica general pura en mera dialéctica.

Una vez más Kant señalará que, aunque la mera forma del entendimiento esté de acuerdo con las leyes lógicas, no basta, no es suficiente para determinar la verdad material, objetiva, del conocimiento (B 85). Éste ha de obtenerse de modo independiente a la Lógica, y sólo después se podrá analizar la coherencia o no del mismo, analizar si sigue o no las leyes lógicas, formales.

Es punto en el cual Kant vuelve a mostrarse discrepante con lo que califica dogmatismo de la razón pura. Lo refleja más nítidamente en un texto de la *Lógica*, en el que escribe

> A diferencia de los métodos o lógicas peculiares, la Lógica general pura no es un arte universal de descubrimiento, como tampoco un *organon* de la verdad; no es un álgebra con ayuda de la cual podamos descubrir verdades ocultas [ed. Ac., p. 791]

Frente a la *mathesis universalis* cartesiana, al *ars inveniendi* leibniziano, Kant sostendrá que la Lógica pura no es metodología; es, simplemente, ciencia de las reglas del entendimiento puro, es mero canon negativo en cuanto a su uso.

Sin embargo, Kant va a dotar, desde esta crítica, de un nuevo papel a la Lógica: como no da contenido, sino únicamente información sobre las condiciones formales de su conformidad con el entendimiento, la Lógica permitirá desvelar la charlatanería subyacente a este empleo indigno. Desvelamiento de lo apariencial, por lo que, mediante su uso, la Lógica bien puede estimarse como Lógica *dialéctica*, en el sentido de constituir una crítica de esa apariencia (B 86).

La concepción kantiana de la Lógica general pura implica una visión puramente negativa de ella. Y, aunque la estime como ciencia racional, su enfoque negativo cabe extenderlo a la posibilidad de construir sistemas de leyes lógico-formales que, por supuesto, se encuentren de acuerdo con los principios formales que esas mismas leyes imponen. Y, aunque Kant indique que la Lógica ha seguido el seguro camino de la ciencia por cuanto es ciencia racional, en el fondo no lo es en cuanto elemento cognoscitivo, quedando en primer plano su aspecto crítico, que es el empleo básico que de ella hace Kant: canon, dialéctica y catártica.

A la Lógica formal, a la ciencia general pura de las reglas de la razón, se le niega la posibilidad de producir aunque sea de modo vacío, al no valorarla más que como canon —algo que, sin embargo, se asigna al entendimiento—, negativo. Producción que, como gran concesión, no sería más que mera ficción por la que ningún filósofo debería apostar.

LÓGICA TRASCENDENTAL

Se ha indicado que, para Kant, existen intuiciones tanto puras como empíricas. Y ello permite pensar que el propio pensamiento se escinda en pensamiento puro y pensamiento empírico de objetos. Habría la posibilidad de una Lógica cuyo papel se centrara en determinar el origen, amplitud y validez objetiva de aquellos modos de conocer a través de los cuales pensamos los objetos, aunque siempre plenamente *a priori*. Una Lógica que tenga ante sí

> lo diverso de la sensibilidad *a priori* que la estética trascendental le suministra, a fin de dar a los conceptos puros del entendi-

miento una materia sin la cual esos conceptos quedarían vacíos, sin contenido [B 102].

A esta posible Lógica, que aparece por vez primera en la Historia del pensamiento, es a la que Kant va a denominar Lógica trascendental. *Lógica trascendental* que se ocupará, por tanto, de las leyes del entendimiento y la razón en la medida en que las mismas hacen referencia a los objetos *a priori* pero sin una abstracción total del contenido del conocimiento. Trascendental porque es

conocimiento que se ocupa no tanto de los objetos, cuanto de nuestro modo de conocerlos, en cuanto que tal modo ha de ser posible *a priori* [B 25].

Lógica porque no alcanza, todavía, el nivel de filosofía trascendental en el sentido de tener como función establecer la propedéutica necesaria para llegar, posteriormente, a dicha filosofía trascendental. Lógica trascendental o, lo que es equivalente, *Crítica de la razón pura*, que permita como analítica, dialéctica y catártica plantear, en su debido terreno, los inevitables problemas que la misma razón pura se plantea: *Dios*, la *libertad*, la *inmortalidad* (B 7).

Se diferencia de la Lógica general pura en que ésta, si hace referencia a los conocimientos racionales, sean puros o empíricos, lo hace siempre desde lo formal, es decir, con radical independencia de las intuiciones y de la sensibilidad, sólo referida al entendimiento, abstracción que no se hace en la Lógica trascendental.

Es punto en el que Kant parece mostrar una inflexión, no sé si muy coherente, en cuanto a la concepción de la Lógica como canon, porque la Lógica trascendental se va a mostrar no sólo como el canon, la propedéutica y la crítica catártica que le asigna Kant, sino como un verdadero *organon*, ya que si permite hallar los modos en que conocemos los conceptos puros primitivos del entendimiento, así como su origen, amplitud y validez objetiva, entonces permite aplicar dichos modos al propio conocimiento y, consecuentemente, ampliar el mismo.

Es desde este enfoque ambivalente desde el que cabe estimar, realmente, su aportación original. Porque la Lógica trascendental rompe la barrera a la que sometía Kant a la Lógica general pura y la rompe porque pasa a enlazarla con la sensibilidad. Conviene citar a Kant:

> En una lógica trascendental aislamos el entendimiento [...] y tomamos de nuestros conocimientos únicamente la parte del pensamiento que no procede más que del entendimiento. Ahora bien, el uso de este conocimiento puro se basa en la condición siguiente: que se nos den en la intuición objetos a los que pueda aplicarse. En efecto, sin intuiciones todo nuestro conocimiento carece de objetos y, consiguientemente, se halla enteramente vacío [B 87].

Esto significa que la Lógica trascendental hace de puente, de enlace, y desde el entendimiento puro, entre los conceptos y las intuiciones. Y ello permite que esta Lógica, frente a la Lógica general pura, se pueda convertir en una Lógica de la verdad: por Lógica, es canon y ningún conocimiento puede ser inconsistente; por trascendental, por el enlace que supone entre entendimiento y sensibilidad, no se pierde el contenido de ese conocimiento, la relación con el objeto (íd.) y, por consiguiente, la concordancia o no del mismo. No puede olvidarse la afirmación kantiana, ya citada, de que la Lógica trascendental *es* conocimiento.

El estudio de esta Lógica trascendental se escindirá, en paralelo a la Lógica general pura, en una Analítica y una Dialéctica trascendental para culminar en una catártica que evite los abusos y los artificios sofísticos. Y este último punto es central en Kant porque ya he reiterado que una de las claves de ese empleo dialéctico trascendental es mostrar la ilusión del uso de la Matemática en la filosofía.

En este paso de la Lógica general pura, de la Lógica formal, a la Lógica trascendental cabe incardinar el giro kantiano respecto a las posiciones racionalista y escéptica. Para Kant, el dogmático racionalista se mantiene en el interior de la Lógica formal que, desde su concepción, pertenece únicamente al entendimiento puro, por lo que es impotente para lograr o producir conocimiento. Creer que la Lógica formal produce y fundamenta el conocimiento, es un sueño, una ilusión; más aún, constituye un enfoque sofístico de la propia Lógica formal. Los racionalistas, así, han fracasado en su intento de fundamentar el conocimiento. Sólo desde la Lógica trascendental cabe superar el racionalismo, el formalismo logicista, porque esta Lógica es la que enlaza entendimiento y sensibilidad, concepto e intuición. Pero también supera posiciones como la escéptica de Hume y la empirista, apoyadas, en el otro extremo del racionalismo, en la sensibilidad sin tener en cuenta para nada la razón pura.

Y supera ambas posiciones porque es la que, desde el origen, permite establecer los modos correctos del conocimiento, permite analizar las condiciones y posibilidades del saber, que era lo que no habían realizado —ni siquiera se lo habían planteado— racionalistas y escépticos, y por ello habían construido ficciones, auténticos castillos en la arena...

De esta manera Kant cree lograr otro de los objetivos clave en su creación conceptual, crítica: marcar límites, barreras. Los ha marcado a la Lógica formal, y tan estrechos que, incluso, dificultan que tenga sentido su afirmación de que puede seguir el seguro camino de la ciencia.

Son límites que, a la vez, muestran la necesidad de superarlos y alcanzar una Lógica como la trascendental que posibilite pensar el enlace, y sus posibilidades, entre el entendimiento y la sensibilidad.

Consecuente, es sólo desde la Lógica trascendental desde la que cobra sentido la pregunta por la posibilidad del conocimiento, porque sólo desde ella se tiene el análisis de los modos de nuestro conocer *a priori*. Sólo desde ella cabe plantear, en concreto, la posibilidad del conocimiento matemático; con ello, su diferenciación de los restantes usos de la razón. Lo cual supone, a la vez, determinar los límites de ese conocer matemático y desenmascarar su uso sofístico en disciplinas o campos en los que el modo propio del conocer matemático es inadecuado. Pero, igualmente, marcará límites a la filosofía trascendental, objetivo también kantiano, en el sentido de que el modo propio de conocer del filósofo —si es que el mismo existe— es inadecuado para la Matemática, para las Ciencias de la naturaleza.

El establecimiento de estas barreras, con el consiguiente uso propio, adecuado, de la razón en cada uno de los campos delimitados, constituye uno de los logros más positivos de la Lógica trascendental, de la *Crítica de la razón pura* en el sentir kantiano.

Ello supone, evidentemente, una inflexión en la concepción de la Lógica dado que, a partir de esta crítica, la Lógica se convierte en Lógica trascendental. Y aquí es conveniente hacer alguna observación. Y lo primero es ver que los límites que Kant atribuye a la Lógica general pura, a la Lógica formal, no son límites internos a la misma, sino que vienen condicionados por la previa concepción epistemológica en la que se atribuyen al sujeto cognoscente dos facultades que, para su unión, requieren de una síntesis. En el fondo, es la concepción de partida la que conduce a marcar esta limitación y, con ella, a señalar como erróneas las pretensiones de cualquier tipo de formalismo, de elaboración puramente conceptual del conocimiento. Este enfoque negativo y limitativo de la Lógica formal ciertamente convertiría a Kant en un claro exponente del antiformalismo y, con él, de cualquier reduccionismo de la Matemática a la Lógica. Es uno de los motivos de que las escuelas constructivistas acudan al nombre de Kant como figura precursora...

Sin embargo, este antiformalismo hay que entenderlo en el cuadro kantiano, en el que priman elementos como:

— Una concepción constitutiva del sujeto cognoscente como escindido en dos facultades; escisión con carácter estático permanente e invariable.

— Una previa creencia de que todo, en la naturaleza, viene regido por leyes; que todo, en ella, está plenamente regulado, sin alteraciones o variaciones.

— Una inflexión en cuanto al papel preponderante epistemológico, por el que se obliga a despojar del mismo a la Lógica formal y, por ello, ésta queda marginada del conocimiento.

— Una creencia en que el conocimiento sólo puede ser de fenómenos, no de la cosa en sí, por lo que dicho conocimiento depende de la estructura de la que el sujeto se encuentra dotado sin poder atribuir estructura objetiva a la naturaleza. De aquí la afirmación de que los principios del entendimiento puro, en lo referido a la Matemática, sean constitutivos *a priori* de la misma y, por ello, sus fuentes de verdad, al convertirse en el campo de juego de la posibilidad de la experiencia —no su causa ni su fundamento— ya que, por tal constitución, los fenómenos en cuanto datos del conocimiento posible han de concordar *a priori* (B 296).

Una creencia en lo que cabe calificar como *principio del apriorismo* por el que los principios del objeto y los del sujeto coinciden: las condiciones de la experiencia son, al mismo tiempo, las condiciones de los objetos de la experiencia...

— Una creencia en que es posible hallar una fundamentación última a los modos del conocer; fundamento definitivo de todo el saber, por lo que éste deja de tener barreras en el interior de cada cuerpo cognoscitivo, marchando ya cada uno de los campos delimitados, y fundamentados, por el seguro camino de la ciencia.

CLASIFICACIÓN LÓGICA DE LOS JUICIOS, SU INSUFICIENCIA

En un cuadro como el anterior, y manteniéndonos de momento en el plano de la Lógica general pura, cabe mencionar, por su posterior importancia en el marco en el que aquí nos encontramos situados, el estudio y división de los juicios.

Por lo pronto, en el párrafo IV de la Introducción a la *Crítica*, se puede leer:

> En todos los juicios en los que se piensa la relación entre un sujeto y un predicado (me refiero sólo a los afirmativos, pues la aplicación de los negativos es fácil (después)), tal relación puede tener dos formas: o bien el predicado B pertenece al sujeto A como algo que está (implícitamente) contenido en el concepto A, o bien B se halla completamente fuera del concepto A, aunque guarde con él alguna conexión [B 10].

En el primer caso el juicio se dirá *analítico*; en el segundo, *sintético*. Los juicios analíticos (afirmativos) son aquellos en los cuales la conexión de sujeto y predicado se piensa a través de la identidad; en cualquier otro caso, se dirán sintéticos.

A los primeros los llama Kant juicios de explicación o elucidación porque el concepto predicado no agrega nada al concepto sujeto, limitándose el acto judicativo a descomponer, resolver o analizar el concepto sujeto en sus partes constituyentes. Partes ya contenidas en el concepto sujeto aunque, desde el plano cognoscitivo, lo estuvieran de modo confuso, implícito. A los segundos los denomina juicios de ampliación o dilatación ya que el predicado no estaba pensado como parte del sujeto ni podía ser obtenido de éste por ningún proceso analítico, resolutivo, y, por ello, en este tipo de juicios se amplían las notas correspondientes al sujeto, al incorporarle las propias al predicado, por lo que se gana un elemento cognoscitivo.

Pondrá, como ejemplos, en cuanto a juicio analítico: «Todos los cuerpos son extensos»; no se tiene que ir más allá del concepto «cuerpo» para encontrar, en el análisis del mismo, la nota de «extensión». En cuanto a juicio sintético, «Todos los cuerpos son pesados», porque ningún análisis conceptual permite encontrar en el concepto «cuerpo» la nota predicativa de «pesadez».

Se tiene, así, como elemento diferenciador, como criterio de analiticidad, el método de análisis, de resolución conceptual, único posible desde el interior de la Lógica general pura, desde el plano del entendimiento puro.

Hay que señalar que Kant se mantiene, en su concepción de la Lógica, en un terreno estrictamente clásico: el análisis conceptual como método lógico; la escisión en las categorías de concepto, juicio, razonamiento... Además, la forma gramatical Sujeto-Predicado la adopta como forma lógica básica. No hay aceptación del carácter propio, independiente, de juicios como los relacionales o los existenciales, por ejemplo. Y, aunque estudie los juicios hipotéticos y disyuntivos —que, con los categóricos, le permitirán esbozar una teoría del razonamiento—, da una absoluta primacía a los juicios de aserción, afirmativos, es decir, a los juicios categóricos.

La forma Sujeto-Predicado condiciona el método analítico kantiano propiciando un enfoque intensional de los juicios donde los conceptos que intervienen lo hacen según sus notas predicativas y no según la extensión que cabría asociarles; enfoque intensional o connotativo más que denotativo o extensional.

Igualmente, el aspecto modal no va a intervenir de modo preponderante en cuanto a la composición judicativa, a pesar de que Kant, manteniendo la división clásica de los casos modales, aporte una nueva clasificación de los mismos. E insisto en que el aspecto modal, sin embargo, está condicionando todo el pensamiento kantiano desde el propio planteamiento: la posibilidad del conocimiento, la necesidad de las leyes o reglas del entendimiento, la necesidad de la intuición sensible para el conocimiento...

Y una última observación, aquí: el método analítico empleado por Kant se engloba en lo que hoy se calificaría de enfoque semántico puro. Es uno de los motivos, quizá, de la no comprensión kantiana de los aspectos derivativos que encierra un enfoque de carácter más sintáctico, enfoque que sí adopta Leibniz, por ejemplo, o incluso la *mathesis universalis* cartesiana con la que se pretende reducir todo el razonamiento a procesos de tipo algebraico.

Tras la caracterización y división de los juicios categóricos en las dos categorías lógicas mencionadas, Kant, y de modo inmediato, establece una observación: los juicios de experiencia, como tales, son todos sintéticos; ha dado el salto desde la Lógica general pura al modo en el que se alcanzan los juicios. No puede olvidarse que no se quiere estar en el campo de la Lógica formal, sino en el de la Lógica trascendental, donde lo que importa no es lo formal, sino el modo epistemológico, el modo de conocer y la fundamentación del mismo.

Y en este salto va a establecer lo que puede estimarse como un segundo criterio de analiticidad, apoyado ahora en la no-contradicción, aunque lo que pretenda, realmente, sea el establecimiento de la posibilidad de los juicios analíticos; en otras palabras, cuál sea su fundamentación última. Y, para Kant, carece de sentido fundamentar un juicio analítico en la experiencia ya que, por la definición, no se requiere salir del concepto sujeto y acudir a lo experiencial:

> sólo de tal concepto puedo extraer el predicado, de acuerdo con el principio de contradicción [B 12].

Al criterio de analiticidad lógico-formal se agrega, ahora, el de consistencia lógico-trascendental. Y subrayo *consistencia lógico-trascendental*, porque no es una consistencia formal o lógica pura, sino una consistencia apoyada, a la vez, en el conocimiento. Quiero decir, un juicio es analítico si no se puede concebir, sin llegar a contradicción, que el predicado no esté contenido como una de las partes del sujeto. En el ejemplo kantiano, un juicio como «Todos los cuerpos son extensos» será analítico porque no puede concebirse un cuerpo sin extensión; tal concepción sería inconsistente. Por el contrario, en un juicio sintético puede concebirse sin contradicción alguna que el concepto predicado no pertenezca al concepto sujeto; así, es concebible que un cuerpo no sea pesado sin inconsistencia alguna.

Aún más, para Kant, será el principio de contradicción, la consistencia lógico-trascendental, el que provoque la conciencia de la necesidad que se liga al juicio analítico. Una necesidad que no puede venir aportada por experiencia alguna, siempre contingente.

Se tienen, así, el método lógico-conceptual de análisis y el criterio lógico-trascendental de consistencia como elementos base para la caracterización de la analiticidad o no de los juicios. Este último criterio conlleva, a su vez, un aspecto modal, la necesidad de los juicios analíticos, la no necesidad o contingencia de los sintéticos.

De esta manera Kant ha creído contestar a una pregunta implícita: ¿cómo son posibles los juicios analíticos? Posibilidad centrada en un criterio formal-trascendental, la consistencia, como también lo hicieran, aparentemente, los racionalistas o dogmáticos.

Esta posibilidad da respuesta, igualmente, a la pregunta por el fundamento de tales juicios: ese fundamento se centra en el entendimiento puro, no requiriendo de ningún otro elemento o apoyatura. Consecuente, al no tener enlace alguno con la sensibilidad, los juicios analíticos no aportan conocimiento alguno, son vacíos. Así, dirá Kant:

> aunque los juicios analíticos son muy importantes y necesarios, solamente lo son con vistas a alcanzar la claridad de conceptos requerida para una síntesis amplia y segura, como corresponde a una adquisición realmente nueva [B 13-14].

Hay, aquí, una valoración, por un lado, nula en cuanto al contenido epistemológico; por otro, puramente pragmática en cuanto a alcanzar la claridad de ideas que permita obtener, posteriormente, algún tipo de conocimiento. Esta valoración negativa viene sustentada porque, en el fondo, tales juicios nada tienen que ver con la verdad material u objetiva, son juicios vacíos. Es la misma valoración negativa que muestra la Lógica formal.

Ahora bien, es una valoración apoyada en identificar dos criterios diferentes: el analítico, que pertenece al entendimiento puro, y el lógico-trascendental desde el que se establece el enlace entre entendimiento y sensibilidad y donde los juicios se enfocan como consistentes atendiendo a sus notas epistemológicas y no exclusivamente lógicas o analíticas. Al decir que los juicios analíticos son vacíos, sin contenido, se está en el campo epistemológico respondiendo entonces a un criterio lógico-trascendental aunque Kant parezca que se mantiene en el campo de la Lógica pura al emplear el mismo término de consistencia sin aparente llamada al contenido. Identificación errónea y en la que el propio Kant cae, al no precisar con nitidez los dos sentidos de Lógica que emplea, empañado el segundo por la semanticidad inherente al pensamiento kantiano.

Inmediatas preguntas: cómo son posibles los juicios sintéticos, en qué se fundamentan. Y la posibilidad de la síntesis entre un sujeto y un predicado la encuentra Kant en la experiencia. Es ésta la que fundamenta los juicios sintéticos, la que permite a la intuición establecer una conexión, una correspondencia entre los conceptos sujeto y predicado.

La intuición, posibilitada por la experiencia, es la que permite ampliar el conocimiento y agregar a las propiedades obtenidas por el previo análisis del concepto sujeto las correspondientes al sujeto predicado. Una proposición como «Todos los cuerpos son pesados» es sintética porque gracias a la experiencia se agrega a las notas de extensión, impenetrabilidad, figura... obtenidas analizando el concepto «cuerpo», la de «pesadez», que esa experiencia encuentra unida siempre a dichas notas. De aquí la afirmación kantiana de que todos los juicios de experiencia sean sintéticos. Es la experiencia el punto de apoyo para los juicios sintéticos, es el algo más que no se requiere, por el contrario, para los juicios analíticos.

El modo de conocer, el conocimiento puro, es, pues, sintético; el modo de clarificar, analítico.

Hasta aquí, en el fondo, Kant parece mantener la posición racionalista, la escisión leibniziana entre verdades de razón, apoyadas en el principio de contradicción y, por ello, necesarias, obtenibles por el solo método analítico o resolutivo, y las verdades de hecho, contingentes y experienciales. Pero hago una observación: en su crítica al dogmatismo leibniziano, Kant parece identificar juicio analítico con juicio necesario en el sentido de que en el primero no puede concebirse el concepto sujeto sin el correspondiente concepto predicado. Pero en Leibniz las verdades de razón se reducen a principios o enunciaciones de identidad, por lo que para Leibniz las propias verdades de razón se escindirían en dos grandes apartados: las de identidad y las restantes. Y ello porque en la reducción se requiere no sólo el proceso derivativo formal, sino la aparición de definiciones que contribuyen a posibilitar tal reducción. Desde esta visión, sólo los juicios de identidad serían los equivalentes a los juicios analíticos kantianos, juicios analíticos lógico-formales, además, porque cabría considerar los juicios analíticos lógico-trascendentales donde la concepción semántica y, con ella, el criterio veritativo de concordancia sí haría su aparición —a pesar de Kant—. Me limito a esta observación en el sentido de cómo la concepción leibniziana puede quedar alterada tras una lectura de Kant...

LOS JUICIOS MATEMÁTICOS

Llegados a este punto, el problema se plantea con los juicios matemáticos: verdades de razón, relaciones de ideas... En el cuadro anterior, parecerían ser juicios analíticos, apoyados en la consistencia, dada la necesidad que parecen requerir las proposiciones matemáticas. Por analíticos, serían explicativos no ampliativos: no aumentarían nuestro conocimiento, como expresamente diría en la primera edición de *Crítica*, aunque esta afirmación desaparecería de la segunda. Como el primer criterio de analiticidad es el resolutivo, el analítico conceptual, Kant acude al mismo para estudiar los juicios matemáticos. Y lo hace tomando dos ejemplos como paradigmas del proceso: uno, aritmético; otro, geométrico. Y es importante señalar esta distinción, permanente en Kant en cuanto a tratar por separado, siempre, ambos campos de la Matemática.

1. El ejemplo aritmético kantiano es la proposición «7 + 5 = 12». Y Kant reconoce que, de entrada, y ateniéndose quizá a la tradición recibida dogmática, esta proposición sería analítica. De hecho, en *Nuevos ensayos sobre el entendimiento humano*, y frente a Locke, Leibniz había demostrado la proposición «2 + 2 = 4» ateniéndose única y exclusivamente a definiciones y primeros principios, por lo que llegaba a la conclusión de que dicha proposición se fundamentaba en un juicio de identidad; de aquí que las proposiciones aritméticas se estimaran proposiciones lógicas, formales o, en sus términos, verdades de razón.

No sólo por el proceso derivativo leibniziano, sino por la consideración de la necesidad de las proposiciones aritméticas, Kant prefiere manejar, de entrada, el método analítico, sin tratar de prejuzgar su posibilidad. De esta manera tratará de resolver el concepto sujeto para ver si entre sus notas se encuentra la correspondiente al predicado. Y analizando, Kant señalará:

> el concepto de suma de 7 y 5 no contiene otra cosa que la unión de ambos números en uno solo, con lo cual no se piensa en absoluto cuál sea ese número único que sintetiza los dos. El concepto de 12 no está todavía pensado en modo alguno al pensar yo simplemente dicha unión de 7 y 5. Puedo analizar mi concepto de esa posible suma el tiempo que quiera, pero no encontraré en tal concepto el 12 [B 15].

Consecuencia inmediata: por no cumplir el criterio de analiticidad, los juicios aritméticos no son analíticos. Luego no hay más opción que aceptar que son sintéticos ya que el predicado —en el ejemplo, 12— no está contenido en las notas del sujeto —suma de 7 y 5—.

Conviene analizar el ejemplo y la argumentación kantiana, aunque este análisis venga subtendido por el conocimiento que hoy se tenga de la Aritmética.

Por lo pronto parecen mezclarse, aquí, varios planos. En «7 + 5 = 12» ve Kant un juicio de la forma Sujeto-Predicado donde «7 + 5» hace el papel de sujeto y «12» el de predicado, no considerando la posibilidad de manejar relaciones ternarias o leyes de composición interna. Desde este punto de partida, al decir que el sujeto es «suma de dos números», es claro que no contiene el número 12 en particular. En esos términos generales lo que sí contiene el sujeto es un número, no habría suma de otra manera. Si se particulariza y se pasa a los números «5» y «7», sí se tendrá un número particular. Parece existir, por ello, una confusión entre el concepto general y una particularización del mismo. Confusión derivada, una vez más, de identificar el plano lógico-formal con el lógico-trascendental. Desde el primero se tiene, como suma de dos números, otro, no importa cuál; desde el segundo, no se tiene el conocimiento concreto de este número.

Son dos planos, lógico y existencial, que no se diferencian aquí. Y es claro que, al no diferenciarlos, cabe la insistencia en que se requiere del acto particular del contar para determinar el número que conceptualmente se encuentra dado. Si no se confunden estos dos planos, existencial y formal, puede afirmarse que un juicio puede ser analítico-formal aunque no lo sea analítico-trascendental.

Que el juicio ejemplificador adoptado por Kant pueda ser considerado analítico-formal puede verse desde otro ángulo. Uno de los principios que rigen la igualdad es la conmutatividad —sea o no demostrable en función de otros, no entro en este punto, de momento—. Si se maneja ese principio, se tiene el juicio «12 = 7 + 5», que, desde el punto de vista aritmético, es idéntico al formulado por Kant; no lo es desde la forma gramatical Sujeto-Predicado porque ahora el sujeto es «12» y el predicado «7 + 5». Desde esa conmutatividad el nuevo juicio, si se analiza, si se resuelve el concepto sujeto, «12», se observan notas obligatorias del mismo las sumas «11 + 1 = 10 + 2 = 9 + 3 = 8 + 4 = 7 + 5 = ...». Y aquí «7 + 5» aparece como una de las contenidas «implícitamente» en el sujeto «12», por lo que puede afirmarse que el predicado está contenido en el sujeto, que el juicio es de identidad, es decir, analítico lógico-formal. Y es un resultado obtenido por el método analítico puro.

Volviendo a la afirmación de que el predicado no está contenido en el sujeto, ciertamente al establecer la suma de dos números concretos no se conoce el resultado particular, aunque se sabe que ha de ser un número. Y ello obliga, según he indicado, y desde el plano cognoscitivo, a realizar la operación. En este punto, y según las palabras kantianas, parecería adoptarse el enfoque de que la suma es un operador: el número resultante sintetiza los sumandos. Pero ello supondría rechazar la visión kantiana porque el operador suma es una relación ternaria —«+(x, y, z)— o una función de dos argumentos —«+(x, y) = z»—. Algo que se sale, manifiestamente, de los supuestos en los que se mueve Kant, que sólo estima predicados monádicos, y en la forma gramatical S-P.

De esta manera, poner de relieve el proceso de obtención del resultado equivale a poner de relieve un enfoque computacional. Quiero decir, se realza el aspecto técnico, algorítmico, del concepto suma, que constituye uno de sus aspectos, ciertamente, pero no el único. Ello implica que la Aritmética se convierta, en Kant, y desde este análisis de los juicios que la componen, en mera técnica de cálculo y sus proposiciones no serán más que la manifestación práctica de la misma.

Enfoque computacional que, en la terminología kantiana, viene establecido como síntesis constructiva apoyada en la intuición sensible que aportan las marcas, el ábaco, las rayas o palitos, los dedos de la mano... y que cabe simplificar, con Kant, afirmando que sus juicios son juicios prácticos.

Desde esta visión, las proposiciones aritméticas requieren de la experiencia: como operación de síntesis, como acto computacional, exigen del apoyo figural, experiencial y no meramente conceptual. Con palabras de Kant,

> por muchas vueltas que demos a nuestros conceptos, jamás podríamos encontrar la suma mediante un simple análisis de los mismos, sin acudir a la intuición [B 16].

Los juicios aritméticos, así, claramente sintéticos, meras manifestaciones de la síntesis operatoria. Y Kant apuntará a esta interpretación, algorítmica, al señalar que la síntesis experiencial se ve con mayor claridad si se toman ejemplos numéricos más grandes en las sumas.

Aquí, la intuición aparece interpretada, realmente, no como representación sensible, sino como la disposición de un acto: soporta la manifestación de una potencialidad para llevar a cabo la operación, en este caso la suma. Potencialidad de acción que requiere los dedos de la mano, los palitos, el ábaco... para llevar a cabo la suma; requiere lo sensible empírico, manipulativo.

Un llevar a cabo, curiosamente, también especial: frente al concepto de suma como unión, el acto sintético se produce no por agrupación, sino por reiteración. Si se tiene «7», se va agregando palito a palito hasta llevar «5» palitos y, así, se alcanza el «12», un llevar a cabo material.

Insisto: la previa admisión, indiscutida, de la forma gramatical S-P como única forma lógica conduce a una interpretación de los juicios aritméticos desde un enfoque constructivo calculatorio. En particular, la suma de dos números se reduce a un proceso inductivo, recursivo.

Hay que realizar, aquí, y al menos, dos advertencias: por un lado, de haberse realizado la caracterización recursiva explícitamente, implicaría la supresión de la forma S-P, base de la posición kantiana; es lo puesto de manifiesto por Dedekind al dar la caracterización explícita recursiva de la suma y el producto. Por otro, esa construcción, esa síntesis recursiva, hace intervenir, como elementos clave, los siguientes:

— la reiteración, añadir uno a uno los elementos de cada sumando;
— la unidad, lo que se va agregando;
— la propia acción de agregar, que es la operación monaria sucesor; lo cual supone, consecuente, la problemática por la estabilidad de esa misma acción iterativa.

La Aritmética, desde la Lógica trascendental, va a venir asociada a esta problemática, a la del acto constructivo recursivo, posibilitado por una de las formas constitutivas de la sensibilidad. Pero, por lo pronto, y desde el estudio del tipo de juicios en que el acto sintético operatorio se incardina, la conclusión de Kant es clara: los juicios aritméticos son sintéticos.

2. En cuanto a la Geometría, Kant indica: «ningún principio de la Geometría es analítico». Y pasa a esta-

blecer esta afirmación apoyándose, como antes, en un ejemplo: «la línea recta es la más corta entre dos puntos». Juicio sintético ya que, por el criterio conceptual resolutivo, el concepto «recto» carece de cualquier nota o propiedad de magnitud. Es un concepto cualitativo. Por el contrario, el predicado «distancia más corta» es cuantitativo, métrico se diría en términos más actualmente precisos. De aquí que no puedan mezclarse ambos, no puedan unirse cuantitativo-cualitativo como notas de una identidad, y ningún análisis conceptual podrá hacer aparecer esta unión. Y Kant vuelve a dar un salto, vuelve a adentrarse en la Lógica trascendental al advertir que el juicio que ejemplifica a los propios de la Geometría es resultado de una síntesis constructiva realizada por el sujeto. No le basta el criterio lógico-formal resolutivo. Por ello Kant indicará:

> Hay que acudir, pues, a la intuición, único factor por medio del cual es posible la síntesis [B 16].

Palabras que vuelven a reflejar, desde el campo de la Lógica trascendental, que la intuición no se muestra como una mera representación fenoménica, sino más bien como la base para la realización de un acto sintético, un acto del sujeto cognoscente por el cual se relacionan los conceptos correspondientes a sujeto y predicado a través de la síntesis común apoyada en la experiencia.

3. Del análisis resulta que, para Kant, los juicios matemáticos son sintéticos: el predicado que contienen no está incluido en el sujeto. Consecuente, no vale, para ellos, el criterio de posibilidad de los juicios analíticos: la consistencia. No sólo la lógico-formal, sino más radical y profundo, la lógico-trascendental. De esta manera, hacer Matemática es sintetizar, y esta síntesis implica

una acción, un establecimiento de la intuición posibilitada por la experiencia.

Este análisis tiene sus consecuencias. Los juicios matemáticos no entran en el campo propio del entendimiento puro —aunque vengan posibilitados por las categorías de ese entendimiento—. Por ello, no se hace factible la sugerencia de construir sistemas formales matemáticos con posibilidad lógica para dotarles, posteriormente, de posibilidad real, de significación y validez objetiva. Desde su propio punto de partida, desde su elemento constitutivo, los juicios matemáticos corresponden al campo de la sensibilidad —aun soportada por las categorías del entendimiento—.

De aquí que Kant cierre toda salida para realizar construcciones matemáticas pensadas con simple posibilidad lógica pero aptas para posterior significación. Se niega, de esta manera, toda posibilidad a lo que hoy se calificaría como «Matemática moderna».

Continuando el análisis de los juicios matemáticos que, para Kant, son sintéticos pero están ahí como hechos que requieren de fundamentación, se advierte que los mismos se presentan como verdades objetivas, independientes de la experiencia. Kant señalará:

> las proposiciones verdaderamente matemáticas son siempre juicios *a priori*, no empíricos, ya que conllevan necesidad [B 14],

y la necesidad no puede venir dada por la experiencia. Es claro que la necesidad abarca no sólo a los juicios analíticos, sino también a los sintéticos; pero no en sí mismos, sino en cuanto presuponen otra proposición sintética de la cual poder derivarse. Necesidad en cuanto al proceso demostrativo formal, cabría decir. Y no es éste el caso, aquí, por lo que el criterio derivativo no basta para justificar la afirmación del carácter de necesidad y, consecuente, la nota de *a priori*. Sin embargo, Kant es tajante en cuanto a la Matemática pura: es un concepto que

> implica, por sí mismo, que no contiene conocimiento empírico alguno, sino sólo conocimiento puro *a priori* [B 15].

Consecuente, los juicios de la Matemática son juicios sintéticos, pero *a priori*. Han entrado en juego, plenamente, los aspectos epistemológico y modal en los que Kant se mueve, de modo constante. Y quizá haya sido la Matemática la que ha obligado, en el fondo, a este entrar en juego porque el hacer matemático constituye conocimiento sintético, por un lado, pero necesario y cierto, por otro, de donde no se le puede considerar ni formal ni empírico.

Un entrar en juego que permite justificar, ahora, que Kant atienda realmente a los juicios afirmativos:

> *Desde el punto de vista lógico*, cualesquiera proposiciones pueden expresarse de forma negativa, pero desde el punto de vista del contenido, en lo que se refiere a saber si nuestro conocimiento en general es ampliado o restringido por un juicio, la función propia de los juicios negativos no consiste más que en *impedir el error* [B 737],

y ello porque un juicio no se limita a ser una mera relación entre dos conceptos como se quiere en Lógica clásica —y Kant parece seguir en la mayoría de sus formulaciones—. Desde el conocimiento, desde el plano lógico-trascendental, un juicio es un acto por el que se reducen los conocimientos dados en una unidad objetiva de apercepción, por lo que ese juicio posee una validez objetiva, independiente del estado del sujeto (B 142). Por ello los juicios negativos no ya por su forma, sino atendiendo a su contenido,

> no merecen ninguna atención especial [B 736].

Esta combinación entre Lógica y Epistemología, este estar en el dominio de la Lógica trascendental, obliga a clasificar los juicios atendiendo a los dos aspectos que conforman dicha Lógica. Por un lado, analíticos y sintéticos, según que el predicado esté o no contenido en el sujeto; por otro, *a posteriori, a priori* según dependan o no de la experiencia, de las impresiones de los sentidos.

Desde la Lógica trascendental —no desde la Lógica formal— se tendrán, así, cuatro posibles tipos de juicios que combinan los dos aspectos señalados:

— analítico *a priori*,
— analítico *a posteriori*,
— sintético *a priori*,
— sintético *a posteriori*.

Los tipos primero y cuarto son los característicos del entendimiento y de la sensibilidad, respectivamente. El segundo, analítico *a posteriori,* encierra una inconsistencia si nos atenemos a las definiciones. Para los racionalistas y empiristas el tercero se mostraría imposible porque, si un conocimiento procede de la experiencia, procede según una síntesis experiencial, por lo que es conocimiento *a posteriori*, contingente y no necesario. Si se prima el carácter modal de necesidad en el hacer matemático, ello implicaría que sus juicios pasarían a ser de la primera clase, analíticos; si se prima el aspecto experiencial, serían de la cuarta clase; en ningún caso pertenecerían a la clase que Kant va a crear: la sintética *a priori*.

Creación que es el gran reto con el que se enfrenta Kant: hacer plausible la existencia de dichos juicios.

Reto que se condensa en las preguntas que mencioné: cómo son posibles los juicios sintéticos *a priori*, cómo es posible la Matemática. En el fondo, cómo es posible el conocimiento, en qué se fundamenta.

2. LA MATEMÁTICA

2.1. UN PROCESO CONSTRUCTIVO

1. Para Kant, y según lo ya esbozado, la Matemática se va a centrar en el estudio del espacio y el tiempo como relaciones formales; estudio condicionado, por ser conocimiento, a la intuición sensible empírica. Por conocimiento objetivo, sus juicios son sintéticos; por necesarios, *a priori*. Por sintéticos, la Matemática no puede ser reducida a Lógica general pura, a mero formalismo. Por necesaria, no puede ser reducida a mera ciencia experiencial, contingente. Además, los juicios de la Matemática suponen, en el fondo, la materialización de una acción por parte del sujeto, acción a la que parece reducirse, en ocasiones, el término kantiano «intuición».

En este punto, y teniendo presente la generalidad que Kant pretende de no atenerse al contenido del conocimiento, sino únicamente a la forma, más exactamente a la posibilidad del mismo, se puede acudir a sus afirmaciones en cuanto al método, en cuanto al uso trascendental de la Matemática. En la *Doctrina trascendental del Método*, que constituye la segunda parte de la *Crítica*, comienza señalando —mera reiteración casi textual en B 8—:

> Las matemáticas ofrecen el más brillante ejemplo de una razón que consigue ampliarse a sí misma, sin ayuda de la experiencia [B 740].

Como tal, podría tomarse como modelo para las restantes disciplinas racionales. Pero Kant va a advertir que el método matemático es propio de la Matemática y que, de emplearlo en otros campos racionales, especialmente en la filosofía, se convertiría en un método dogmático. Lo que entrañaría el hundimiento precisamente de aquel terreno que creería recibir ayuda. Nada más pernicioso para la filosofía que seguir el método matemático, pero también nada más pernicioso para la Matemática que seguir el método filosófico.

Y ello porque, según Kant, hay dos usos de la razón, los cuales tienen en común la universalidad del conocimiento y el hecho de producirlo *a priori*. En uno se produce el conocimiento filosófico, que es un conocimiento racional derivado de conceptos; en el otro se produce el conocimiento matemático, que

> es un conocimiento obtenido por construcción de los conceptos [B 741].

La tarea de la razón mediante la derivación de conceptos es lo propio de la filosofía; la tarea de la razón mediante la construcción de conceptos —universal y, por ello, necesaria— es lo que se denomina *Matemática*. Esquemáticamente cabría decir que la filosofía parte de los conceptos mientras que la Matemática llega a los conceptos.

Una diferencia formal clave por la cual la filosofía y la Matemática se distinguen esencialmente; distinción formal no apoyada, como quieren algunos, en el contenido, porque tanto la filosofía como la Matemática tratan de algunos elementos comunes: por ejemplo, la magnitud en sus aspectos tanto espacial como temporal...

Este llegar a los conceptos, propio de la Matemática, obliga a la generación de los mismos. Una generación que, por serlo, es ampliativa, expande el conocimiento.

Desde la Lógica trascendental dicha generación no puede ser propia, intrínseca, al campo del entendimiento puro. Bien entendido que, en éste, es factible aceptar en principio la existencia de conceptos a los que se les puede dotar de significación, es decir, en principio cabe aplicar algunos conceptos a la sensibilidad, a los fenómenos. Es lo que Kant especificará como uso de la razón con su pregunta de si ese uso puede o no ser empírico.

El uso de la razón en Matemática no muestra duda: en Matemática es la razón la que genera sus conceptos. Pero ello obliga a que la construcción matemática no sea del ámbito de la razón pura, sino de la intuición posible; su campo es el de la sensibilidad (B 753). Un campo que posee unos límites perfectamente claros: los de la *naturaleza*. Campo de la sensibilidad por donde el matemático camina por el seguro camino de la ciencia pero, traspasado y penetrando en el campo de los conceptos puros e incluso trascendentales, ese matemático ni puede sostenerse de pie, ni nadar, y sus huellas quedan borradas por el tiempo (B 754).

Es en el campo de la sensibilidad donde se hace Matemática a partir de una intuición que se muestra como un proceso, un acto dinámico constructivo a través de la experiencia.

No caben, por ello, las sugerencias que se han ido haciendo en cuanto a la elaboración de sistemas formales con posibilidad lógica para un posterior tránsito a la posibilidad real. Ello consistiría en un hacer de sistemas formales consistentes que únicamente manifestarían un uso derivativo de la razón, un uso derivativo de conceptos y proposiciones obtenidas deductivamente. Uso que únicamente conduciría a la elaboración de meras ficciones ilusorias, no a saber real alguno. Un uso, además, que a Kant se le muestra —en una consideración que cae, nuevamente, bajo un criterio estrictamente valorativo— indigno de la razón, confundente no ya para la filosofía, sino para la propia Matemática.

El uso correcto de la razón, en la Matemática, según Kant, es precisamente inverso al anterior, al filosófico, y requiere de la sensibilidad; un uso que, para ser correcto, no debería romper jamás las barreras que le impone su campo propio.

En el campo de la sensibilidad, la Matemática, como uso de la razón, constructivo, consiste en

> determinar una intuición *a priori* en el espacio (figura); dividir el tiempo (duración); conocer simplemente el elemento universal de la síntesis de una misma cosa en el espacio y en el tiempo, así como la magnitud a que ello da lugar en una intuición en general (número) [B 752].

Con estas palabras Kant indica, implícitamente, que la Matemática es el estudio de las magnitudes, básicamente de las extensivas. Con lo cual Kant parece inmerso en la tradición, no innovando concepción alguna.

Simultáneamente establece su clasificación de la Matemática de acuerdo con los tipos de magnitudes que considera existentes: la Geometría se ocupa de construir la intuición en el espacio; la Mecánica, de construir en el tiempo; la Aritmética y el Álgebra han de mostrar la intuición conjunta de espacio y tiempo respecto a las magnitudes.

2. Hay que resaltar que Kant concibe la Matemática como un hacer permanentemente dinámico, sensible y no estrictamente conceptual; el matemático se le muestra actuando, intuyendo = construyendo, bien en la imaginación, bien en los sentidos directos. Dirá:

> No podemos pensar una línea sin *trazarla* en el pensamiento, ni un círculo sin *describirlo*, como tampoco representar tres dimensiones del espacio sin *construir* tres líneas perpendicu-

> lares a partir del mismo punto. Ni siquiera podemos pensar el tiempo sino gracias a que, al *trazar* una línea recta (que ha de ser la representación externa y figurada del tiempo), sólo atendemos al acto de síntesis de la diversidad [...]. Es el movimiento, como acto del sujeto, no como determinación de un objeto y, consiguientemente, la síntesis de la diversidad en el espacio, lo que produce el mismo concepto de sucesión cuando hacemos abstracción del espacio y atendemos sólo al acto a través del cual determinamos el sentido interno según su forma [B 154-155].

Y subrayo este párrafo en su totalidad, con ese atender al acto, a la acción cognoscitiva del sujeto, en el que Kant indica cómo es imposible pensar un concepto matemático sin la representación intuitiva, sintética, correspondiente; manipulación representativa que se muestra no como mera apercepción objetiva, sino como un auténtico acto constructivo.

Incluso la sucesión viene fundamentada, sustentada por esa acción de representación en la imaginación —que no es más que intuición, en el fondo—, del movimiento material —cabría decir incluso fisiológico— del sujeto. Y con ello Kant parece dar respuesta a la fundamentación de la suma convertida en mera reiteración, en mera sucesión de agregar unidades a una ya dada.

No hay, y a pesar de mantenerse lo modal, posibilidad para pensar sin más conceptos matemáticos, sino que se piensan imaginativamente, mediante una imaginación productiva. Construcción de un objeto posible como adecuado a un concepto que, por ello, se construye simultáneamente. Esa construcción concordante, esa adecuación, muestra a la vez la nota obligada de universalidad.

Situado exclusivamente en el plano epistemológico, Kant vuelve a distinguir el método filosófico del matemático desde el enfoque modal, desde la posibilidad. A pesar de su extensión es preciso leer sus palabras:

> Todo nuestro conocimiento se refiere en definitiva a intuiciones posibles, pues sólo a través de éstas se nos dan objetos. Ahora bien, un concepto *a priori* (un concepto no empírico) o bien contiene ya en sí una intuición pura, y entonces es susceptible de ser construido, o bien no contiene más que la síntesis de intuiciones posibles que no se dan *a priori*. En este último caso, se pueden formular juicios sintéticos *a priori* a través de él, pero sólo discursivamente, por conceptos, nunca intuitivamente, por construcción del concepto [B 747-748].

Los conceptos matemáticos, por ser tales, contienen en sí la intuición pura que posibilita su construcción. Por ello el matemático no puede pensar un concepto matemático sin el acto de construir en la imaginación, en la intuición el objeto posible correspondiente a ese concepto. Una construcción del sujeto cognoscente que viene posibilitada tanto por su constitución —por estar dotado de la facultad de la sensibilidad con las formas puras de espacio y tiempo—, como porque los conceptos que piensa matemáticamente ya contienen en sí su posibilidad constructiva en esa sensibilidad. Por esto último el concepto matemático pensado contiene la intuición pura que permite su simultánea construcción, su mostración existencial.

En paralelo a la construcción y no derivación del concepto, a la formulación del juicio matemático como acto sintético *a priori*, en cuanto al razonamiento, el matemático tampoco infiere deductiva, demostrativamente, sino que produce un proceso constructivo. Para Kant no hay, en la Matemática, deducción formal, sino construcción derivativa.

3. Para mayor ejemplificación, y no sólo de la construcción ostensiva sino del proceso constructivo matemático, y en las tres categorías concepto, juicio, razonamiento, y siguiendo una sugerencia kantiana, puede hacerse su mismo experimento mental:

Se le da a un geómetra el concepto de triángulo, y se observa que no se detiene a analizarlo, a resolverlo en sus notas componentes; no se detiene a clarificar el concepto de línea recta, de ángulo, de tres... Es análisis que no le conduciría a ampliar el conocimiento. Con ese método, propio del filósofo, nada agregaría cognoscitivamente hablando salvo una mera clarificación conceptual. Lo que el matemático hará, en el acto, es trazar un triángulo, sea en el papel, la pizarra o la imaginación; lo que hará, de modo inmediato, es mostrar la intuición que corresponde al concepto de triángulo. De modo análogo, si se le da la suma «7 + 5», no se detendrá el matemático en el análisis conceptual de «7», «5», «suma»..., ni en el de la forma o tamaño de los símbolos, o en el color con el que están trazados, sino que, de inmediato, se pondrá a ejecutar dicha suma.

En cuanto al juicio matemático, ya se indicó el análisis correspondiente, señalando que constituía un acto, una síntesis y nunca un análisis de los conceptos sujeto y predicado.

Por último, y en cuanto al razonamiento, y en paralelo al concepto,

> dejémosle que halle a su manera la relación existente entre la suma de sus ángulos y un ángulo recto [B 744].

La proposición que Kant plantea es demostrar que la suma de los ángulos de un triángulo es dos rectos, y se observa que Kant no habla de «demostrar» un resultado determinado, no da el resultado; se limita a indicar que el matemático halle «a su manera» una posible relación entre los ángulos del triángulo, y su medida, y el ángulo recto.

Kant señala: el matemático actúa, no analiza. El geómetra corre en pos de la intuición, y lo primero que hace es construir un triángulo: una figura material, visible.

Guiado por el previo conocimiento de que la suma de dos ángulos rectos equivale a la suma de todos los adyacentes que se pueden trazar desde un punto sobre una línea recta, prolonga un lado del triángulo y obtiene dos ángulos adyacentes que suman dos rectos. Divide el ángulo externo trazando una paralela al lado opuesto y *ve* que surge un ángulo adyacente interno igual a uno externo —que equivale a mantener el postulado V euclídeo en la versión de que por un punto exterior a una recta puede trazarse una única paralela a dicha recta—, y así sucesivamente.

Lo que termina obteniendo, a través de una cadena de inferencias y guiado siempre por la intuición (íd.), mediante un proceso de sucesivas construcciones en el que se mezcla el previo conocimiento conceptual y la sucesiva plasmación material de las figuras, es que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos. El matemático ha obtenido esa conclusión no de una deducción formal, sino de una construcción iterativa a la que Kant califica de inferencia demostrativa.

Debo observar que hay un matiz diferenciador entre la construcción de un concepto y la demostración constructiva de un teorema. En la primera, la construcción del concepto se centra en dotar al mismo de significación, de validez objetiva; en términos más actuales, de que el conocimiento, para serlo, posea referencial porque, de lo contrario, el concepto sería vacío. Es, por lo ya anteriormente mencionado, una construcción con un claro matiz ontológico: asegurar la existencia fenoménica del conocer. Seguridad obtenida con motivo de la experiencia, a través de un acto de la intuición que muestre el objeto requerido. Por esta exigencia de mostración existencial de contenido, no hay, no puede haber, proceso analítico alguno.

En la construcción demostrativa, además del elemento existencial requerido para los conceptos que en ella intervienen, se exige agregar, en cada paso iterativo constructivo, nuevos elementos no contenidos en los anteriores, en las proposiciones que, conocidas, pueden guiar la demostración: dividir el ángulo adyacente por una recta paralela a uno de los lados es un acto no contenido en los pasos anteriores, en las proposiciones que se toman de partida. De aquí que no pueda identificarse la demostración constructiva con una deducción lógico-formal, donde la conclusión ya se encuentra contenida en las premisas —aunque confusamente— y, por ello, nada agrega a dichas premisas. Como construcción, aporta no sólo en la conclusión, sino en todo el proceso, nuevos elementos no incluidos en los anteriores. Y es este rasgo el que constituye, para Kant, lo característico del proceso matemático.

El aporte no es simplemente heurístico, aunque también quepa admitir ese factor. De considerarlo como el único, la demostración caería bajo la consideración de psicológica y la novedad de cada paso, de la novedad contenida en cada uno de ellos, podría atribuirse a la capacidad del matemático en cada ocasión. Sorteando esta posible dificultad, un kantiano indicaría que el aporte no viene dado por accidente o buena suerte, por el clásico «ajá» o «eureka», sino que en el proceso demostrativo estos aportes son necesarios y lo son por el carácter constructivo del sujeto. La imagen, se precisará posteriormente, no sirve de guía, sino que es el esquema el que soporta dicha imagen y hace que esos aportes vengan dados por el fenómeno matemático, sean inherentes al mismo.

Este matiz diferenciador entre los dos tipos de construcción —conceptual, demostrativa— implica, a su vez, otro matiz en cuanto a la fundamentación de ambas construcciones. En la primera, conceptual, el acto constructivo sería simultáneo entre representación y concepto; por así decirlo, no habría el discurrir del tiempo. En el segundo, demostrativo, se trata de una iteración de actos, de una sucesión que, por ello, tiene que exigir no sólo de la mera magnitud extensiva espacial, sino que, como sucesión, ha de exigir del tiempo, de la duración. Cabría hablar, pues, de una ordenación posible, de una numeración ordinal de los distintos actos iterativos inferenciales.

Todo ello permite que pueda considerarse a la misma demostración, desde una visión constructivista, como un proceso sintético constructivo y no sólo por ser acto constructivo, sino por caer bajo la ordenación temporal. Como tal acto, la demostración constructiva es evidente que es de segundo nivel.

Los dos matices señalados, sus repercusiones en cuanto a la exigencia de una diferente fundamentación, no se encuentran explícitos, claramente, en Kant, pero creo que cuadran en su visión global del hacer matemático e, igualmente, son factibles para un constructivista matemático.

4. La ejemplificación o experimento mental anterior muestra, con nitidez, la consideración kantiana de la Matemática: la de ser un permanente proceso constructivo sensible. El matemático dibuja, prolonga, traza una paralela, divide un ángulo, ve...; calcula, agrega... Es el término «construcción» el término clave: construcción sintética asociada a elaboración conceptual como lo característico del uso de la razón pura en la Matemática.

La pregunta ¿cómo es posible la matemática? tiene, así, respuesta: es posible porque es un proceso constructivo sintético. En otras palabras, la posibilidad del conocimiento real matemático se centra en la construcción sensible, bien pura, bien empírica. Única que produce, por un lado, el acto sintético realizado por un sujeto que permite alcanzar, llegar a los conceptos; por otro, relacionarlos y, finalmente, obtener inferencias demostrativas en una sucesión de actos constructivos. Y la propia sucesión ya se ha señalado que viene posibilitada por otro acto ligado a la propia constitución del sujeto cognoscente, el movimiento.

Kant entiende por su término clave lo siguiente:

> construir un concepto significa presentar la intuición *a priori* que le corresponde [B 741].

En su afán dicotómico distingue dos tipos de construcción: ostensiva (de los objetos mismos) y simbólica. Evidentemente, las correspondientes a las formas del espacio, la Geometría, y a las de espacio y tiempo, la Aritmética y el Álgebra.

La construcción *ostensiva* consiste en presentar un objeto como instancia del concepto pensado *a priori*. Es a la que hizo referencia el texto anterior de que en la imaginación se piensa un círculo describiéndolo, un espacio de tres dimensiones construyendo tres perpendiculares por un mismo punto... si es que no llega a realizarse material, empíricamente.

La construcción *simbólica* procede por manipulación de signos, en el espacio y el tiempo, para representar las construcciones de magnitudes en general (números) como la adición, sustracción, extracción de raíces, etc. En este caso se prescinde, radicalmente, de la naturaleza del objeto que ha de ser pensado según el concepto de magnitud ateniéndose sólo a las diversas relaciones que se dan entre ellas, y siempre de acuerdo con reglas universales. Así, la forma de la suma vendría dada por «a + b = c». Pero esta construcción material, figural, no es, en sí misma, una instancia del concepto suma, sino una representación simbólica de las propiedades formales de la intuición que corresponden, realmente, al concepto «suma de a y b».

La construcción matemática exige, tanto en lo ostensivo como en lo simbólico, un acto intuitivo constructivo que proporcione el objeto que corresponde al concepto pensado *a priori*. Mostración de objeto en la intuición y no derivación analítica de las propiedades que puedan convenirle.

5. Aquí surge una serie de dificultades. En concreto, ya se ha afirmado que en la intuición se da un objeto singular; un triángulo material, unos signos determinados. Y, sin embargo, el conocimiento matemático hace referencia no a ese triángulo particular, no a esos signos especiales, sino a los conceptos universales asociados a tales elementos singulares, concretos.

La construcción matemática, como construcción de un concepto, ha de venir acompañada de la misma nota de universalidad que se atribuye al concepto, por lo que su representación ha de ser universal. Algo que, evidentemente, no aporta el objeto singular representado, la figura o el símbolo materializado. Así, en el caso del triángulo, en su figura concreta o en su imagen visual aparece como isósceles, escaleno, rectángulo, obtuso, los lados no son rectos...; en el caso de la suma aritmética, los signos que la representan están mejor o peor trazados, en color blanco en la pizarra, o negros o azules en el papel...

Es la segunda dificultad que ya señalé en 1.1, «El marco previo», originada en los *Elementos* euclídeos y reactualizada por Descartes, respecto no ya a la necesidad de un paso de particularización en el proceso razonador matemático, sino en cuanto a las características de esa singularización que ha de ser trascendida. Es decir, justificar la dificultad que se tiene en la necesidad de trascender la singularidad concreta, de ver en la figura material o en la imaginada lo universal. Era la segunda de las dos facetas de una misma problemática a la que Kant se ha ligado, radicalmente, desde el mismo origen de la *Crítica*. El primer aspecto es el que se convierte en la cuestión epistemológica de cómo conocer y la obligatoriedad, frente al simple pensar, del elemento singular, concrecional.

En cuanto al segundo, en cuanto a la dificultad de que el objeto singular muestre en sí la universalidad que el razonamiento matemático requiere, Kant trata de superarla señalando que hay notas en la representación singular que no son más que determinaciones completamente indiferentes para la universalidad requerida por el concepto. Por ser indiferentes, en el acto constructivo del concepto matemático se prescinde de aquellas que no modifican el concepto. A pesar de que la figura

> singular trazada es empírica, sirve para expresar el concepto, no obstante la universalidad de éste [B 742].

Y de aquí que el conocimiento matemático, gracias a ese proceso constructivo en el que los rasgos singulares de las figuras no intervienen en el momento final, puede considerar

> lo universal en lo particular, e incluso en lo singular, pero *a priori* y por medio de la razón [íd.].

Y lo mismo que esa representación singular viene determinada por ciertas condiciones universales de la construcción —el espacio y el tiempo—, el objeto del concepto, al que dicho singular corresponde como su mero *esquema*, tiene que concebirse como universalmente determinado (íd.)

Y aquí se tiene otra diferencia respecto al uso filosófico de la razón que, a la inversa del matemático, sólo considera lo particular en lo universal.

2.2. DIFICULTADES Y VENTAJAS

He indicado un problema, lo singular-universal en la construcción ostensiva geométrica, y algunas de las palabras con las que Kant pretende superarlo. Superación que, para serlo, requiere de ulteriores precisiones, fundamentalmente en cuanto al término antes subrayado, el término «esquema». Pero hay muchos otros problemas que conviene exponer para que cobren sentido, pleno, los conceptos kantianos.

Por lo pronto, la clara distinción entre los dos tipos de construcción, ostensiva y simbólica. Esta última, propia del Álgebra y la Aritmética, no muestra un objeto singular a la intuición, sino que lo hace de modo mediato, por decirlo así. Es una construcción de segundo nivel que abstrae completamente la constitución de los objetos cuando la ostensiva parece manejar los propios objetos, pudiendo ser considerada como de primer nivel. Ello exige que ambos tipos de construcción deban ser tratados separadamente, como corresponde, además, a la separación permanente que entre ambas disciplinas matemáticas realiza el mismo Kant. Es una separación que no basta exponer como hecho, sino que requiere de algún tipo de justificación, de fundamentación desde el plano de la Lógica trascendental, desde la razón crítica. Lo cual supone, a la vez, clarificar el propio concepto de número que, desde las palabras anteriores, no parece poder identificarse con objetos ni con conceptos.

En la ejemplificación particular de la construcción ostensiva referida al uso de la razón según el método matemático he seguido lo más fielmente la exposición del ejemplo kantiano: alcanzar la proposición de que la suma de los ángulos de un triángulo es dos rectos. Ahora bien, esta proposición no es algo que se conozca previamente y de modo inmediato, como sí lo es el conocimiento de que hay tres ángulos en la figura limitada por tres líneas rectas —por supuesto, ángulos interiores—. La proposición es el resultado de una inferencia (B 359) que tiene como base otra proposición, al menos. Y lo que Kant hace aquí es marginar una inferencia lógico-formal, un posible razonamiento deductivo convirtiéndolo en una construcción, en un proceso del cual asegura que viene regulado universalmente. El razonamiento deductivo en el hacer matemático es proceso de síntesis constructivas sucesivas. Algo que, por otro lado, diferenciará el uso filosófico del matemático. Pero esta diferencia entre razonamiento deductivo lógico-formal y razonamiento matemático queda establecida, en el fondo, como una cuestión fáctica en el sentido de que se fundamenta en los elementos constitutivos del sujeto cognoscente, de la facultad de la sensibilidad en concreto. Es a lo que hace referencia Kant cuando, en su ejemplificación, trata de mostrar el hecho fáctico de cómo actúa el matemático.

Una facticidad que, incluso desde la propia metodología kantiana, podría plantearse como problemática. El ejemplo paradigmático kantiano lo es en un tipo de Geometría, la métrica euclídea. Precisamente el teorema que se demuestra es equivalente, aceptados los demás axiomas, al que utiliza aunque no enuncia explícitamente como tal, el Postulado V. Postulado cuyo papel es el de señalar que el espacio considerado es de curvatura constante igual a cero. Además, «ver» que los ángulos alterno-internos son iguales no se apoya en percepción alguna, sino que en la construcción matemática esa igualdad viene establecida por el tipo de espacio geométrico que se maneja: y el que se maneja es invariante respecto a las transformaciones de traslación y rotación o simetría puntual. Invariancia propia no del sujeto cognoscente, sino del espacio considerado.

Nuevamente, se encuentra una de las dificultades del planteamiento kantiano: como el sujeto está constituido de una manera determinada, realiza demostraciones constructivas de una manera determinada. Construcciones que no dependen de la guía heurística de la figura, sino de la propia naturaleza de los conceptos que están en juego y, sobre todo, de la constitución del sujeto cognoscente.

Se puede indicar que esto no constituye crítica racional, sino mera constatación de un hecho fáctico: la constitución del sujeto cognoscente. Con lo cual lo que se tiene, más que crítica de la razón pura, es Psicología trascendental. Que es donde cabría, realmente, la argumentación de que es el sujeto el que va agregando actos constructivos en cada elemento de la sucesión demostrativa.

Es un tipo de dificultad que no va en la misma línea que otras dificultades apuntadas en la concepción de demostración kantiana desde, al menos, Russell. Para éste, por ejemplo, el proceso demostrativo geométrico no requiere del manejo de figuras y, por ello, de proceso constructivo alguno, donde proceso constructivo se identifica, en cierta manera, con proceso heurístico. Las demostraciones geométricas, en particular, pueden ser formalizadas en la Lógica formal y se muestran como meras cadenas deductivas. Los aportes considerados constructivos no son más que elementos psicológicos, no lógicos. Es crítica consecuente con el punto de partida russelliano, estrictamente logicista y que olvida que, por un lado, las figuras no tienen papel heurístico en sí, sino derivado; por otro, que el mismo Kant intenta suprimir cualquier llamada a elemento psicológico —a pesar de la crítica que antes he realizado—.

Igualmente, la noción de construcción no se muestra, en ocasiones, muy clara. Y he tenido ocasión de plantear, ya, una primera matización en cuanto a dos sentidos de construcción, conceptual y demostrativa, no muy explícitas en Kant, pero inherentes a su pensamiento. Es una de las líneas críticas iniciadas por Frege frente a Kant, por ejemplo.

Frege señala falta de coherencia interna kantiana al exigir una imagen empírica de la cual tener una intuición pura que permita la universalidad del concepto asociado. Empirismo de la imagen, de la figura exigida, que indica que las continuas llamadas de Kant al papel de la intuición sensible pura quedan, en el fondo, sin sustentación alguna. Quiero decir, si lo que se requiere es esa imagen empírica, entonces lo que sobra es la intuición pura. En este sentido Kant se muestra, en ocasiones, algo incoherente. De hecho reiteré su afirmación de que toda intuición era sensible, pura o empírica; pero también de que la intuición de un fenómeno era singular, luego empírica y no pura. A la vez, que de lo empírico, por no necesario y no universal, no hay conocimiento auténtico. En la construcción ostensiva se requiere de lo singular, de lo concreto. Luego, combinando todas estas afirmaciones, en la construción ostensiva no hay conocimiento porque sólo se manejan representaciones singulares, empíricas... La intuición pura no desempeña papel alguno.

Es crítica reiterada por autores posteriores, como, por ejemplo, Friedman (1990), al indicar que no se ve muy bien el papel que puede tener la intuición pura cuando Kant insiste en el papel esencial de la intuición empírica.

Se requiere, claramente, de precisiones en cuanto al pensamiento kantiano del concepto «imagen productiva» o «figura» en el caso de la construcción ostensiva. De mantener los términos tal como se han esquematizado, sólo sería factible indicar que, como mínimo, Kant es incoherente y que, de hecho, no ha resuelto el viejo —y permanente, aún hoy— problema del paso de lo singular a lo universal y necesario que parece exigir la Matemática.

Frege inaugura una línea crítica que se va matizando en autores posteriores. Así, Strawson (1966) cuando achaca a Kant el confundir la figura fenoménica con el concepto porque se exige del trazado de la figura en la imaginación y ese trazado conlleva una significación realmente pictórica, visual, que, si necesaria para una posterior construcción, no es suficiente para el aspecto conceptual de la misma. De aquí que, para Strawson, la construcción ostensiva kantiana se convierta en la mejor descripción de nuestras capacidades intelectuales para imaginar figuras, para una caracterización fenoménica de la Geometría. Algo que iría en contradicción con las pretensiones de Kant de distinguir la intuición empírica fenoménica, de la cual no se ocupa el conocimiento, de la intuición sensible pura, única de la que se ocupa dicho conocimiento, en particular el matemático...

He indicado, sin embargo, que Kant pretende superar estas posibles críticas —anticipándose, por supuesto— al señalar que, en el acto constructivo del concepto a partir de la imagen fenoménica que da significación o validez objetiva al mismo, se prescinde de las diferencias que no modifican a ese concepto. Es punto en el que incide una crítica como la realizada por Kitcher (1975), quien se pregunta: «¿Cómo distinguimos entre aquellas propiedades de las entidades reflejadas las que reflejan la estructura del psiquismo de las que son accidentales?»

Por aclarar con un caso ejemplar geométrico, ostensivo: En la representación del concepto triángulo surgen tres tipos de propiedades:

a) las que reflejan la estructura que imponemos a la experiencia —las dadas por la forma *a priori* de nuestra sensibilidad—;

b) las determinadas por el concepto triángulo —en el que intervienen tener tres lados rectos, tres ángulos...—;

c) las que proceden de hechos accidentales en la construcción —ser escaleno, isósceles.., el color de los lados, su tamaño...—.

El argumento, claramente, es el mismo para cualquier otra representación de un objeto. Y ya aludí a un ejemplo establecido por Kant: dada la representación de un cuerpo ante el sujeto, se muestran, en él, elementos pertenecientes a lo conceptual, a lo sensible y a lo accidental. Es argumento, por ello, que no afecta tan sólo a la construcción ostensiva matemática, sino, más profundo, a la concepción epistemológica global kantiana.

Si se mantiene que hay propiedades empíricas irrelevantes en el objeto representado —las del tercer bloque—, es claro que ello se debe a que ya se es capaz de distinguir las propiedades accidentales de las que no lo son; es decir, somos capaces de distinguir las propiedades relevantes aun antes de ejecutar la construcción. Pero resulta que no se tiene esa capacidad de distinción hasta tanto no se haya efectuado la construcción. De aquí que, para Kitcher —y no sólo para él—, la epistemología kantiana se muestre circular o, más bien, antinómica.

Antes de pasar a esas requeridas precisiones, parece conveniente resaltar que, a pesar de estas dificultades, se encuentra una ventaja en la solución kantiana: la de resolver un viejo —pero también muy actual— problema, el de la aplicabilidad de la Matemática a la ciencia de la naturaleza. Problema insuperable para el racionalismo, por ejemplo: si las proposiciones matemáticas son verdaderas, necesarias y las empíricas contingentes, parecen situadas en mundos escindidos y, de aquí, la cuestión, permanente, de cómo enlazar ambos. En lo empírico no existen, por ejemplo, triángulos, ni rectas, ni números, ni masas puntuales con una aceleración dada... Y, sin embargo, es gracias a la Matemática como se llegan a constituir las disciplinas científicas que muestran una «sorprendente» capacidad aplicativa e, incluso, predictiva. El racionalismo tenía que acudir a un supuesto no muy racional, inconsistente con su propio punto de partida: la naturaleza está escrita en lenguaje matemático.

Kant no puede aceptar en modo alguno soluciones de este tipo, dado que la naturaleza es, para él, incognoscible. De aquí su intento de solución: como la Matemática estudia la forma de la intuición pura, que es la clave de la representación de lo singular, todo lo que se presente ante la sensibilidad tendrá que hacerlo, obligatoriamente, bajo las formas de la sensibilidad del sujeto cognoscente, espacio y tiempo. Toda representación fenoménica queda, por ello, bajo alguna propiedad matemática que es lo que expresa, abreviadamente, con el principio que califica de *Axioma de la intuición*, aunque posteriormente indique que, realmente, no es Axioma:

> todas las intuiciones son magnitudes extensivas [B 202].

Lo cual implica que conocemos la naturaleza, lo fenoménico, matemáticamente, según principios matemáticos. Conocimiento formal fenoménico junto al que hay que situar al que califica de dinámico: el que trata de la existencia de dichos fenómenos, por lo que esos principios dinámicos siempre quedarán afectados por lo accidental. Es el conocimiento, matemático, el conocimiento formal por el que todo conocimiento de la naturaleza tiene que venir regulado por leyes matemáticas. Con palabras kantianas, la Matemática

> reduce todos sus conceptos a intuiciones que puede ofrecer *a priori*, con lo cual se hace dueña de la naturaleza [B 753].

Incluso al tratar de la forma científica de todos los conocimientos de la razón, si se atiende al esbozo del plan completo de esos conocimientos enfocándolos como ciencia, lo hará Kant dividiéndolo

> matemáticamente de acuerdo con determinados principios [B 109].

División que volverá a realizar en su tabla de categorías, donde las de cantidad y cualidad siguen principios matemáticos porque, a la vez que ciertos de modo absoluto, son ciertos con evidencia intuitiva, mientras que las restantes categorías sólo gozarán de certeza discursiva.

Principios matemáticos que van más allá de su uso en la construcción matemática porque Kant los va a estimar como propios del entendimiento puro, constitutivos *a priori*. Por el contrario, a los principios derivativos, dinámicos, les asigna el papel de regulativos.

Principios del entendimiento puro en su relación con el conocimiento porque se apoyan, precisamente, en un término clave, «esquema», que ya ha surgido anteriormente:

> Los principios del entendimiento puro, sean constitutivos *a priori* (como los matemáticos) o meramente reguladores (como los dinámicos), no contienen sino el esquema, por así decirlo, de la experiencia posible [B 296].

Con esta concepción es claro que el conocimiento no es que sea matematizable con posterioridad a ser pensado —con expresión actual, nefasta—; es que, si es conocimiento, lo es porque ya viene constituido por principios matemáticos.

Cabría hacer, por ello, una afirmación tajante: para Kant, se conoce matemáticamente, se piensa derivativamente.

De aquí que cualquier disciplina científica, incluso la de las formas puras del pensamiento, para serlo, tenga que venir constituida por principios matemáticos. No hay, pues, aplicación de la Matemática al conocimiento de la naturaleza, sino constitución matemática de dicho conocimiento. Y, de aquí, la justificación kantiana de que sólo hay dos usos de la razón pura: el filosófico o pensar discursivo, derivativo, y el matemático o conocer constructivo.

He apuntado algunos problemas de distinto tipo pero que inciden, claramente, en la concepción kantiana de construcción y sus diferencias; en la universalidad exigida al conocimiento cuando, a la vez, se requiere la presencia de lo singular... Problemas que hay que analizar atendiendo, básicamente, a la noción de actividad del sujeto cognoscente junto a la modal de posibilidad lógica y enlace con lo real a través de esa acción, implícita en una acepción de la intuición...

Una intuición no pasiva, en Kant, como se ha ido resaltando permanentemente; y esto último sobre la base de algunas afirmaciones kantianas repartidas de vez en cuando, como en

> esa intuición apunta siempre al simple acto de construir el concepto [B 742].

Problemas que, de ser insolubles, de mantener la incoherencia señalada por Frege, la circularidad en términos de Kitcher, la oscuridad del papel que posee la intuición pura en palabras de Friedman, la fenomenología pictórico-visual de Strawson..., arruinarían una de las ventajas que muestra su constructivismo: la explicación de la aplicabilidad de la Matemática al conocimiento de la naturaleza. Más aún, además de mostrar esos fallos de la filosofía kantiana de la Matemática, mostrarían el fallo de su epistemología total.

Con lo cual vuelve a ser la Matemática la piedra de toque de esa epistemología y, con ello, de la posición crítica kantiana. Es la justificación de la afirmación que hiciera en la Introducción de que, si fallaba su concepción del hacer matemático, era su sistema total el que se venía abajo porque no podía dar cuenta —por incoherente, circular, antinómico...— de uno de los dos usos de la razón y, consecuente, de ninguno de los dos, por la interrelación que conllevan.

Conviene, por ello, detenerse con algo más de detalle en el proceso constructivo kantiano y observar dónde lo fundamenta, cómo establece su posibilidad. Si la Matemática es un conocimiento constructivo de conceptos, y construir es simplemente presentar la intuición *a priori* que corresponde a conceptos (B 741), hay que detenerse en cómo realiza tal construcción, en cuál es el modo epistemológico de la misma; en otras palabras, volver a plantear cómo es posible el conocimiento matemático.

Haciendo camino se irán aclarando, resolviendo e incluso disolviendo algunas de las dificultades antes señaladas sin necesidad ahora de ir indicando posibles réplicas puntuales a críticas como las anteriores.

2.3. LOS ESQUEMAS DE LA SENSIBILIDAD

El uso de la razón pura en la Matemática exige, por un lado, un proceso que consiga representar en la intuición sensible un posible fenómeno, un objeto concordante con el concepto que lo subtiende, de manera que dote a éste del carácter existencial, de contenido que el concepto en sí no posee. Es un uso de la razón pura propio del campo de la sensibilidad, y la necesidad que requiere el mismo de que intervenga en él una figura o una operación singular se debe a la condición epistemológica de obtener, en ese uso, conocimiento.

Por otro lado, y parafraseando a Aristóteles, no hay ciencia sino de lo universal, de lo general. Y la universalidad requerida en el conocimiento matemático era el segundo de los elementos problemáticos en la concepción kantiana, como lo había sido en los pensadores constructivistas anteriores comenzando, por lo ya indicado, por el intuicionista Descartes.

La construcción en la imaginación productiva es, siempre, la de una imagen singular, concreta; y el conocer matemático, en su construcción, pretende trascender tal concreción; no ver, en la misma, las notas accidentales, sino únicamente el objeto posible universal.

Kant pretende resolver esta dificultad y matizar, simultáneamente, la naturaleza del objeto figural requerido en la representación ante la intuición sensible, acudiendo a una noción que se mostrará problemática, pero que constituye una de las claves de su pensamiento: la noción de *esquema*. Noción problemática porque, para Kant, el esquema es un método, una regla o proceso constructivo que, sin ser objeto, permite como método construir objetos o símbolos cualesquiera de ciertos tipos definidos.

En la construcción matemática se presenta la intuición posible *a priori* correspondiente a un concepto. Esa representación es una figura, un símbolo, que el matemático traza, dibuja en la imaginación, en la pizarra o en el papel. Un trazado, un dibujo que cabe repetir en cada ocasión, en cada momento en que el matemático se ponga a su hacer. Repetición que, aunque cada figura concreta sea diferente de las antes trazadas, de las elaboradas por distintos sujetos o con distintos medios materiales, de las que puedan trazarse en el futuro, muestran una forma idéntica en todas las ocasiones. Forma idéntica porque esa representación responde a una regla o método único; responde al esquema propio de ese tipo de figura —o de operación—.

Es por lo que en esa representación la figura, el símbolo quedan, para el matemático, trascendidos ya que el proceso matemático, en realidad, lo que maneja no es la figura o la operación sensible en sí, sino el esquema que los posibilita. Las representaciones singulares, según Kant, no son más que la plasmación singular de los esquemas, de unas reglas o métodos universales, generales, que el sujeto cognoscente posee, al igual que lo poseen algunos conceptos, aquellos que son representables en la intuición sensible y que, para Kant, son los que manifiestan, precisamente, las categorías de la magnitud, del *quantum*.

Las imágenes singulares no son más que la materialización en la imaginación sensible de los esquemas de la sensibilidad y los esquemas de los conceptos puros. Un concepto como «triángulo» conlleva en sí el esquema de la sensibilidad que provoca el trazado del mismo, la elaboración de una figura de tres lados, tres ángulos..., figura que se traza y se borra y vuelve a dibujar... con unas u otras particularidades accidentales, no relevantes sino para cada una de tales figuras imaginadas o representadas, pero no para el esquema en sí.

Ya he citado que, si los principios del entendimiento puro son para Kant constitutivos *a priori* para la construcción de la matemática, lo van a ser porque contienen meramente el esquema de la experiencia posible. Es en el esquema donde se incardina la concepción kantiana de que la Matemática es, por un lado, proceso constructivo; por otro, donde se plasma su afirmación de que la matemática trate de objetos o símbolos posibles. Precisamente tales objetos son posibles con posibilidad no formal o lógica pura, sino con posibilidad real, lógico-trascendental, porque no son más que esquemas que encuentran su realización material, real, en el acto constructivo a través de los fenómenos mostrados ante la sensibilidad, fenómenos que son conformados por dichos esquemas para dotar de contenido material a los esquemas conceptuales correspondientes.

Si en la construcción matemática se va más allá del método analítico conceptual, por un lado, y, por otro, se obtiene la universalidad del conocimiento a partir de lo singular, el llegar al concepto, es porque en esa construcción se agrega en una intuición sensible la diversidad perteneciente al esquema de un objeto matemático en general. Es el procedimiento, dirá Kant, por el que se obtienen las proposiciones sintéticas universales (B 746).

Y aquí sí tiene su papel la intuición sensible pura, en el sentido de que la figura singular, concreta, material, es el resultado del esquema y no el origen del mismo. Resultado que exige, precisamente, de esa intuición sensible, pero ahora no empírica.

El esquema es el que media entre la intuición y el concepto, entre lo singular de la representación visual, de la imagen, y la universalidad exigida en el concepto. Como elemento mediador, el esquema trascendental es puro, es decir, libre de todo elemento empírico y, a la vez, intelectual y sensible.

Producto de la imaginación, pero no pudiendo existir más que en el pensamiento, el esquema presenta dos papeles:

a) Por un lado, es el conjunto de condiciones formales de la sensibilidad que han de poseer los conceptos puros *a priori* para que puedan ser aplicados correctamente; es la condición formal y pura de la sensibilidad a la que se halla restringido el uso de los conceptos del entendimiento (B 179).

b) Por otro lado, el esquema es un método, un procedimiento universal de la imaginación productiva para suministrar una imagen a un concepto.

Dos aspectos diferentes de un mismo proceso constructivo, de un mismo producto de la imaginación. En *a)*, el esquema constituye, realmente, un criterio para la aplicación de conceptos; en *b)*, unas reglas del entendimiento como síntesis productiva de la imaginación (B 180).

Si gracias al esquema se procura una imagen a un concepto, no puede identificarse esquema e imagen visual o representación fenoménica pictórica. Dirá Kant:

> si escribo cinco puntos seguidos ..... tengo una imagen del número cinco. Si, por el contrario, pienso simplemente un número en general, sea el cinco, sea el cien, tal pensar es un método para representar, de acuerdo con cierto concepto, una cantidad (mil, por ejemplo) en una imagen, más que esa imagen misma... [B 179].

Ninguna imagen se adecuaría al concepto en general porque no alcanza la universalidad que éste posee. Universalidad del concepto que hace que sea válido en todas las imágenes, singulares, asociadas al mismo. El esquema triángulo, como método o regla de la síntesis respecto a figuras puras en el espacio (B 180), se materializa en una u otra imagen, en una u otra figura particular y concreta; pero, por esquema, por método, hace que el concepto triángulo sea válido en relación no ya con esas figuras trazadas o con esas imágenes visuales, sino con todas las figuras de triángulos, sean éstas, en su representación imaginativa singular, concreta, isósceles, escalenos, rectángulos...; vengan trazadas en el papel o en la pizarra con color blanco o negro...

El esquema, como regla de síntesis, provoca el acto de la representación que se materializará en muy distintas singularidades. De ahí que el matemático no se detenga a analizar o derivar conceptualmente, sino a producir, a través del esquema, los elementos materiales asociados al concepto, procurando proporcionar el contenido objetivo que el mismo, por sí, no tiene.

Frente a un juicio puramente existencial, que caería bajo el ámbito del pensamiento puro con sólo posibilidad lógico-formal, el juicio matemático supone establecer, simultáneo, un criterio operativo de dicho juicio. Intentando aclarar, desde una posición kantiana, lo antes dicho con un caso de matemática más actual: un principio como el Axioma de elección tendría que contener, para ser admisible como juicio matemático, como juicio sintético *a priori*, un criterio que permitiera establecer al menos una función de elección al ser formulado. Función de elección que, en este caso, constituiría el objeto singular, concreto, asociado al principio de elección, enfocado, así, como principio que posee la condición del esquema correspondiente.

El esquema para conceptos —como «gato»— es la regla que sintetiza la experiencia visual de los datos sensibles y el concepto. El concepto «gato» no es más que un método operativo conforme al cual la imaginación es capaz de dibujar la figura, la imagen visual de un gato, sin quedar limitada, además, a dicha figura singular.

> la *imagen* es un producto de la capacidad empírica de la imaginación productiva; el *esquema* de los conceptos sensibles (como el de las figuras en el espacio) es un producto y un monograma, por así decirlo, de la facultad imaginativa pura *a priori* [B 181].

De aquí que cada imagen visual, distinta del esquema, pueda mostrar los hechos dictados por éste y pueda vincularse al concepto aunque, en sí misma, no coincida con el concepto. Si bien hay que observar que el esquema de un concepto del entendimiento puro puede no ser llevado a imagen alguna.

En este punto, hay que hacer alguna precisión: los esquemas de los conceptos puros del entendimiento son las condiciones que hacen que tales conceptos se puedan referir a objetos y, por ello, posean significación, aunque ésta —si se elimina toda condición sensible— se queda en la puramente lógica de la unidad de las representaciones. Es por ello por lo que, eliminada esa condición sensible, no se pueda atribuir objeto alguno a esos conceptos y, por tanto, no pueda suministrar conocimiento alguno. Consecuentemente para Kant, y desde la Lógica trascendental, las categorías, en cuanto condiciones de una experiencia posible, deben tener tan sólo un uso empírico. Y es aquí donde intervienen los esquemas de la sensibilidad.

Los esquemas de la sensibilidad son los que realizan y, a la vez, restringen a los del entendimiento puro al atender a las condiciones de la sensibilidad porque, en el fondo, tales esquemas se reducen al fenómeno o concepto sensible que concuerde con la categoría que lo hace posible. Si se prescinde, pues, de los esquemas de la sensibilidad, las categorías se reducen a simples funciones intelectuales relativas a conceptos, pero sin representar objeto alguno. Tal significación les viene de la sensibilidad, la cual, al tiempo que restringe el entendimiento, lo realiza (B 187).

Si el esquema es el mediador, como criterio o regla, entre intuición y concepto y, con ello, el que dota de universalidad al elemento singular que representa, como imagen, el concepto al cual se adecua, el esquema ha de cumplir un requisito fundamental: ser homogéneo entre la categoría del entendimiento y el fenómeno entre los que media.

Desde este requisito, los esquemas para los conceptos matemáticos van a ser las reglas para la representación de los objetos bajo las formas puras de la sensibilidad, espacio y tiempo. Las construcciones matemáticas —la representación de los objetos corrrespondientes al concepto— han de caer bajo los esquemas de la sensibilidad y establecer las síntesis productivas de la imaginación.

Son los esquemas los que, por un lado, al generar los conceptos matemáticos, los hacen posibles y, por otro, al producir el objeto adecuado, los hacen significativos con validez objetiva. Bien entendido que, en Kant, esos esquemas vienen condicionados —más bien constituidos, siempre— por las formas de la sensibilidad del sujeto cognoscente.

Los esquemas en el campo matemático, por ser reglas de la síntesis productiva de la imaginación, por ser métodos, exigen, en cualquier caso, la imprescindible actividad de la construcción en la intuición pura. Actividad que requiere, para ser llevada a cabo, de las condiciones formales constitutivas de la sensibilidad del sujeto cognoscente, es decir, suponen el previo dato constitutivo del espacio y el tiempo. El primero, para tener la posibilidad de construir las figuras; los dos, para la posibilidad de construir los símbolos que representan las magnitudes. En otras palabras, para poder realizar las construcciones ostensiva y simbólica en las que se concentra el hacer matemático y, mediante esa construccción, dotar de validez objetiva al mismo.

Además, la homogeneidad requerida por el esquema como mediador es la que obliga, realmente, a diferenciar las construcciones matemáticas en ostensiva y simbólica, a diferenciar la Geometría del Álgebra y la Aritmética. Es la homogeneidad, ligada a la dicotomía de las facultades de la sensibilidad, la que fundamenta la división de los procesos constructivos matemáticos en los dos indicados: ostensivo y simbólico.

2.4. CONSTRUCCIÓN OSTENSIVA: GEOMETRÍA

1. Para Kant, la Geometría es la ciencia de la extensión (B 204). Pero ya he indicado que, como conoci-

miento constructivo, se centra en determinar una intuición *a priori* en el espacio. Intuición *a priori* de figuras que indica que la Geometría trata no de las magnitudes en general, en cuanto magnitudes, sino única y exclusivamente de las extensivas (*quanta*). Entendiendo por magnitud extensiva aquella

> en la que la representación de las partes hace posible —y, consiguientemente, precede necesariamente a— la representación del todo [B203].

Así, si pienso una línea, dirá Kant,

> soy incapaz de representarme una línea, por pequeña que sea, sin trazarla en el pensamiento, es decir, sin producirla gradualmente a partir de un punto [íd.].

Un proceso sucesivo que genera la magnitud extensiva y, con ello, la representación de la misma, no puede ser analítico; como proceso exige del acto que permite la aprehensión mediante una síntesis sucesiva (la de una parte a otra).

Es el fundamento que justifica la obligatoriedad del proceso constructivo geométrico dado que la Geometría es la disciplina que abarca el conocimiento de esas magnitudes extensivas que incardinan, en sí, la aprehensión sintética. Es en la síntesis sucesiva de la imaginación productiva en la que se apoya la Geometría con sus axiomas para trazar las figuras bajo la forma pura de la sensibilidad correspondiente, el espacio.

Síntesis sucesivas que justifican que los esquemas, en este terreno, muestren los dos papeles que poseen en su caracterización general: por un lado, establecen el objeto posible al concepto, es decir, lo dotan de significación, con validez objetiva; por otro, permiten generar el concepto mediante el proceso constructivo a partir de fenómenos externos.

Este último papel es factible ya que hay que tener presente que, para Kant,

> todos los fenómenos son magnitudes, magnitudes extensivas, ya que, en cuanto intuiciones en el espacio y el tiempo, deben ser representados mediante la misma síntesis que determina el espacio y el tiempo en general [B 203].

Y es el último papel atribuible al esquema el esencialmente constructivo en el sentir kantiano de que el matemático no parte de conceptos sino que llega a ellos mediante su construcción. Y llega a esos conceptos gracias a la construcción mediada por el esquema.

Es el esquema como criterio o regla el que permite la síntesis sucesiva de la imaginación que conduce a la representación de figuras singulares, concretas, mientras que la construcción ostensiva en la que se materializa el esquema tiene por objeto enlazar la figura material, que viene representada por el método que es, con la forma de esa figura que ese mismo método produce.

La forma es lo primero que se exige en el uso trascendental de un objeto; forma que, en segundo lugar, tiene que materializarse en algún fenómeno empírico, sensible. De esta manera, el proceso constructivo en la imaginación constituye una condición necesaria para suministrar el objeto a un concepto, y ello exclusivamente *a priori*; pero esa construcción sería insuficiente si no se materializa de modo empírico en alguna figura sensible asociada, asociación que procura la condición existencial básica, no incluida en el concepto puro.

Bien entendido que la imagen no es más que una instanciación sensible condicionada precisamente por el esquema asociado al concepto como método. Y es aquí donde cobra sentido la afirmación kantiana de que todo conocimiento se refiere, en última instancia, a intuiciones posibles; intuiciones posibles de fenómenos, no de cosas en sí. Es el esquema el proceso productivo de todas y cada una de las posibles figuras sensibles que dan la materialización del concepto.

Resaltando esta concepción, cabría argumentar que, para Kant, la Geometría como ciencia de las magnitudes extensivas espaciales, más que ser ciencia de las figuras en la forma espacial de la sensibilidad, es la ciencia de los esquemas ostensivos, de los métodos constructivos asociados a tales magnitudes, que se materializan en figuras. Ciencia de esquemas con su posible materialización singular que sólo cuando se lleva a efecto se hace conocimiento.

Es la concepción de esquema, según esto, en la construción ostensiva, la que da auténtico sentido al método geométrico como opuesto al filosófico o derivativo de conceptos. Porque en el método geométrico no se trata de inspeccionar la figura producida por el esquema y obtener, de esta inspección, las notas de dicha figura a través de la intuición sensible. Esto último no sería otro proceso que el resolutivo o analítico por el que alcanzar las notas que posteriormente se pueden predicar de la figura; proceso desde el cual tendría sentido plantear la cuestión de qué notas considerar relevantes y cuáles accidentales: porque sería la figura concreta, material, lo que se tendría como punto de partida. Proceso que, desde la interpretación dada de la noción de esquema, se hace insostenible, por enfoque inverso al auténtico proceso matemático. En éste no se parte de la figura concreta, sino que se llega a ella a partir del esquema. De aquí que, como Kant advierte, el geómetra no adscribe a la figura nada salvo lo que se sigue necesariamente de lo que él mismo ha puesto en ella, y de acuerdo con su concepto.

Con lo cual, y se vuelve a insistir, frente a interpretaciones críticas como la citada de Kitcher, el método geométrico no se centra en venir guiado por lo accidental que pueda poseer la imagen representada, singular, propia de cada instanciación del esquema, sino que la esencia del método matemático, lo que da la clave del razonamiento geométrico, es que el geómetra, con ese método, no se dedica a

> indagar lo que veía en la figura o en el mero concepto de ella y, por decirlo así, leer, a partir de ahí, sus propiedades, sino expresar éstas *a priori* por medio de lo que él mismo pensaba y exponía (por construcción) en conceptos. Advirtió también que, para saber *a priori* algo con certeza, no debía añadir a la cosa, sino lo que necesariamente se seguía de lo que él mismo, con arreglo a su concepto, había puesto en ella [B XII].

Un poner dado por el esquema que hace que esa implicación necesaria no sea de lo accidental que cabría «ver», psicológicamente, en la figura. Lo cual significa, claramente, que, aunque la demostración matemática se apoye en la figura, lo hace con validez universal, no contingente. En otras palabras, es el uso constructivo de la razón pura, como tal, lo que hace sintético y universal al razonamiento matemático y no el empleo de figuras materiales, concretas como ayuda a la imaginación sensible. Aunque, como ya he afirmado, esta ayuda pueda ser, en algún momento, de utilidad heurística.

2. Los esquemas constructivos ostensivos han de venir establecidos por las condiciones formales de la sensibilidad, es decir, por los modos en que los mismos pueden ser construidos. Y esos modos o condiciones, que obligan a no hacer uso alguno de propiedades distintas de las que la figura como esquema posee, van a venir dados, precisamente, por los axiomas geométricos.

Había indicado: la Geometría o matemática de la extensión, *con sus axiomas*. Y ello porque la Geometría, para Kant, se constituye por sus axiomas. Y esta consideración la estimo fundamental.

Kant dará a los axiomas geométricos un papel especial, afirmará que son los axiomas

> los que expresan las condiciones de la intuición sensible *a priori* bajo las cuales, y sólo bajo las cuales, puede surgir el esquema de un concepto puro de los fenómenos externos [B 204].

Y los axiomas que Kant agrega en la cita anterior como ejemplos propios de la Geometría, por referidos propiamente a magnitudes extensivas (*quanta*), son: entre dos puntos no puede haber más que una línea recta; dos líneas rectas no cierran un espacio.

Subrayo: son los axiomas de la Geometría los que establecen las condiciones para que puedan surgir los esquemas de los conceptos asociados a fenómenos externos. Y esos axiomas

> tienen que ser proposiciones sintéticas *a priori* [íd.]

y, por tanto, universales. Por axiomas, inmediatamente ciertas, *indemostrabilia*, escribirá Kant. Y la razón estriba en que el papel del juicio sintético *a priori* que supone el axioma es el de generar, producir el esquema conceptual mismo. Generación que, por ello, no puede identificarse con un proceso deductivo, con una deducción lógico-formal perteneciente al plano de la lógica general pura y que partiría del concepto que, aquí, todavía es inexistente. El plano lógico-formal, una vez más, marginado mediante la lógica trascendental; marginación avalada al señalar que los axiomas, como el resto de los juicios matemáticos, no pueden ser analíticos. Analiticidad que podría, entonces, ser conducida mediante la deducción formal.

Aunque Kant diferencia entre Axioma y postulado, afirmando que éste es una proposición práctica, concede a los dos el mismo estatuto de *indemostrabilia*. Y lo concede porque tanto el axioma como el postulado matemático son juicios sintéticos *a priori*. Así, sostendrá esa indemostrabilidad haciendo referencia a una proposición como el Postulado 3 de los *Elementos* euclídeos. E insistirá —aun cuando aquí se limite a los postulados, que también intervienen en Geometría—:

> lo que en matemáticas se llama postulado es una proposición práctica que no contiene más que la síntesis a través de la cual nos damos un objeto y producimos un concepto. Por ejemplo, describir un círculo con una línea dada, partiendo de un punto dado, en un plano. Semejante proposición no puede demostrarse, ya que el procedimiento que exige es precisamente el medio a través del cual producimos el concepto de esa figura [B 287].

Cabe observar, en este punto, los ejemplos que Kant aporta de la Geometría en cuanto a los axiomas. A los antes mencionados —entre dos puntos no puede haber más que una línea recta; dos líneas rectas no encierran un espacio— hay que agregar el que formula como «tres puntos están situados en un plano» y el que está implícito en el ejemplo señalado en la construcción, no demostración, de que la suma de los ángulos de un triángulo es dos rectos, el Axioma V euclídeo. Aunque en la cita anterior lo señale como postulado geométrico, también entra aquí el postulado 3 de los *Elementos* de Euclides: describir un círculo de radio dado con centro un punto cualquiera del plano.

Agrupándolos se observa que son los que caracterizan el espacio métrico euclídeo. Con una observación, en Euclides aparecen como postulados y ello porque constituyen auténticas reglas constructivas, lo que se refleja en el propio lenguaje de trazar, describir, construir...

Ese espacio que caracterizan los postulados, tomados globalmente, Kant lo trasvasa y toma como constitutivo de una de las formas puras, el espacio, de la facultad del sujeto cognoscente, de la sensibilidad. Con lo cual podría afirmarse que son los postulados los que constituyen o conforman no ya el espacio métrico euclídeo, sino al propio sujeto cognoscente. Su creencia en que no puede hablarse más que de fenómenos y no de la cosa en sí, motivo de ese trasvase a la constitución del sujeto cognoscente, le conduce a afirmar:

> El espacio es una necesaria representación *a priori* que sirve de base a todas las intuiciones externas. Jamás podemos representarnos la falta de espacio, aunque sí podemos muy bien pensar que no haya objetos en él. El espacio es, pues, considerado como condición de posibilidad de los fenómenos, no como una determinación dependiente de ellos, y es una representación *a priori* en la que se basan necesariamente los fenómenos externos [B 38-39].

Gracias a esa forma se posibilita la experiencia externa, sólo factible mediante la representación correspondiente que no procede de los fenómenos, sino del elemento constitutivo del sujeto cognoscente. Y gracias a esa representación es posible la Geometría; una determinada Geometría, hay que agregar: la Geometría resultante, aceptados los axiomas euclídeos, no puede ser otra que la métrica euclídea.

Lo que me interesa destacar es que Kant atribuye a esos axiomas ser las condiciones bajo las cuales pueden surgir los esquemas de los conceptos puros de los fenómenos externos, que han de darse en ese espacio. Algo que, en otras palabras, podría interpretarse como la afirmación de que son los axiomas los elementos constitutivos del espacio, y ello porque tales axiomas lo que hacen es caracterizar un espacio con unas propiedades muy especiales como son la de ilimitación, isotropía, homogeneidad. Como tal, esos axiomas posibilitan única y exclusivamente construcciones propias del mismo, las únicas captables en la experiencia posible que determinan tales constituciones. Bien entendido que esos elementos constitutivos no lo son, en Kant, de un espacio como objeto o como concepto, sino constitutivos del sujeto cognoscente.

De esta forma, lo que hacen los axiomas es caracterizar un terreno de juego y, ya en él, no pueden realizarse más que las construcciones que sigan las reglas del juego establecidas. Reglas de juego, en su aspecto regulativo, que también establecen, simultáneamente, los axiomas, comportando las condiciones de los esquemas que, de esta manera, regulan los procesos constructivos.

Constituido un campo de juego, un espacio como condición de posibilidad de jugar en él, de representar cierto tipo de fenómenos, figuras geométricas, se pueden realizar en su interior las representaciones posibles que se establezcan en dicho campo y no en otros. No es obligatorio, ciertamente, jugar; pero, si se juega, hay que hacerlo siguiendo, siempre, las reglas establecidas. Posibilidad de construir, entonces, la Geometría, posibilidad establecida por los esquemas. Y los esquemas, por tanto, se muestran como los métodos o reglas que materializan el juego, construyen los fenómenos, las figuras adecuadas y propias en el interior del campo. Figuras, naturalmente, de ciertos tipos: rectas, triángulos, circunferencias, ejes radicales, cuádricas....

En cuanto a sus múltiples concreciones, múltiples campos de juego establecidos en distintos lugares, poseerán notas accidentales. Accidentales por el mero hecho de las condiciones de posibilidad, por el mero hecho de la caracterización del espacio en el que se producen. Espacio o condiciones de posibilidad que sólo tienen que tener presente sus notas relevantes: las dadas por los axiomas, y que son las que, por modo exclusivo, expresan las de las magnitudes extensivas espaciales. No pueden entrar, por ello, en consideración lo que cabría estimar, ya desde Galileo, como cualidades secundarias.

Y si he señalado que los axiomas no sólo son constitutivos del espacio, de las condiciones de posibilidad de los fenómenos, también he indicado que, al fijar las condiciones en las que pueden producirse y manifestarse los fenómenos, esos Axiomas permiten simultáneamente la elaboración o construcción de figuras, la atribución de unas u otras propiedades, de unas u otras posibles relaciones a las mismas. Es lo que cabría considerar como papel regulativo de los axiomas.

Elaboración que no tiene más remedio que efectuarse mediante procesos constructivos, condicionados siempre por los axiomas constitutivos del espacio —de las condiciones de la intuición sensible del sujeto cognoscente— y, a la vez, regulativos del mismo. Procesos constructivos que, por otra parte, son los que aparecían ya en los *Elementos* de Euclides y que Kant no hace más que reformular en su lenguaje de Lógica trascendental.

Si se vuelve al caso paradigmático de la demostración-construcción de que la suma de los ángulos de un triángulo plano es dos rectos, podrá observarse que el matemático, a partir de un vértice, prolonga un lado, pero esa prolongación, que es algo que se agrega al dato constructivo inicial del triángulo, viene regulada precisamente por el Postulado 1, que es el que permite la prolongación de una recta ilimitadamente... De la afirmación de que los ángulos alterno-internos sean iguales ya advertí en el parágrafo de las dificultades que Kant no daba justificación alguna, pero ésta viene establecida precisamente por la homogeneidad del espacio. Homogeneidad regulada por los Postulados IV y V y que es la que establece la invariancia de la traslación y de la simetría respecto a un punto (el giro)...

Son las condiciones de posibilidad de los fenómenos métrico-euclídeos o, en otros términos, la constitución del espacio por los axiomas, los que justifican o fundamentan el proceso demostrativo constructivo del geómetra. Con una observación, no hay, en ese proceso, derivación «silogística», formal alguna: desde la perspectiva en la que se sitúa el matemático constructivista, los axiomas únicamente dan las condiciones de posibilidad, no se traducen a proposiciones formales de las que ir derivando, mediante el establecimiento de unas reglas, las diferentes proposiciones calificadas de teoremas. Desde esta última postura, un constructivista plantearía, en cualquier caso, el origen y papel, el fundamento epistemológico de dichas reglas...

Lo cual no impide, por otro lado, que alguno pueda entretenerse en «traducir» este proceso demostrativo-constructivo a mera derivación formal sintáctica. Mero juego sígnico a realizar, por supuesto, una vez que se haya obtenido la construcción anterior, por lo que, no sólo como juego, tal traducción es siempre secundaria al auténtico proceso constructivo matemático...

Todo lo anterior constituye una formulación creo que absolutamente correcta del método axiomático euclídeo. Lo que ocurre es que Kant estima que las condiciones caracterizadoras de un determinado espacio y, con él, de una determinada Geometría, son propias no de ese espacio, sino del sujeto cognoscente.

Si se marginara de esta atribución, y desde este enfoque, podría afirmarse que lo que Kant llama «reglas de síntesis de la imaginación productiva» no es otra cosa que el equivalente a los procesos constructivos euclídeos. Procesos que requieren de la particularización, es decir, de la representación de una figura singular o de un símbolo concreto sobre el cual realizar el proceso constructivo; al finalizarlo, se llega a una universalización indicando que la figura, el símbolo concreto, encierran en sí la generalidad del concepto asociado a la misma.

Proceso constructivo euclídeo con sus fases de particularización —o dato sensible singular—, construcción y universalización que es lo que Kant va a encerrar bajo su noción de esquema. La función de la imaginación productiva se centra en llevar a cabo ese proceso, es decir, en poder trazar, como método, como regla, líneas que permitan elaborar figuras —sometidas a la constitución del espacio euclídeo—. Líneas sensibles pero en las que importan muy poco las notas accidentales de su concreción singular porque lo que representan, más que la figura, es el esquema que las produce.

Kant aduce un ejemplo, como:

> Si afirmo que con tres líneas, de las cuales dos juntas son mayores que la tercera, se puede trazar un triángulo, tengo la simple función de la imaginación productiva, la cual puede trazar las líneas mayores o menores, al igual que puede hacerlas cruzar según todos los ángulos que quiera [B 205].

Ejemplo que no es otro que el de las condiciones para la construcción de un triángulo. Condiciones que cabe establecer gracias, precisamente, a la posibilidad de trazar unas u otras líneas, mayores o menores... y, con ellas, construir un triángulo. No sólo nos da la construcción *del* triángulo, de cualquier triángulo, sino que se va más allá porque ese proceso permite ser convertido en un método heurístico que conduce a «ver», dirigido por la representación fenoménica, los distintos casos de construcción de triángulos planos. Visión que, de inmediato, quedaría marginada de su papel heurístico en el sentido de que, al realizarla, los distintos casos de construcción se encuentran contenidos en la concepción de triángulo y, por ello, son los que han posibilitado dicha representación. No se ha obtenido más que lo contenido en el concepto...

3. Quiero indicar que en la argumentación kantiana se puede ir más allá de lo que explícitamente afirma. Al plantear la posibilidad constructiva a través del esquema como método, como regla que contiene y manifiesta la representación de alguna imagen, permite ir guiado en la construcción por las notas fenoménicas de las figuras esquematizadas. Un ir más allá con lo que se consigue elaborar, producir o construir nuevos conceptos que, por venir establecidos a partir de la construcción mediada por el esquema, muestran su universalidad.

Y es, creo, la clave de la posición kantiana de alcanzar el concepto geométrico a partir de lo singular. Y no sólo alcanzar el concepto, sino establecer relaciones y clasificaciones de los mismos —es decir, conceptualizar, enjuiciar, razonar—. Y es lo que considero que pone de relieve el ejemplo kantiano en la construcción de la proposición de que la suma de los ángulos de un triángulo es dos rectos.

De aquí la reafirmación de que los esquemas, en Kant, y en cuanto a la construcción ostensiva, posean los dos planos señalados: producir o generar conceptos a partir de fenómenos; aplicar conceptos, por suministrar las representaciones concordantes. En otras palabras, son los esquemas de la sensibilidad, en este caso ligados a las magnitudes extensivas, los que para Kant contribuyen, por un lado, a dar realidad a los conceptos —plano existencial, presentando objetos posibles, fenómenos ante la sensibilidad— y, por otro, a generar conceptos —por provocar una representación rigurosa de los mismos—.

En la construcción ostensiva, y mediante el esquema en sus dos funciones, se tiene, así, tanto la universalidad de la Geometría, como el fundamento de la posibilidad de la misma, la explicación —desde la Lógica trascendental— del origen, amplitud y validez objetiva de los modos del conocer geométrico. Ello supone, a su vez, la pretensión kantiana de diferenciar, nítidamente, la imagen singular fenoménica, singular, concreta, del esquema o regla, método constructivo que permite, precisamente, elaborar la imagen en la intuición sensible pura. Método, o regla, el esquema, por el que, a la vez, se dota de carácter existencial a los conceptos posibles.

Método, el esquema, que se obtiene de unos primeros principios constitutivos de la razón, los axiomas, únicos de los que pueden surgir. Se tiene plasmada, aquí, la misma arquitectónica que expusiera como propia de la razón poética Gianvincenzo Gravina...

4. Mediante la construcción ostensiva la Geometría, como ciencia de la magnitud extensiva espacial, se constituye en disciplina cognoscitiva y hace referencia a unos fenómenos posibles, objetos o figuras contenidos en el espacio. Espacio y objetos en él construidos fundamentados en la facultad de la sensibilidad a través de la forma del mismo. Es el espacio el que

> constituye una condición formal *a priori* de la experiencia externa [B 271],

por lo cual la síntesis constructiva por la que se crea la figura en la imaginación es exactamente la misma que la que se practica en la aprehensión de un fenómeno para formar de él un concepto empírico (íd.) pero, a la vez, aplicado en cuanto a su uso a la experiencia. Aparece, aquí, y una vez más, el manejo de lo que en su momento calificara como principio de apriorismo.

Y como

> la intuición empírica sólo es posible mediante la intuición pura (del espacio y del tiempo) [B 206],

resulta que lo que la Geometría afirma en la intuición pura es válido para la empírica. De aquí que los objetos presentes a los sentidos tengan que conformarse a las reglas de construcción del espacio. Espacio que se muestra con validez objetiva, condicionada por la validez, precisamente, de la Matemática. Que, por ello, regula todos los fenómenos bajo la categoría de magnitud extensiva; consecuentemente, todas las ciencias de la naturaleza que son las que caen bajo este tipo de magnitud.

5. Espacio que viene tanto constituido como regulado por los axiomas —juicios sintéticos *a priori*—: los axiomas fijaban las condiciones necesarias y suficientes para el esquema y, con ello, para la propia construcción ostensiva de los objetos correspondientes, las figuras y sus relaciones, en ese espacio. De tal manera que la construcción ostensiva geométrica trataba no de los objetos concretos en sí, sino de los objetos posibles. Un trato en la intuición sensible pura que convertía a la Geometría en un conocimiento *a priori*.

La Geometría se ha mostrado, por todo lo anterior, y reitero, como ciencia de esquemas figurales correspondientes a las magnitudes extensivas espaciales y no como un cuerpo de proposiciones derivativas lógico-formales que parten de unos primeros principios adoptados como premisas para obtener conclusiones mediante un proceso estrictamente derivativo, analítico.

El razonamiento matemático, en cuanto geométrico, no puede equipararse a razonamiento lógico-formal porque, en él, se hace uso de la sensibilidad a partir de los esquemas que son los que dotan de carácter existencial a los conceptos que se manejan y, a la vez, producen la síntesis de los distintos actos iterativos, de la sucesión que compone la propia demostración matemática.

Todo ello implica que el método geométrico, frente al lógico-formal, al filosófico, constituye una construcción, apoyada en la intuición pura, en la representación directa en cada caso de un fenómeno que plasma las condiciones necesarias inherentes al esquema, a lo puesto por el sujeto en el concepto. Representación directa y no a través de procesos analíticos conceptuales, no a través de notas predicativas que del mismo puedan realizarse, ni de sus relaciones con otros fenómenos.

Razonamiento como proceso constructivo sintético que, como ya se ha señalado, requiere una iteración de síntesis sucesivas, donde en cada una de ellas se agregan nuevos elementos no dados en las anteriores. Un agregar elementos —siempre en el terreno de juego constituido y regulado por los axiomas, por las condiciones de posibilidad de los fenómenos— que no puede venir establecido desde la Lógica general pura, según Kant.

6. Con ello creo que se tiene una caracterización muy adecuada del proceso constructivo calificable de hacer figural, de las magnitudes extensivas espaciales propio de la Geometría; con la salvedad, tantas veces reiterada, de que Kant lo aplica al sujeto cognoscente.

Sin embargo, para algunos intérpretes, este tipo de construcción es criticado porque, desde él, se considera imposible su formalización salvo como mero juego secundario según indiqué. Mero juego que no se estima como tal, sino como el elemento básico como el desarrollo de la Lógica formal, desde Frege, ha puesto de manifiesto. Inversión de papeles porque, desde esta Lógica, lo que es secundario es el proceso constructivo kantiano que, ahora sí, cabe admitir como mera ayuda heurística, como soporte psicológico que conviene suprimir desde el plano formal puro. Con ello se ha pasado al centro de la polémica de si el razonamiento matemático es reducible o no al lógico puro.

Desde la posición logicista y formalista los juicios matemáticos, sintéticos *a priori* para Kant, se pueden demostrar en el interior de sistemas formales, en particular de los sistemas formales lógicos de primer o segundo orden y, por ello, son analíticos. Es lo que parece venir asegurado desde esa Lógica matemática o Lógica simbólica.

En ella es claro que no hace falta figura geométrica alguna y, por tanto, el esquema como método inherente a la construcción ostensiva. Desde Russell, es la posición ortodoxa, en línea con *Los fundamentos de la Geometría* de Hilbert de 1899.

Al reducirse la Geometría a Análisis, no se requiere de lo figural sensible. Al reducirse el Análisis a Lógica, consecuente, las demostraciones matemáticas geométricas se pueden presentar como meras cadenas inferenciales de estructura lógica.

Se puede mostrar la afirmación anterior realizando, mostrando, la derivación formal en la Lógica de primer orden de la proposición que se adoptó como paradigmática del razonamiento constructivo matemático en el caso de la Geometría. La proposición de que la suma de los ángulos internos de un triángulo plano es dos rectos.

Sean los predicados Txyz, Rxy y el operador *(xyz). Se pueden leer, en beneficio del lector, como «x,y,z son los ángulos de un triángulo», «x,y son ángulos alterno-internos», «la suma de x,y,z», respectivamente. Es lectura, por supuesto, innecesaria desde el interior del sistema formal de primer orden.

Aceptamos una constante «r» que cabe leer, desde la ayuda anterior, como «dos rectos». Igualmente aceptamos, como hipótesis, las fórmulas Ax que expresan los axiomas geométricos. Aceptación que indicaría que la demostración es condicional en el sentido de que la conclusión se obtiene a partir de dichos axiomas. Con estas condiciones, la derivación formal vendría dada por la sucesión siguiente donde «a», «b», «c» denotan variables de individuo y no constantes y donde no indico, como es ayuda tradicional en este tipo de demostraciones, las reglas de instanciación universal, instanciación existencial, empleo del *modus ponens*, teorema de deducción, descarga de hipótesis... Como en cualquier texto de Matemática, el lector suplementará tales indicaciones auxiliares que son mera ayuda justificativa de los pasos que se van dando para obtener la sucesión-derivación formal:

1. $(x)\,(y)\,(z)\,(\mathrm{Txyz} \rightarrow \mathrm{EuEv}(\mathrm{Ryu}\ \&\ \mathrm{Rzv}\ \&\ {*}(\mathrm{xyz}) = \mathrm{r}))$
2. $(x)\,(y)\,(\mathrm{Rxy} \rightarrow x = y)$
3. $\mathrm{Tabc} \rightarrow \mathrm{EuEv}(\mathrm{Rbu}\ \&\ \mathrm{Rev}\ \&\ {*}(\mathrm{auv}) = \mathrm{r})$
4. $\mathrm{EuEv}\ (\mathrm{Tabc} \rightarrow (\mathrm{Rbu}\ \&\ \mathrm{Rcv}\ \&\ {*}(\mathrm{auv}) = \mathrm{r}))$
5. $\mathrm{Tabc} \rightarrow (\mathrm{Rbd}\ \&\ \mathrm{Rce}\ \&\ {*}(\mathrm{ade}) = \mathrm{r})$
6. Tabc
7. $\mathrm{Rbd}\ \&\ \mathrm{Rce}\ \&\ {*}(\mathrm{ade}) = \mathrm{r}$
8. $\mathrm{Rbd} \rightarrow b = d$
9. $\mathrm{Rce} \rightarrow c = e$
10. Rbd
11. Rec
12. $b = d$
13. $c = e$
14. $b = d\ \&\ c = e$
15. ${*}(\mathrm{ade}) = \mathrm{r}$
16. ${*}(\mathrm{abc}) = \mathrm{r}$
17. $\mathrm{Tabc} \rightarrow {*}(\mathrm{abc}) = \mathrm{r}$
18. $(x)\,(y)\,(z)\,(\mathrm{Txyz} \rightarrow {*}(\mathrm{xyz}) = \mathrm{r})$

Tras una demostración como la anterior, algunos autores (Gochet-Gribomont, 1990) —y no sólo ellos— comentan que, frente a Kant, en la Lógica de primer orden no se requiere de la figura concreta del triángulo.

Ésta podría servir, como mucho, como mera guía heurística para la elaboración de la demostración que, una vez realizada, olvidaría dicha guía, dicha figura. Es afirmación que olvida que, para Kant, la figura en sí tampoco es necesaria, sino que lo que se requiere en la demostración es lo puesto en la figura por el concepto, es decir, el esquema. Esquema que es el que posibilita, realmente, el papel heurístico que muestra la figura. De lo contrario, dicha figura no sería más que una mancha de tiza o de bolígrafo en la pizarra, en la hoja de papel... y, como tal, carecería de cualquier función, salvo la meramente sensitiva.

Algunos críticos se olvidan de justificar por qué la figura posee papel heurístico; se olvidan del hecho de que en la derivación formal se emplean los mismos mecanismos euclídeos, los de particularización o instanciación, sea universal, sea existencial, que parecen mostrarse simplemente como dos reglas necesarias. No se fundamenta el manejo de las mismas que era, precisamente, la problemática que va a surgir desde Descartes, pasando por Locke y su formulación explícita en Berkeley e intento de solución en Kant.

Mantener la atribución del requerimiento de la figura a Kant, mantener que ello es simple proceso heurístico, mantener que la Lógica de primer orden supera esas atribuciones, esos requerimientos, no es resolver una dificultad o imputar a un kantiano un desconocimiento de lo que se considera ámbito de la Lógica pura. No es más que un cambio de significado en los términos que se manejan y atribuir a Kant y a los constructivistas uno que carece de sentido para ellos. Es lo que se inicia, precisamente, con Frege en cuanto al término de proposición analítica.

El paso a lo formal y el realizar un proceso demostrativo como el ejemplificado en Kant, muestra nítidamente esa traducción, que no es inocua. La misma supone un cambio de hacer, un cambio en la conceptuación de la Geometría, de la Matemática.

Y es lo que pone de relieve, por ejemplo, el manejo de los cuantificadores, inexistentes desde la concepción de un hacer matemático figural. La cuantificación exige de un dominio previo de individuos; dominio o extensión asociada al mismo; por no decir, extensión que cae bajo un concepto, en términos fregeanos. Pero ello muestra nítidamente que esa formalización está subtendiendo una concepción global o conjuntista del hacer matemático. Un hacer matemático radicalmente diferente del hacer figural. Y lo que se pretende es una reducción de este último bajo el primero, para lo cual se le desfigura enteramente, hasta se llega a afirmar que es un hacer a extinguir.

Incluso un intento como el de Hintikka de rescatar el pensamiento kantiano, sin pretensiones reduccionistas, desde la óptica del nuevo hacer, le obliga a realizar interpretaciones que asocia a Kant y que distorsionan el auténtico pensamiento kantiano. Así, llega a un concepto de proceso sintético y analítico con una caracterización «constructiva» de los cuantificadores por la que se dota a los mismos de una instanciación existencial.

Por lo pronto adopta como uno de los criterios de analiticidad el que

> Un paso de argumento es analítico si y sólo si no introduce nuevos individuos en la discusión [Hintikka, 1973, 161].

Principio que, en la formulación que considera como aceptable para Kant, se convierte en

> Un paso analítico de argumento no puede llevarnos de la existencia de un individuo a la existencia de diferentes individuos [íd., 163].

Con estos enunciados Hintikka quiere que su interpretación sea la kantiana. Identificación errónea ya que, además de que el punto de partida de Hintikka es un conjunto posible de individuos sobre los que manejar los cuantificadores —pensamiento conjuntista, de entrada, impensable para Kant—, olvida el papel de la noción de esquema, papel que considero básico y fundamental en la concepción kantiana. Y no tiene más remedio que marginar la noción de esquema porque el mismo no tiene cabida en el hacer global, de carácter marcadamente existencial. Algo que he pretendido mostrar, incluso, con los ejemplos ligados al Axioma de elección.

Que Hintikka, apoyándose en sugerencias que le procura el constructivismo de Kant —al igual que en Wittgenstein—, llegue a una construcción lógico-formal donde la cuantificación sigue unas reglas «constructivas», aptas para la obtención de contraejemplos, y donde establece una aportación auténticamente original con sus conjuntos-modelo que permiten nuevas demostraciones de teoremas complejos como el de completud de Gödel, no significa que meramente aplique el pensamiento constructivo kantiano. Indica la capacidad creadora de Hintikka.

Y lo mismo cabe decir de Rescher (1973), cuando reivindica a Kant en cuanto a su construcción de una epistemología crítica científica.

Como autor de sugerencias para el constructivismo, es claro que Kant es clave. Pero no procede la atribución de lo que desde otros haceres, incompatibles con el marco en el que se mueve, se realicen.

Si los axiomas conforman las notas básicas del espacio como posibilidad de los fenómenos, cabría retomar la sugerencia, ya tantas veces rechazada, de que fuera posible que distintos tipos de axiomas conformaran diferentes condiciones de posibilidad de los fenómenos. Distintos axiomas, distintas geometrías. Nuevamente, en juego, la posibilidad lógico-formal, pero ahora más plausible al estimar que los axiomas no sólo conforman el espacio sino, a la vez, a las figuras representables en él, por ser las condiciones que surgen de los esquemas formales.

Es sugerencia que cabría mantener por ciertos textos kantianos en los que hace referencia a la existencia de otros posibles seres con distintas facultades sensibles... Ya he indicado que, sin embargo, es sugerencia, para Kant, rechazable al imponer las condiciones que establecen los axiomas como constitutivas del sujeto cognoscente, no del espacio.

La sugerencia cabe mantenerla, y no en Kant, insisto, si se acepta la distinción entre espacio como forma de la sensibilidad, como condición necesaria para la posibilidad de los fenómenos, y espacio estructurado por unos axiomas, es decir, entre espacio como intuición y espacio geométrico (espacio + geometría). Si se acepta esta distinción es cuando se puede afirmar que la concepción kantiana del proceso geométrico se muestra como realmente adecuada. Siempre, por supuesto, en el ámbito del hacer matemático figural.

2.5. CONSTRUCCIÓN SIMBÓLICA: ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA

1. La Aritmética y el Álgebra muestran una radical diferencia respecto a la Geometría. No hay, para Kant, campos de objetos constituidos por números —sean naturales, enteros, racionales...— como ocurre en la Geometría ni como los consideramos en la actualidad. De aquí que no pueda haber representación en la intuición pura de objetos aritméticos o algebraicos porque los mismos, para Kant, no existen. No hay, no puede

haber, construcción ostensiva, manifestativa de lo que no es ni siquiera fenómeno. La Aritmética y el Álgebra requieren de otro tipo de construcción, de segundo nivel, como ya indiqué.

Al hablar de la clasificación lógica de los juicios se había señalado que, para Kant, los juicios aritméticos se mostraban, realmente, como juicios en los que se condensaba una regla, una técnica de cálculo. Juicio aritmético como juicio práctico, como manifestación del acto de calcular, por ejemplo, la suma representada por los sumandos. Sumandos que eran, claramente, símbolos numéricos, imágenes del número.

Para Kant, el número no es imagen simbólica ni objeto o fenómeno que pueda venir representado por tal imagen, sino un esquema de la sensibilidad, un método o regla para llevar a cabo una imagen. Basta recordar el ya citado pasaje B 179, donde pensar un número no era otra cosa que pensar un método para representar una magnitud cuantitativa. Con mayor radicalidad:

> el *esquema* puro de la *magnitud* (*quantitas*), entendida como concepto del entendimiento, es, en cambio, el *número*, el cual constituye una representación que comprende la sucesiva adición de unidades homogéneas. El número no es, pues, otra cosa que la unidad de síntesis de lo diverso de una intuición homogénea en general, unidad obtenida al producir yo el tiempo mismo en la aprehensión de la intuición [B 182].

Si el número es unidad de síntesis, método o regla para representar la adición sucesiva de unidades, es claro que no puede ser objeto posible ni del espacio —como las figuras geométricas— ni del tiempo. Un esquema no podía identificarse con la imagen o, en otras palabras, no podía identificarse la capacidad de representación con lo representado.

Por ser esquemas para la adición sucesiva de unidades homogéneas, resulta que la naturaleza específica de los objetos o fenómenos que componen la magnitud cuantitativa de la cual, en su generación, el número es esquema, carece de importancia. Lo único que importa es la homogeneidad de las partes generadoras de la magnitud. Lo único que importa es, por un lado, la adición de partes unitarias y, por otro, la síntesis en unidad de esas partes. Por ello la representación que pueda hacerse del número mediante la construcción ha de ser de nivel diferente al de la ostensiva; nivel de abstracción, en principio, superior.

Al igual que en Geometría, el número viene ligado a las magnitudes, como esquema puro de las mismas. Pero ahora como magnitud en su sentido de *quantitas*, no de *quanta*.

De la magnitud (*quantum*) en general, las extensivas (*quanta*) era las propias de la Geometría, como ya he señalado. Con una precisión: extensivas porque se producían gradualmente a partir de un punto y ello implicaba que requerían del acto interno del sujeto en un movimiento o proceso sucesivo de ir de una parte a otra, que se sintetizaba en una aprehensión única. Suponía la aceptación previa, en Kant, de que la representación de las partes precede a la del total.

Kant agregará, por un lado, y como ya se ha indicado, que todo fenómeno es, en cuanto intuición, una magnitud extensiva; por otro, que el espacio y el tiempo constituyen las formas de la sensibilidad en la que se producen todos los fenómenos. Y, para poder realizar la intuición, el espacio y el tiempo han de ser representados por la síntesis del proceso sucesivo de las partes al todo. En otras palabras, las representaciones de la extensión en el espacio y de la duración en el tiempo son representaciones de las partes concebidas, sintetizadas como unidad. En particular,

> lo mismo ocurre con el tiempo, por breve que sea. No pienso en él más que el proceso sucesivo desde un momento a otro, proceso que genera, como resultado de las partes y su adición, una determinada magnitud temporal [B 203].

Cabe una pregunta: Si las partes preceden al todo —al fenómeno— que se muestra como un mero agregado' de partes previamente dadas, y su representación constituye el acto sintético de la diversidad en una unidad, esas partes que producen una magnitud extensiva —sea espacial o temporal— ¿tienen también partes y no son más que magnitudes a su vez sintetizadas? Por mera homogeneidad, las partes de las magnitudes temporales también deberían ser magnitudes temporales extensivas —análogo para las espaciales— pero ello provocaría un regreso al infinito.

Regreso que, de modo implícito, parece quedar bloqueado por Kant acudiendo precisamente a la noción de número como esquema, como regla que produce la unidad de la síntesis pero en unidad que se obtiene, dice Kant, al producir el tiempo mismo en la aprehensión de la intuición.

En las magnitudes extensivas, el número como esquema proporciona la síntesis de lo homogéneo (de las unidades) independizándose, con ello, de la naturaleza de esas partes, de la naturaleza espacial de las magnitudes a las que van a pertenecer. Como esquema en la construcción simbólica, el número no es más que la

> denominación de todas las construcciones de magnitudes en general [B 745].

En otras palabras, el número se constituye como esquema que produce las partes mediante un agregado sucesivo de unidades en las magnitudes extensivas —sean espaciales o temporales— en la intuición pura y posibilita la síntesis, la unificación de dichas partes en un agregado, en un fenómeno. Es claro que ello supone la abstracción de la naturaleza de esas partes.

Desde este enfoque, el número como esquema muestra dos facetas, sucesivas:

a) Es la representación que comprende la sucesiva adición de unidades homogéneas, por lo que, según he indicado, bloquea el regreso al infinito en cuanto a la constitución de las partes de una magnitud. Pero este proceso es, claramente, un proceso ordinal de agregar unidades sucesivas.

b) La magnitud muestra otra visión, la de *quantitas*, que es la que responde a la pregunta ¿qué tamaño tiene? Y aquí el número como esquema es el que responde mediante la representación de todas las unidades que ha ido generando en el aspecto *a)* en un agregado o fenómeno, como un todo único; es el número como esquema el que responde ahora a la síntesis de las partes en una unidad. Con lo cual el número muestra una segunda faceta, la de cardinalidad.

Tanto el aspecto ordinal como el cardinal del número, con su abstracción respecto a la naturaleza de los fenómenos representados, a la naturaleza de las magnitudes, se fundamentan, en última instancia, en el tiempo al que, sin embargo, producen en el acto de la aprehensión, de la unidad sintética. Bien entendido que el número no da representación fenoménica del tiempo, por lo que ni la Aritmética ni el Álgebra pueden estimarse como ciencia de la duración, del tiempo.

La representación objetual o fenoménica del tiempo, ese enfocarlo como objeto, vendría fundamentada, realmente, en la magnitud extensiva espacial, porque el pensar del tiempo supone un proceso constructivo iterativo y ello exigiría el previo trazar la recta en el espacio para obtener la representación de la duración temporal. Exigiría producir gradualmente esa duración a partir de instantes o unidades homogéneas, de momentos. Con lo cual la representación objetual del tiempo viene a fundamentarse, a ser posibilitada en la forma espacial de la sensibilidad. Es precisamente este fundamento el que posibilita crear una ciencia del tiempo como objeto, como representación de la duración, que no es otra que la Mecánica.

Se requiere, aquí, una observación. Tanto la producción de la magnitud extensiva espacial como de la extensiva temporal, van a fundamentarse, si se es consecuente en el pensamiento kantiano, no ya en las formas de la sensibilidad, no en el espacio y el tiempo de modo directo, sino en ellas por la previa constitución fisiológica del sujeto cognoscente humano; en el hecho de que, como individuo, puede reiterar un movimiento desde que el primero es posible.

Es afirmación, apoyada en los textos citados kantianos, por la cual se exige del movimiento interno del sujeto en la acción del trazar la recta como imagen, como representación de la magnitud extensiva sea espacial o temporal. Esa acción por la que se produce el tiempo, esa acción por la que se produce la magnitud espacial...

El número como esquema se muestra como un proceso incardinado en el tiempo, pero no por ser objeto temporal, sino porque es la misma magnitud extensiva la que exige de la duración en sus dos fases: el ir de la parte a la parte, y el ir de la parte al todo, y ello en sus dos manifestaciones, tanto de magnitud espacial como temporal.

Es decir, la adición sucesiva de unidad tras unidad, la síntesis productiva de unir esas unidades en un todo, son propias tanto de lo espacial como de lo temporal, y esto por la forma propia de los fenómenos, por el propio concepto de magnitud extensiva.

Ello se refleja en las dos caras del número-esquema: en el aspecto ordinal se requiere de la temporalidad porque la sucesiva representación en el tiempo es la que sirve para distinguir una de otra unidad —indistinguibles, de otra manera, dada su homogeneidad— y también interviene en el aspecto cardinal, en el proceso de sintetizar esas partes en un todo, totalidad a la que como cardinal representa.

Ahora bien, la propia acción o proceso sintético del esquema, apoyado en el tiempo, no es más que un proceso repetitivo, reiterativo; es una sucesión de síntesis. Y la pregunta que se formuló al hablar de los juicios aritméticos parece recibir, aquí, respuesta: la magnitud cuantitativa se le presenta a Kant como la determinación de una cosa

> a través de la cual puede pensarse cuántas veces está contenida la unidad en esa cosa. Pero ese «cuántas veces» se basa en la repetición y, consiguiente, en el tiempo y en la síntesis de lo homogéneo en el tiempo [B 300].

Con lo cual, y una vez más, lo que se tiene es la afirmación de que el número como esquema, y en sus dos aspectos, ordinal o repetición, cardinal o síntesis de las unidades homogéneas, se fundamenta en la repetición y, por tanto, en el tiempo.

Un acto reiterativo no sólo exige la homogeneidad en cuanto a las partes que se reiteran, exige que ese mismo acto sea, en sí, homogéneo, estable. Y Kant acude al tiempo, nuevamente, para fundamentar la estabilidad de esa repetición. La estabilidad de la misma se basa en la *permanencia*, que, según Kant, no es otra cosa que existencia en todo tiempo que permite determinar las condiciones de cómo el concepto podría convenir a algún objeto. Determinación que sólo puede venir apoyada, establecida por la sensibilidad; aquí, por la forma pura del tiempo (B 301).

Son palabras que vienen a significar, una vez más, que el número, para Kant, no es objeto como lo era la figura geométrica.

2. Es concepción que muestra una serie de consecuencias esenciales en cuanto al hacer matemático. Así, y en primer lugar, el que carece de sentido hablar de «la sucesión de los números» o hablar de una función como la «función sucesor». Son expresiones que exigirían la previa existencia de los objetos que constituyeran esa sucesión, de los objetos sobre los cuales aplicar el operador sucesor. Carece de sentido plantear cuestiones no sólo de la Aritmética como campo de objetos a axiomatizar o formalizar, sino de la propia Teoría de números en el sentido clásico del término. Carece de sentido plantearse preguntas acerca de las propiedades generales de los números...

La sucesión se muestra en Kant como mera posibilidad de reiteración, mera posibilidad de la sucesiva adición de unidades. Ciertamente, en esa reiteración y con su segunda fase de síntesis, se obtiene respuesta acerca del orden y del cardinal y, de aquí, cabe una imagen o representación de los mismos. Pero esa imagen, los cinco puntos kantianos, ..., no son el número, sino la mostración de una magnitud extensiva ahora espacial que es la que aparece como representación del esquema número. No se tiene, así, representación de una posible sucesión, sino, en todo caso, la captación de actos reiterativos...

Igualmente la noción del operador sucesor actual sólo se muestra como la capacidad para reiterar cualquier acto, cualquier operación sucesivamente. Capacidad fundamentada en la duración por lo dicho antes. Con la observación, nuevamente, de aceptar la insinuación kantiana de que la misma viene apoyada, fundamentada, en el movimiento interno del sujeto. Es decir, en el fondo, es la capacidad fisiológica para reiterar la ejecución de un movimiento, lo que puede estimarse como función sucesor, y es la que cabría admitir como potencialmente infinita.

Es claro que, desde esta posición, no se pueda alcanzar, ni siquiera llegar a la captación de un principio como el de inducción completa, que posibilitaría la construcción demostrativa de las propiedades generales asociadas a las operaciones de los números. Es algo que se me muestra imposible desde la concepción kantiana.

3. Desde esta posición, donde el número no es objeto ni concepto, sino regla o método, se me presentan desenfocados los estudios críticos que se han venido haciendo sobre la concepción kantiana. Si he indicado que es imposible hablar de la sucesión de números, de la función sucesor, de la inducción completa..., lo he hecho no por argumentos como los de Friedman (1990, pp. 238-239) o, anteriormente, de Parsons.

Para Friedman, la inducción completa exige el previo manejo del operador sucesor y, con él, de la proposición existencial de que a todo número k le corresponde otro, que es precisamente k + 1. Proposición existencial desde la lógica formal que exige de la combinación de dos cuantificadores, universal y existencial. Como Kant se mueve en la Lógica clásica, silogística, no dispone en ella de ese manejo de cuantificadores, por lo cual no puede realizar la afirmación contenida en la proposición existencial señalada, no puede formular el operador sucesor. De esta manera Kant no parece tener otra opción que representar esta proposición, reflejo del operador sucesor, por medio de la posesión en el sujeto cognoscente de dicha función sucesor. Lo que, en términos más kantianos, no es más que la capacidad para iterar cualquier operación dada.

Pero esta crítica se me presenta incorrecta: ya antes de poder formular la proposición existencial reflejo del operador sucesor, ya antes del manejo de los cuantificadores —que, por lo expuesto al hablar de la Geometría, supone una concepción del hacer matemático incompatible con la acepción kantiana— se requiere del número como objeto, como término para que pueda ser argumento de dicho operador. Pero el número, para Kant, no es objeto, sino esquema, método. Lo que falta en la concepción kantiana no es el concepto de cuantificador, sino la noción clave del número como objeto cualquiera, del número en general. Al igual que falta, consecuentemente, la noción de función con sus conceptos asociados de argumento y valor...

Y es esta ausencia lo que le imposibilita establecer proposiciones cualesquiera que hagan referencia a los números como objetos. Es ausencia que imposibilita el establecimiento de proposiciones como las correspondientes al operador sucesor, a la sucesión en sí, a la inducción completa...

Pero es ausencia que hace igualmente clara la imposibilidad de establecer cualquier tipo de caracterización axiomática de la propia iteración finita como posible formalización del concepto kantiano de iteración sucesiva. Imposible alcanzar una concepción axiomática constitutiva y reguladora a la vez de un campo de objetos, aquí los números, impensables como tales para Kant. Ello sólo se hará factible en el siglo XIX como bien señalara Parsons, pero no por las razones que aduce.

4. El número es, insisto, meramente el esquema que

responde a la pregunta ¿qué tamaño tiene esto?, ¿cuál es la magnitud (*quantitas*) de esto? Y esta pregunta exige de la síntesis homogénea del proceso calculatorio de ir de unidad en unidad hasta dar el total, con independencia de la naturaleza de los objetos que constituyen el «esto». Se independiza de la magnitud extensiva espacial —longitudes, áreas, volúmenes...—, se independiza de cualquier carácter limitado específico de la intuición y pasa a tratar del concepto en general. Pasa al campo de la intuición general pura.

Por ser esquema, cuando se piensa en el número se piensa en un método para representar imágenes asociadas, puntos, rayas, símbolos... Imágenes que son meras representaciones simbólicas y no objetuales o fenoménicas del esquema porque tales imágenes no representan objeto alguno. Símbolos claramente arbitrarios, convencionales pero representativos del esquema y encerrando, por decirlo así, lo que dicho esquema como método implica: el acto sintético de agrupar unidad tras unidad en una síntesis; los aspectos ordinal y cardinal de las magnitudes extensivas; la permanencia de la repetición, del propio acto reiterativo...

Si la Aritmética y el Álgebra tratan de las magnitudes extensivas, pero no en sí, sino en cuanto *quantitas*; si tratan del número y éste es esquema o método para la representación de la magnitud en general, por lo que ese número no es objeto, es claro que ambas disciplinas no son más que ciencias de métodos, disciplinas calculatorias o computacionales, son disciplinas de juicios prácticos.

La Aritmética y el Álgebra no pueden venir caracterizadas por el método axiomático euclídeo porque no pueden contener axiomas: en Aritmética sólo cabe admitir postulados o juicios prácticos inmediatamente ciertos, sólo cabe admitir la existencia de *fórmulas numéricas*.

Éstas no son, claramente, analíticas. En «7 + 5 = 12» no se piensa, en la representación de «7» ni en la de «5», la representación correspondiente a «12» —y aquí, como Kant señala, no se trata de la suma—. En la fórmula numérica no se establecen, como en los axiomas geométricos, las condiciones necesarias y suficientes para el esquema, no se establecen las posibilidades de objetos, sino que esos símbolos son, ya, la representación de los propios esquemas, los correspondientes a las magnitudes extensivas.

Por ello tienen que ser fórmulas singulares y no universales como pasa con los axiomas geométricos. De aceptar que fueran universales, dirá Kant, de considerarlas axiomas, serían infinitas (B 204). Lo cual podría interpretarse en el sentido de que, como vendrían asociadas a la naturaleza propia de cada magnitud, aparecería una fórmula para cada una de ellas.

Si no son analíticas, son, como fórmulas numéricas, juicios sintéticos *a priori*. Y, por ello, son indemostrables. Pero ahora no porque establezcan las condiciones que producen un objeto, sino porque lo que establecen es, sin más, el acto sintético de contar por el cual alcanzan la unidad sintética representada por cada sumando en una nueva unidad sintética representada por la suma.

5. La no existencia de axiomas puramente aritméticos no es obstáculo para que puedan realizarse, de las magnitudes extensivas, juicios que Kant califica de analíticos y que son del mismo tipo, en cuanto a su uso, que las proposiciones idénticas. Algunos juicios reflejan la identidad en la producción de las magnitudes que intervienen en el sujeto y el predicado; identidades que, por serlo, nada agregan al conocimiento. Otros expresan propiedades inmediatamente válidas de las magnitudes.

Por ser propias de las magnitudes extensivas, son proposiciones que también cabe considerar como aplicables, desde el entendimiento puro, a la Geometría. Es una aplicación que, en ambos casos, se realiza como mero proceso lógico clarificador o, en palabras kantianas, tales juicios analíticos

> sólo sirven, al igual que las proposiciones idénticas, como eslabones del método, no como principios [B 17].

Kant pone como ejemplos, «el todo es igual a sí mismo», «el todo es mayor que una de sus partes», que simboliza, respectivamente, como «a = a», «a + b ≥ a». En otros lugares agrega como ejemplos de este tipo de proposiciones como propios de las magnitudes extensivas: si sumamos cantidades iguales a cantidades iguales, obtenemos cantidades iguales; si restamos cantidades iguales a cantidades iguales, obtenemos cantidades iguales.

Ahora bien, en este contexto Kant agrega:

> Sin embargo, estos mismos principios sólo se admiten en matemáticas, a pesar de ser inmediatamente válidos por sus meros conceptos, en cuanto que son susceptibles de representación intuitiva [íd.].

Nuevamente, un equívoco kantiano en cuanto a sus criterios de analiticidad. Y ello porque admite que

> son analíticos y se basan en el principio de contradicción [B 16].

o, en otras palabras, parecen pertenecer al ámbito del entendimiento puro y, por ello, su analiticidad queda bajo la condición lógico-formal de los juicios que, para el mismo Kant, era insatisfactoria porque no lograba enlazar entendimiento con sensibilidad, enlace propio de la lógica trascendental. Insatisfacción que parece conducirle a unas matizaciones en las que muestra la equivocidad señalada. Que no existiría desde la precisión que se hizo con la distinción entre los dos ámbitos señalados de Lógica general pura y Lógica trascendental.

Desde la Lógica trascendental la mera consistencia formal no bastaba, sino a través del enlace entendimiento-sensibilidad. Y precisamente el tipo de juicios que Kant indica como analíticos pero propios del hacer matemático manifiestan ese enlace porque son «susceptibles de representación intuitiva». Y lo son porque los mismos son propios de las magnitudes extensivas, las que se producen en las formas de la sensibilidad y caen, por ello, bajo el hacer matemático. En lugar de mantener esta distinción nítida, Kant juega con los términos y atribuye los equívocos al lenguaje:

> lo único que nos hace creer, de ordinario, que el predicado de tales juicios apodícticos se halla ya en nuestros conceptos y que, consiguientemente, el juicio era analítico, es la ambigüedad de la expresión. Efectivamente, a un concepto dado hay que agregarle en el pensamiento un cierto predicado, y tal necesidad es inherente a los conceptos. Pero la cuestión no reside en qué es lo que *se debe* agregar al concepto dado, sino en qué sea lo que *de hecho* se piensa de él, aunque sólo sea de un modo oscuro. Entonces queda claro que, si bien el predicado se halla necesariamente ligado a dicho concepto, no lo está en cuanto pensado de este último, sino gracias a una intuición que ha de añadirse al concepto [B 17].

La ambigüedad no sé si es de la expresión o del propio Kant. El juego de palabras parece indicar, por un lado, que en el método analítico o lógico-formal al concepto se le ha de agregar algo, cuando se había venido sosteniendo que, por el contrario, en tal método analítico lo que se hace es descomponer, resolver en sus partes el sujeto y de tal manera que el juicio es analítico si la nota predicativa se encuentra entre esas notas resueltas, por lo que no hay agregación alguna. Si hay agregación el juicio deja de ser analítico y, por lo mismo, es sintético. Y no por ambigüedades del lenguaje, sino por la caracterización de dichos juicios.

Por otro lado, como los juicios que se están manejando son propios de las magnitudes extensivas, han de poseer representación intuitiva, al ser producidas por un acto de la parte al todo, lo cual indica que es gracias a la intuición por la que esos juicios se convierten en «analíticos».

Por ambos motivos, y si se es consecuente, dichas proposiciones, por ligadas a las magnitudes, serían juicios sintéticos *a priori*, y por ello necesarios, lo que justificaría la afirmación kantiana de que esos principios «sólo se admiten en matemáticas».

Cabría indicar, y es mera sugerencia, que el equívoco puede venir originado en el hecho de los juicios que Kant considera analíticos y que sólo se admiten en Matemática y según los ejemplos que da, no aparecen en los *Elementos* euclídeos como axiomas ni como postulados, sino como nociones comunes. Nociones comunes que pueden aparecer, por ello, en disciplinas no estrictamente geométricas y parecen mostrar un grado de generalidad mayor que las propias de los ámbitos matemáticos.

En cualquier caso, tales proposiciones «analíticas», basadas en el principio de contradicción, susceptibles de representación intuitiva, sirven como meros eslabones en las cadenas demostrativas matemáticas...

6. Al igual que en el espacio geométrico se construyen ostensivamente figuras, cabría hablar de construcción de magnitudes y, consecuentemente, de sus esquemas operatorios. Kant asegura que los matemáticos no sólo construyen magnitudes (*quanta*), como en la Geometría, sino también magnitudes (*quantitas*), como en el Álgebra,

> donde se prescinde totalmente de la naturaleza del objeto que ha de ser pensado según este concepto de magnitud. Esta misma ciencia elige entonces cierta denominación de todas

> las construcciones de magnitudes en general (*números*), como adición, sustracción, extracción de raíces, etc., y, una vez que ha designado también el concepto universal de las magnitudes según las diversas relaciones de las mismas, representa en la intuición, de acuerdo con ciertas reglas universales, todas las operaciones mediante las cuales se produce y modifica la magnitud. Cuando una magnitud tiene que ser dividida por otra, la ciencia matemática combina los símbolos de ambas según el signo indicador de la división, etc. [B 745].

En la construcción simbólica, el número aparece como esquema para la construcción de magnitudes en general. Construcción que no da tan sólo el orden y produce la cantidad, sino que permite modificar las magnitudes: agruparlas, sustraerlas, repetir homogéneamente la agrupación o multiplicarlas, dividirlas o compararlas...

Así, en la construcción simbólica, el matemático maneja las modificaciones y relaciones que pueden producirse entre magnitudes, las alteraciones de éstas gracias a una representación simbólica que refleja tales producciones, modificaciones, comparaciones... Representación simbólica que viene acompañada, simultáneamente, de una denominación, simbolización definitoria, de las mismas. Así, permite la construcción simbólica correspondiente de adición, sustracción, división... de magnitudes a través, ahora, de los símbolos asociados a ellas.

Es construcción por la que se alcanza el concepto matemático correspondiente no a objetos, sino a relaciones entre magnitudes, entre esas construcciones; es decir, a operaciones. Operaciones que exigen de la denominación, mediante una definición correspondiente, de unos símbolos para la representación adecuada a las operaciones entre magnitudes; así, +, ., -, a^b, $\sqrt{}$... Símbolos que han de ser manipulados, ahora, de manera ostensiva, y de acuerdo, en palabras de Kant, con reglas universales. Esquemas o métodos universales que se plasman en la construcción simbólica como

> construcción característica por la cual se presentan a la intuición los conceptos a través de signos, especialmente los que se refieren a relaciones de magnitud [B 762].

Los conceptos de la Aritmética y el Álgebra se construyen, como los de la Geometría, pero son conceptos que corresponden a relaciones entre magnitudes. Aparecerían, con enfoque actual, como auténticos operadores, por lo que tanto la Aritmética como el Álgebra se mostrarían como disciplinas de segundo nivel, como disciplinas cuyos objetos estarían constituidos por operadores. Lo cual no es correcto atribuir a Kant: ambas disciplinas son meras ciencias calculatorias, ciencias algorítmicas que no sé si, para Kant, alcanzarían el mismo rango de la Geometría que se le muestra como ciencia construida, auténticamente, en arquitectónica.

El proceso algorítmico, indica Kant, sigue ciertas reglas universales. No hay más especificación. Cabría indicar que tales reglas serían las dadas por juicios que expresaran las leyes de asociatividad, conmutatividad... No creo que quepa hacer tal interpretación, porque la misma conduciría a la existencia de axiomas o reglas constitutivas de un campo de objetos determinado. Algo que niega Kant.

Esas reglas universales parecen hacer referencia, por un lado, a los postulados, a los juicios prácticos inmediatamente ciertos que reflejan las fórmulas numéricas; por otro, al hecho de que las operaciones entre magnitudes no se limitan a las magnitudes extensivas espaciales, sino a magnitudes en general, universales. Reglas universales, finalmente, porque vienen adecuadas por las condiciones de construcción, por los esquemas, a las formas de la sensibilidad y no hacen referencia a objeto singular alguno.

En cuanto a la universalidad, podría establecerse una posible diferencia entre la Aritmética y el Álgebra. De la primera ya he indicado que maneja fórmulas numéricas que constituyen proposiciones prácticas, postulados, que reflejan operaciones —sumas, productos...— «concretas». Los ejemplos de Kant son, siempre, del tipo «7 + 5 = 12», «2 + 2 = 4»... Pero, en Álgebra, los símbolos que se manejan parecen ser representación o imagen de esquemas más abstractos, de esquemas de esquemas, cabría decir; así, «a + b = c» sería un esquema de esquemas porque «a», «b» y «c» representarían números cualesquiera y, con ello, esquemas cualesquiera...

Creo que esto es impensable desde la óptica kantiana, donde lo que prevalece es el esquema sobre el objeto. La diferencia entre la Aritmética y el Álgebra se apoyaría, pura y exclusivamente, en que la Aritmética maneja esquemas de lo que calificar números naturales, mientras que el Álgebra maneja esquemas de lo que calificar números racionales.

Es admitir, simplemente, tanto el ambiente matemático en el que se mueve Kant como, por supuesto, su conocimiento de los *Elementos* de Euclides. En ellos hay una nítida separación entre las magnitudes numéricas y las magnitudes racionales o proporcionales. Es lo que estaría de acuerdo, precisamente, con el texto citado acerca del álgebra de B 745, con su mención del número y, luego, de las construcciones u operaciones como la extracción de la raíz cuadrada. Esta última puede ser representada por medio de una construcción ostensiva, la construcción geométrica de la diagonal de un cuadrado. Junto a esta construcción ostensiva, que fundamenta la existencia de dicha magnitud como diagonal, automáticamente aparece el esquema que se muestra como construcción simbólica, como regla calculatoria de aproximación a dicha magnitud que establece el tamaño de la misma, con lo que se tiene fundamentado el número irracional.

El número racional no es otra cosa que un esquema o método para la aproximación racional y, por ello, se fundamenta en el mismo principio que el número natural: la iteración sucesiva, aunque ahora no de unidades sino de sucesivos racionales, que exigen la división en sus partes de una magnitud y, por tanto, exigen de la comparación con alguna unidad. Es decir, se exige que tales magnitudes se muestren como obtenibles, producidas por división, como magnitudes proporcionales, racionales, a lo que también hace referencia Kant en el mismo texto citado.

Y es lo que, por otro lado, justifica que, para Kant, sea inviable la existencia de raíces de números negativos, la existencia de los complejos: no son esquemas que puedan aproximar a nada porque tampoco tienen, como los irracionales, representación ostensiva alguna.

Y es aquí donde cabría marcar la diferencia entre Aritmética y Álgebra: esta última también es esquema de números, pero ahora racionales e irracionales. Y la representación de los mismos viene dada por símbolos manifestativos de tal racionalidad.

7. Si indiqué que la Geometría, desde una concepción kantiano-constructivista, cabía enfocarla no como ciencia de figuras u objetos, sino como ciencia de esquemas o métodos que producen objetos o figuras posibilitados por las condiciones formales dadas por los axiomas geométricos, cabe decir, ahora, que también la Aritmética y el Álgebra son ciencias de esquemas. Pero, a diferencia de la Geometría, los esquemas son métodos calculatorios, algoritmos que no pueden venir representados más que por símbolos.

Y hay que observar que, a diferencia de la construcción ostensiva, la concepción kantiana de la Aritmética ha creado menos problemas interpretativos a los historiadores del pensamiento filosófico de la Matemática. Sencillamente se ha ignorado su concepción. Lo cual es consecuente porque, a partir del siglo XIX, los matemáticos han pasado a la construcción de la Teoría de números y, con ello, los números han dejado de ser meros esquemas o reglas de cálculo, han pasado a ser objetos o conceptos, elementos cuya naturaleza debía ser, en cualquier caso, dilucidada. Como tales objetos constituían un dominio y éste debía ser, entonces, caracterizado: evidentemente, por el método axiomático. Es lo realizado por Dedekind y Peano.

La concepción kantiana, desde esta perspectiva, nada tiene que agregar aquí. Salvo aceptar su enfoque constructivo en el sentido de considerar la Aritmética como un terreno puramente computacional o algorítmico. Sus fórmulas, meras fórmulas prácticas para la realización de las operaciones aritméticas y, con ellas, de sus aplicaciones a las ciencias de la naturaleza. Acudir a Kant, desde esta perspectiva, implica identificar número con proceso de cálculo. Y es lo realizado tanto desde alguna de las escuelas constructivistas como desde los formalistas en momentos como los actuales.

Estos últimos, apoyándose en que al considerar que los números no son objetos ni conceptos, sino meros esquemas calculatorios, posibilitan una interpretación nominalista radical del hacer matemático. Interpretación nominalista que, por lo anterior, cabría atribuir al mismo Kant en cuanto a su concepción de la Aritmética.

2.6. LAS DEFINICIONES MATEMÁTICAS

El uso constructivo de la razón se manifiesta, en cuanto método, para Kant, en una arquitectónica. En su constitución metódica, en su proceso constructivo, el matemático requiere, como instrumentos, de los Axiomas, las Definiciones, las Demostraciones. Se puede afirmar que hay, en Kant, una aceptación de los *Elementos* de Euclides como paradigma del conocimiento científico. Paradigma para la exposición metódica y no sólo de los *Elementos* geométricos, sino de los elementos de cualquier disciplina que haya penetrado en el seguro camino de la ciencia, como ocurre con la Mecánica newtoniana, la expuesta en *Philosophiae naturalis principia mathematica*. Es sólo la Matemática, y con ella la Ciencia natural, la que hace uso metodológico de los Axiomas, Definiciones y Demostraciones.

Basta recordar, aquí, su afirmación respecto a la Demostración:

> Sólo las matemáticas poseen demostraciones, debido a que su conocimiento no deriva de conceptos, sino de la construcción de los mismos, es decir, de la intuición que puede darse *a priori* en correspondencia con los conceptos [B 762].

También indiqué el papel de los axiomas geométricos. Pero hay que hacer una precisión: la del sentido en el que Kant adopta el término «axioma» cuando el mismo no se ajusta a su empleo en la Matemática. Porque Kant maneja este término en más de una ocasión, como cuando establece el *Axioma de la intuición* que ya he mencionado (B 202). No es, realmente, un empleo con la misma significación que en el campo matemático. En Lógica trascendental, cuando Kant hace uso de este término, como en el caso anterior, lo hace para señalar un principio de posibilidad de los auténticos axiomas en general. Indicará:

> por sí mismo no era otra cosa que un principio formado por conceptos [B 761].

En otras palabras, sólo hay axiomas en la Matemática y, más en concreto, sólo en la Geometría.

Es momento, por ello, para detenerse en el concepto kantiano de Definición.

En busca de precisiones Kant va a indicar que de los conceptos empíricos sólo cabe dar denominaciones, mientras que de los conceptos puros *a priori* únicamente caben exposiciones, explicaciones apoyándose en el plano lógico-formal al que pertenecen. Pertenencia por la que sólo puede manejarse el método resolutivo, analítico que permite la descomposición del concepto en sus notas correspondientes; descomposición que permite asegurar que, de los conceptos del entendimiento puro, de los conceptos *a priori*, sólo caben explicaciones.

Consecuente, se obtiene la afirmación de que es en el campo de las matemáticas en el único en el que pueden establecerse definiciones de sus conceptos. Pero si éste es el caso es porque Kant entiende por definiciones matemáticas las

> construcciones de conceptos producidos originariamente [B 758].

Definir matemáticamente es construir conceptos. Por construcción la definición ha de ser producida sintética y no analíticamente o por resolución de las notas componentes del concepto. El término «originario» quiere indicar, aquí, que no se deriva de otra cosa. Por producir sintéticamente, el matemático establece en la intuición pura el objeto correspondiente al concepto en el mismo momento de la definición.

Hay una radical diferencia entre las definiciones matemáticas y las definiciones que pueden establecerse de un objeto pensado arbitrariamente: aunque quepa la definición de éste, no se puede afirmar que se haya producido el objeto que se define, porque puede ocurrir que no se den ni las posibilidades empíricas del mismo —Kant pone como ejemplo, que ya he mencionado, reloj marino— ni, lo que es más importante en el terreno que aquí nos ocupa, sus posibilidades en la intuición pura.

Podrían resumirse las palabras anteriores en la aceptación kantiana de un criterio ya muy clásico y que puede formularse en la expresión: la definición de un concepto —sea puro, sea empírico— no implica la existencia del objeto definido por dicho concepto.

En el plano del entendimiento puro se puede admitir la existencia de este tipo de definiciones estrictamente estipulativas, pero su posibilidad queda en el plano lógico porque serán las condiciones de la sensibilidad las que permitan atribuir a dicho concepto algún objeto que le proporcione validez objetiva.

Pero ello nos vuelve a un punto ya discutido: partir de la definición arbitraria de un concepto para luego buscarle un fenómeno que le dé significación es un proceso inverso al seguido en los terrenos matemáticos como indicará tajantemente Kant, negando una vez más que en Matemática se pueda pasar desde el plano de la posibilidad lógica al de la posibilidad real.

Hay que tener presente, además, que si esos conceptos carecen, en sí, de su posibilidad aplicativa, si son categorías puras del entendimiento que no corresponden a las que poseen sensibilidad, tales conceptos jamás podrán encontrar tal aplicación, permanecerán en el campo del entendimiento puro, el propio del hacer filosófico. Pero si poseen esa capacidad aplicativa es porque vienen constituidos desde las condiciones de la sensibilidad y, por ello mismo, entran en el campo de la Matemática.

No tener presentes elementos como los señalados es lo que hace caer en el error a los filósofos...

En Matemática se establece la definición del concepto como proceso sintético, constructivo, lo cual indica que se da la existencia del objeto al concepto en ese mismo acto. De esta manera estimarla como definición estipulativa es correcto sólo hasta cierto punto. Al construir el concepto a partir del fenómeno en la intuición pura, se manifiesta la existencia del objeto que corresponde al concepto y, entonces, cabe establecer un nombre para el mismo.

Pero, con ello, estoy afirmando que la definición matemática se muestra en Kant, realmente, como esquema. Y esto se justifica porque la definición entraña, simultáneamente, un criterio operativo por el que se dota de representación al concepto en ella establecido. En el hacer matemático figural, frente al hacer matemático global, dar una definición supone la posibilidad constructiva de lo definido mediante el criterio operativo que conlleva. De aquí que sea instrumento clave tanto para la conceptuación como para la demostración y la resolución de problemas. De aquí que se exija del matemático el dominio completo de las definiciones de sus campos de saber propios. Conocer las definiciones supone conocer, en términos kantianos, el esquema, el criterio constructivo que las mismas encierran. De aquí que no sólo deba dominarlas, sino que el matemático deba partir de ese previo conocimiento de ellas.

Y basta recordar que, en terminología más kantiana, los principios matemáticos son constitutivos del campo matemático correspondiente, es decir, son los que condicionan los esquemas en su universalidad pero también en su uso. Recordatorio para evitar cualquier matiz de arbitrariedad o convencionalidad en el elemento «definición de un concepto». Lo que no significa, evidentemente, que no se dé nombre, que no se denomine estipulativamente, a esas construcciones.

Si se parte de la definición matemática, ésta no ha de verse, entonces, más que como el esquema que permite la representación del objeto asociado. De ahí la afirmación kantiana de que la definición es, en Matemática, una construcción originaria, en otras palabras, un esquema.

Todo lo anterior quizá se ponga más en claro retomando el texto citado B 745, donde al hablar de las construcciones, ostensiva y simbólica, se especifica que en Matemática se elige «cierta denominación» para la *construcción* de las magnitudes, denominación que también designa, entonces, el concepto universal asociado. Esa construcción no es más que la manifestación del esquema que constituye la definición.

Desde este enfoque es claro que las definiciones en Matemática no pueden ser erróneas, como sí ocurre muchas veces en filosofía. Y no lo son porque vienen constituidas por el proceso constructivo en el que se van mostrando las notas que se quiere que se piensen del concepto asociado a la construccción del objeto. Aunque no es obstáculo para que, en ocasiones, tales definiciones muestren defectos, errores en cuanto a la forma, al revestimiento. Así, agregar notas innecesarias. Y Kant ejemplificará: en la definición de circunferencia como «línea curva cuyos puntos equidistan de uno (central)» es innecesario poner «curva», es decir, línea no recta en ninguno de sus puntos. Y es innecesario porque cabe establecer un teorema, derivado de la definición, según el cual toda línea cuyos puntos equidisten de uno solo es curva.

2.7. EL ERROR EN LA MATEMÁTICA

1. He mencionado el término «error» en cuanto a la Definición matemática como esquema constructivo. Llegados a este punto, cabría preguntarse por la posibilidad de error en el hacer matemático y no sólo en la

Definición. Posibilidad negada, claramente, desde la concepción que ve en la Matemática la disciplina de la certeza absoluta. Certeza responsable, cabría decir, de la separación de todas las verdades en dos categorías, de razón o matemáticas, de hecho o científico-naturales. Frente a la contingencia requerida por las ciencias naturales, la absoluta certeza de las formas matemáticas.

Precisamente el manejo de tales formas mediante el empleo de las fórmulas matemáticas es el que permite la construcción de las restantes ciencias que podrán, incluso, estratificarse, clasificarse según la cantidad de matemáticas que en su construcción empleen.

Posibilidad de error que, según Kant, no se tiene en la representación. El error sólo puede aparecer en el juicio ya que una mera apercepción, una representación de los sentidos, no es conocimiento. Con palabras kantianas de la Dialéctica, se puede decir muy justamente que los sentidos no conllevan error...

De aquí que, en el sentir kantiano, aparentemente, es claro que no hay falsedad en la Matemática, y ello porque:

— Los conceptos se representan de modo inmediato en la intuición pura mediante procesos constructivos fundamentados en la sensibilidad del sujeto cognoscente.

— Las proposiciones matemáticas se obtienen como actos sintéticos constructivos no a partir de conceptos, sino que vienen establecidas por la posibilidad de la intuición pura y la experiencia. Como tales construcciones han de ser necesariamente verdaderas, han de ser apodícticas.

En cuanto a las demostraciones, ya se indicó que constituían pruebas apodícticas si eran intuitivas. Y que el matemático realiza estas pruebas, estas demostraciones, mediante un proceso constructivo. Siguiendo a Kant en la demostración-construcción del teorema de que la suma de los ángulos de un triángulo es dos rectos, se pudo observar que se iba paso a paso construyendo, trazando, «viendo» en lo fenoménico el esquema constructivo universal.

Por su parte, en Aritmética, realizar una suma, por ejemplo, no es más que producir una sucesión de actos iterativos homogéneos en los que se va agregando unidad a unidad hasta alcanzar la síntesis total, global y, con ella, el cardinal asociado a ese agregado total. Un proceso iterativo finito, ciertamente, propio de la suma de magnitudes extensivas.

Y si en Geometría esas construcciones manejan esquemas con su representación singular asociada, la figura, en Álgebra se sigue el mismo procedimiento, ahora simbólico. En Álgebra, con sus ecuaciones,

> a partir de las cuales, por reducción, produce la verdad justamente con su prueba [íd.].

De aquí que también en el Álgebra se tenga que:

> aun sin atender a su elemento heurístico, este método garantiza la ausencia de errores en todas las inferencias por el hecho de poner a la vista cada una de ellas [B 762].

Para Kant puede asegurarse que no hay falsedad ni error en la Matemática precisamente por ser un proceso constructivo, por no ser más que la manifestación de uno de los dos usos de la razón pura, el productivo, donde

> sus conceptos tienen que ser inmediatamente presentados de modo concreto en la intuición pura, con lo cual se pone en seguida de manifiesto todo lo infundado y arbitrario [B 739].

Es el proceso constructivo, en sus diferentes facetas —conceptual, judicativa, razonadora—, el que impide el error y la falsedad en la Matemática.

Precisamente en esta ausencia de errores debidos al proceso matemático ve Kant una de las notas diferenciadoras de la Matemática respecto a la filosofía. Ausencia incardinada, en realidad, en dos aspectos: por un lado, en el uso específico de la razón pura, que en el caso de la Matemática considera lo universal en lo concreto (en la intuición singular); y, por otro lado, en la representación pura *a priori*. Son los dos motivos por los cuales el matemático hace visibles sus errores.

Frente a esta ausencia de falsedad y error en el uso constructivo de la razón pura, Kant va a afirmar la necesidad de una *disciplina*, de un canon negativo de la razón que elimine la constante inclinación que esa misma razón tiene para apartarse de las reglas, de *sus* reglas.

Una disciplina que haga de catártico de la razón pura que no tiene el contrapeso de lo constructivo, de la intuición pura. Por no tenerlo, por ser pensar, no conocer, esa razón cree alcanzar en ocasiones el conocer desde el solo ámbito del pensamiento puro. Y, en ese momento, la filosofía lo único que produce es el error, la falsedad, lo ilusorio. Y es uno de los puntos que ocurre, dirá Kant, cuando el filósofo, deslumbrado por los éxitos de la Matemática, trata de emplear el método de ésta en el ámbito filosófico; algo que al matemático le puede suceder cuando pretende emplear el pensar sólo en su ámbito matemático constructivo.

Por otro lado, se tiene la afirmación de que las proposiciones matemáticas son apodícticas, lo que no ocurre ni con las proposiciones empíricas ni con las filosóficas. Estas últimas se apoyan, como conocimiento discursivo, en los conceptos, parte de ellos; pero de los conceptos puros *a priori*

> jamás puede surgir una certeza intuitiva, es decir, una evidencia [íd.].

Evidencia o certeza intuitiva propia de los juicios matemáticos que parten, a la inversa, de la experiencia en la intuición pura para alcanzar el concepto; una evidencia como la que se tiene en el juicio «2 + 2 = 4» es algo imposible de alcanzar en los terrenos filosóficos.

Sin embargo, de las palabras de Kant parece plausible admitir la presencia de errores aun en la Matemática: precisamente el proceso constructivo procede de manera tal que pone de manifiesto lo infundado, lo arbitrario; es decir, permite revelar posibles errores. De aquí la aceptación de los mismos en el pensamiento kantiano.

Ahora bien, esos errores no afectan, en el fondo, ni al concepto, ni al juicio, ni a la demostración. Y ello porque se muestran como fallos manipulativos, figurales; se muestran como propios más bien de las imágenes, que no de los esquemas que dan paso a dichas imágenes. Manipulación errónea no de los principios constitutivos ni de los esquemas que dan origen a la Matemática, sino del plano empírico, experiencial del hecho manipulativo. Error del sujeto cognoscente, que se aparta del buen manejo de tales reglas en el plano experiencial y que, por ello, puede ser puesto de relieve atendiendo, con mayor precisión, a las condiciones de la construcción en la intuición pura.

2. A pesar de lo hasta aquí indicado, tanto el papel de las definiciones consideradas estipulativas en Kant como su confianza en la certeza matemática han sido discutidos por distintos autores. En concreto, la convicción de que no puede haber elementos incorrectos, de que la intuición pura no puede conducir al matemático a lo que no sean evidencias, certezas intuitivas.

Es lo señalado por Kitcher, quien pretende rebatir a Kant en el sentido de que son los matemáticos los que pueden decidir si hay juicios falsos y, si éste es el caso, se iría en contra, evidentemente, de la confianza kantiana en la certeza de tales juicios. En la misma línea, Resnik, apoyándose en el papel que Kant atribuye a las definiciones matemáticas, considerándolas estipulativas, arbitrarias, pasa a estimar que los juicios matemáticos son analíticos y no sintéticos por seguirse de conceptos estipulados arbitrariamente, por lo que no cabe el error en ellos.

Creo que, en el caso de Resnik, no tiene en cuenta que, según los textos kantianos, las definiciones matemáticas no son, realmente, estipulativas, sino que se muestran, en un caso, como auténticos esquemas; en otros, como convenciones nominales para una construccción ya realizada.

Y, aunque Kant indique que en Matemática se debe comenzar por las definiciones mientras que la filosofía debe terminar por ellas, lo hace en el contexto del uso metódico de la razón, donde también ha afirmado que la Matemática llega al concepto a partir de las intuiciones puras, mientras que la filosofía parte de los conceptos *a priori* del entendimiento puro.

Y no hay contradicción, si se tiene presente que las definiciones matemáticas son auténticos esquemas. Porque ese llegar al concepto no es otra cosa que realizar el proceso constructivo a partir del objeto posible, del fenómeno, para alcanzar el concepto al cual le da significación objetiva, es decir, existencia. Alcanzado, se puede dar una definición de él, en el sentido de que dicha definición encierre únicamente los elementos constructivos que han hecho posible la representación del mismo, su significación objetiva. No hay, por ello, arbitrariedad alguna en este caso.

Y si se pretende partir del concepto matemático, ya he reiterado que el mismo, en Kant, encierra en sí el esquema que conduce a su representación y, con ello, a su validez objetiva. Cuando el concepto no lleva inherente el esquema de la sensibilidad, tal concepto permanecería en el plano del pensamiento puro y, como mucho, en el campo de lo trascendental, por lo que sería impotente, por decirlo así, para obtener una representación, una validez objetiva.

Precisamente los conceptos que llevan inherentes los esquemas de la sensibilidad son, para Kant, los que reflejan las categorías de las magnitudes extensivas; magnitudes extensivas que, a su vez, constituyen los fenómenos, por lo que, precisamente, cabe su afirmación —ya citada y que vuelve a ser otra aplicación del principio de apriorismo— de que la síntesis creadora por la que se construye un objeto en la imaginación es la misma que la que se practica en la aprehensión del fenómeno para alcanzar, desde él, un concepto.

En el caso de Kitcher cabe indicar, simplemente, que su enfoque desvirtúa el original kantiano. Si un matemático señala que hay un juicio falso, lo que realmente hace, desde el plano kantiano, es mostrar un error en el proceso manipulativo u operatorio empírico, un error que habría sufrido aquel matemático que hubiera formulado el juicio original; error por haberse guiado, quizá en exceso, por la imagen sensible, por no haber precisado el esquema constructivo y haber confundido, en él, lo representado con la representación. De hecho he indicado que Kant admite errores en el manipular matemático, pero, en el fondo, no juicios falsos en sí.

Y creo que la concepción kantiana está de acuerdo, realmente, con el hecho de que los matemáticos cometen errores y creen que, a veces, alcanzan un juicio verdadero cuando, *de facto*, en el proceso constructivo han aplicado mal los esquemas. Errores que, como tales, son a corto o largo plazo detectables.

Cabría indicar que, para un kantiano, y en cuanto al juicio, lo que en él se tiene es que, una vez construido, realizado el acto que supone la síntesis judicativa, acto en unidad sintética de apercepción, no cabe hablar de verdad o falsedad respecto a dicho juicio. Como acto sintético en unidad de apercepción, no hay, en el fondo, atribución de predicado a sujeto alguno —que es lo propio del juicio analítico y recuerdo que, aquí con Kant, nos encontramos en la Lógica trascendental y no en la Lógica general pura o lógica formal—, sino mera síntesis propiciada por la experiencia. Y un acto no es verdadero o falso, sino una construcción que produce la evidencia intuitiva, la certeza. Es sólo desde el plano formal desde el que cabría hablar de juicio verdadero o falso, pero ya se indicó que, en el ámbito formal, tales criterios veritativos estaban ausentes.

En un intento de vindicar a Kant, enfrentado con algunos críticos, especialmente Resnik y Kitcher, Risjörd va a adoptar una línea en la que sí cabe el error en los dominios kantianos de la Matemática, y ello en la propia conceptualización. Se apoya en que Kant admite que se pueden definir conceptos en el pensamiento puro que, por lo mismo, no son contradictorios con conceptos propios de un hacer posible matemático; son conceptos que satisfacen las condiciones formales del pensar. Igualmente, se adopta la afirmación kantiana de que, a pesar de ser consistentes, no son construibles porque no se satisfacen las condiciones de la sensibilidad. Es decir, se pueden pensar conceptos consistentes desde lo formal —lo que he calificado de posibilidad lógica—, pero esos conceptos carecen de significación porque son las condiciones de la sensibilidad las que impiden darles una representación en la intuición pura. De aquí la posibilidad de que un juicio sea falso porque falle al ser aplicado a la intuición designada por el sujeto, fallo por el hecho de que pueden establecerse conceptos sin objetos propios.

El mismo argumento se puede realizar para los juicios sintéticos *a posteriori*. Con mayor fundamento, además, porque es en ellos en los cuales sí se produce el error y la falsedad en el acto de atribución de predicado a sujeto cuando en dicha atribución el predicado termina no conviniendo al sujeto. Es lo que hace, precisamente, que los juicios sintéticos *a posteriori* gocen de la naturaleza de contingencia.

Ahora bien, esto no es tener en cuenta que los juicios matemáticos, por sintéticos *a priori,* sólo pueden realizarse mediante una construción que llega al concepto y que, según Kant, jamás puede invertirse el proceso como pretenden ilusoriamente algunos filósofos. No es tener en cuenta que los conceptos matemáticos se incardinan en el campo de la sensibilidad, en la intuición pura, nunca en el pensamiento puro. Y ese incardinarse se debe a que sólo los conceptos que pertenecen a las categorías de la magnitud extensiva son los matemáticos.

Tanto en alguna de las críticas señaladas —de Resnik, Kitcher, Friedmann— como en los intentos de defensa apuntados —Risjörd—, encuentro un cierto desfase, producido quizá porque todos ellos parten del previo conocimiento de la Lógica formal actual. Algo ausente, es evidente, del pensamiento kantiano. Pero es olvidar que Kant ha pretendido marcar unas diferencias radicales entre los dos tipos de Lógica, la general pura o Lógica formal, y la Lógica trascendental, y se ha situado en esta última sin el menor titubeo. Y reitero que sólo cabe aprehender su pensamiento desde esta posición. Todo lo demás es atribuirle una concepción que no es la suya.

3. Creo que hay, en la visión crítica con la que cabe enfocar la Filosofía de la Matemática de Kant, un problema más importante. Lo indiqué en 1.1, «El marco previo», y no es otro que el hecho de la unidad de la concepción filosófica

kantiana. No se pueden desgajar, si se pretende una exposición y no un simple aprovechamiento de ideas, sus pensamientos sobre la Matemática del total de su sistema.

Y, en él, uno de los elementos se centra en la atribución, por parte de Kant, de unas facultades constitutivas al sujeto cognoscente en las que trasvasa, por ejemplo, las condiciones formales que, precisamente, son constitutivas de un determinado espacio en Geometría. Es esta atribución una de las piezas clave de todo el pensamiento pretendidamente epistemológico kantiano, donde se encontraría uno de los núcleos a discutir.

Si se admite que el sujeto cognoscente viene conformado por las facultades que le atribuye Kant y, además, por las condiciones formales del pensamiento puro y las condiciones de la sensibilidad, es claro que no habrá juicios falsos en la Matemática, ni demostraciones erróneas, aunque puedan existir errores manipulativos, puramente empíricos. Pero, en este caso, tampoco cabe hacer interpretaciones acerca del paso de la posibilidad formal a la posibilidad real, como pretenden Parsons o Friedman. Ni discutir el papel de la intuición empírica en correspondencia con la pura... Y ello porque las posibilidades lógico-formales no se pueden representar en lo real ya que, desde el principio, esta representación depende tan sólo de las condiciones constitutivas del sujeto. Esas condiciones obligan a que el mismo obtenga tales representaciones de tan sólo un tipo de magnitudes, las extensivas. El pensar, así, se hace distinto del conocer, y ese pensar carece de posibilidad real, de significación objetiva alguna. Me bastaría citar, aquí, otro texto kantiano:

> la ilusión de sustituir la posibilidad lógica del concepto (según la cual no se contradice a sí mismo) por la posibilidad trascendental (real) de las cosas (según la cual un objeto corresponde al concepto) sólo puede engañar y dejar satisfecho a un inexperto [B 302].

3. EL CONSTRUCTIVISMO MATEMÁTICO

3.1. DOS HACERES MATEMÁTICOS

1. Puede afirmarse que a Kant se le puede considerar como iniciador de una línea en la Filosofía de la Matemática: la calificable de constructivista. Línea que, a primeros de este siglo, adoptan matemáticos como Poincaré, la escuela semiintuicionista francesa o, más radical, Brouwer con el intuicionismo. Adopción no ya por la aparición de antinomias o paradojas en el hacer matemático exclusivamente, como se ha venido sosteniendo de un modo un tanto acrítico, sino por el hecho más profundo de que esas paradojas ponen de relieve la aparición de otro tipo de hacer en la Matemática.

Es un tipo de hacer apoyado en un razonamiento global o conjuntista, de carácter marcadamente existencial. Así, es en él en el que cobra sentido un Axioma como el de elección, que afirma la existencia de una función de elección, pero sin poder mostrar, construir ninguna función de elección concreta, particular; es en él en el que cobra sentido afirmar la existencia de extremo superior, o inferior, de un conjunto acotado sin poder «calcular» dicho extremo; o la afirmación de que existe al menos un elemento entre dos de una sucesión sin poder determinar ninguno de dichos elementos...

Es un tipo de hacer que, en principio, no puede mostrar un objeto o método que dé significación al Axioma mencionado como ejemplo, a cualquier otro método de dicho hacer —y esto último, en términos lo más kantianos posibles—.

La línea constructivista, tras las polémicas de principios de siglo, va a quedar relegada a consecuencia de los avances propiciados por el nuevo hacer, del que Frege había sido figura clave al codificar el lenguaje, la Lógica formal, en la que dicho hacer puede ser expresado. Frente al manejo clásico de las formas lógicas —donde se aceptaba exclusivamente la forma gramatical S-P o, en todo caso, la igualdad ecuacional, procedente del Álgebra—, el nuevo enfoque, el que adoptan Frege y sucesores, va a ser funcional.

Y debo señalar, aquí, que Kant margina del hacer matemático el Análisis, el Cálculo infinitesimal, que es el hacer en el que surge, precisamente, el concepto de función; concepto que, a Kant, se le muestra desconocido.

Desde el enfoque funcional, la forma lógica requiere de predicado y argumento, con lo cual requiere de dominio de definición o conjunto de partida y contradominio, recorrido o conjunto de llegada. Al manejar la función o predicado y el argumento, cabe la generalización y la forma lógica engloba predicados de varios argumentos, relaciones de cualquier aridad posible; así como los cuantificadores sobre esos dominios —sean existenciales o universales...—.

Desde este punto de partida, el enfoque funcional pretende englobar el clásico en el sentido de convertir la forma gramatical S-P en una fórmula de predicados monádica. Es un reduccionismo que no puede estimarse como tal, sino como consecuencia de una auténtica transformación conceptual.

Evidentemente los argumentos han de ser variables que recorren un agregado, conjunto, dominio. Y el paso de fórmula a proposición viene establecido por el proceso de reemplazar, sustituir cada variable por una constante, por el nombre de un objeto del dominio sobre el cual se haga la aplicación satisfacción, o por un proceso de cuantificación, que entraña que al cuantificador se le asocie su dominio correspondiente.

Ahora no se parte de un objeto cualquiera, pero dado como objeto y sobre el cual realizar una construcción o dotarle de unos u otros predicados o relacionarlo con otros objetos, sino que el punto de partida es una clase, sistema o agregado, con unos términos, unas variables, caracterizados por las propiedades de ese agregado. De aquí que el cierre de la fórmula por el cuantificador no haga referencia a un objeto, sino a todos los del agregado.

Ello implica, en el momento de realizar una interpretación semántica, que en la Lógica de predicados se exige la existencia de agregados o dominios infinitos. Exigencia a la que tuvo que llegar Frege, sin pretenderlo, cuando manejaba la extensión ligada al concepto —la que componían los objetos que caen bajo un concepto o, en otras palabras, el dominio de la función—; es a la que tuvo que llegar Russell cuando debió incluir el axioma del infinito en su sistema lógico, a pesar de todas sus protestas por el carácter existencial, no formal, del mismo...

No tuvieron más remedio porque, de raíz, el hacer matemático que pretendían formalizar partía del agregado para llegar, si podía, al objeto singular, a la función de elección, por ejemplo, invirtiendo el proceso del hacer que he venido calificando de figural, que partía del objeto para alcanzar, en el proceso constructivo, el agregado o universal de todos los objetos representados por el primero.

Como ya señaló con plena nitidez Poincaré, en el nuevo hacer lo finito no se hace más que un rincón del infinito y se llega a lo finito a partir del infinito. Y era lo puesto de relieve, ya, por Dedekind en su caracterización de la estructura de los números naturales. Y bastaría ver los trabajos de Tarski para comprobar las distintas definiciones de finitud, incompatibles entre sí, que se pueden elaborar desde el hacer global, donde el concepto que muestra auténtica dificultad de caracterización es, precisamente, el concepto de finito; el de infinito, ninguna, porque es el punto de partida.

Desde este enfoque carece de sentido el proceso figural en el que se parte del dato concreto del objeto y se predican del mismo una serie de propiedades que hay que construir. Carece de sentido partir de la línea recta, por ejemplo, como figura entre dos puntos; la recta, ahora, desde el nuevo enfoque, es un conjunto de infinitos elementos... En el nuevo hacer, en el global, sólo queda como apoyatura el proceso estrictamente derivativo.

Por esto último, desde este enfoque cobra todo su sentido un programa como el reduccionista, que veía a la Matemática como una mera prolongación de la Lógica. Consecuente, el razonamiento matemático, como tal, no existe, es razonamiento lógico, aceptando que el mismo, desde la Lógica formal, no se plasma más que en una sucesión de fórmulas obtenibles, cada una, por ser o axioma o transformada de los axiomas por unas reglas de derivación sintáctica previamente establecidas.

Si, en ese proceso derivativo, estrictamente sintáctico, surge alguna sorpresa en cuanto a la interpretación de alguna fórmula, ello no pertenece a la Lógica, sino al plano del descubrimiento, al plano psicológico, que nada tiene que ver en estos terrenos. Unos terrenos en los que la Lógica es estrictamente formal. Pero quien argumenta así olvida agregar: Lógica matemática. Olvida agregar: Lógica «creada» para fundamentar la Aritmética y modelada según la Aritmética, modelada según el plano funcional.

Argumentando en favor de este enfoque global, se pretende que la universalidad de las leyes lógicas y científicas basta para mostrar que la cuantificación sobre dominios infinitos no es eliminable por ningún conjunto finito de proposiciones. Es decir, que un posible reduccionismo finitista es imposible; lo que equivale a indicar que este tipo de hacer es imposible de reducir al hacer figural. Y lo que habría que haber visto no es el intento de reduccionismos mutuos y su imposibilidad, sino que esa imposibilidad se debe al hecho de que hay dos matemáticas diferentes, una de carácter finitista, figural y constructiva, y otra de carácter existencial, global, infinitista.

Y desde esta posición es desde la que cabe considerar a Kant como uno de los primeros pensadores y sistematizadores de la Matemática finitista, constructiva, mientras que corresponde a Frege, entre otros, la sistematización y problematización del otro tipo de hacer, existencial, global. Y desde esta posición se muestran desenfocadas las descalificaciones a Kant y a los constructivistas porque en su Filosofía de la Matemática no cabe el hacer conjuntista, global. Y lo mismo puede decirse de las pretensiones de poner de acuerdo a Kant con tal tipo de hacer global intentando elaborar constructivismos conjuntistas y teoría de conjuntos a partir del infinito.

Haciendo la salvedad de que no hay obstáculo para que, apoyándose en Kant, en alguna de sus sugerencias, se pretenda un enfoque constructivista de aquellas zonas de la Matemática que admiten tal enfoque. Lo que no quiere decir que tales elaboraciones puedan adscribirse a Kant o que entren en su cuadro de pensamiento.

2. A partir de la década de los treinta, y tras los trabajos de Gödel, Tarski, la escuela norteamericana..., surgió

un nuevo concepto, aunque el término fuera muy clásico: el de algoritmo, ligado ahora a las funciones recursivas. Manejo de funciones recursivas, de la recursividad, que pronto se mostrará equivalente a la noción de computabilidad, máquinas registradoras, máquina de Turing... Y el matemático inglés, Turing, planteará, de modo inmediato, la pregunta por el enlace Mente-Máquina.

Problema al que se liga, inmediato igualmente, un tan viejo problema como el anterior, el problema de decisión. Al demostrar su indemostrabilidad, aparece la cuestión de la decidibilidad efectiva de los cálculos. El teorema de completud de la Lógica de primer orden, que establece que toda verdad puramente lógica puede ser demostrada en un simbolismo lógico, se interpretará como el hecho de que la Lógica de primer orden puede ser reducida, en cierto aspecto, a una computación. Cualquier teorema suyo se demuestra sin más que establecer una derivación formal. La Lógica de primer orden caería, así, bajo el ámbito de lo computable. No sería otra cosa que el ropaje de dicho ámbito. Y ello a pesar de la demostración de su indecidibilidad por parte de Church.

Por el contrario, la incompletud de la Aritmética impide caer en ese ámbito. De aquí que la Aritmética se pueda considerar que va más allá de la Lógica de primer orden a la que se pretendió reducir. Un más allá que implica su no reduccionismo y, consecuente, que el tipo de razonamiento matemático, el aritmético al menos, no pueda identificarse con el razonamiento lógico.

Lo cual supone, en cierta medida, una vuelta, una reconsideración de los enfoques constructivistas y, con ellos, de la posición kantiana, al aceptar que la razón, en el fondo, no comprende más que lo que ella misma produce según sus reglas.

Desde este renovado interés por la posición kantiana, por el constructivismo, lo primero en lo que conviene insistir es en el hecho de que existen, al menos, dos diferentes haceres matemáticos, lo cual implica que, si no se puede reducir el constructivo-figural al conjuntista existencial-global, tampoco éste puede ser reducido al primero, como pretenden algunos actualmente al lanzar como consigna la reelaboración de la Matemática desde el enfoque constructivista o desde, al menos, un punto de vista estrictamente computacional, algorítmico. Se olvidan de los límites que este enfoque tiene, como lo tiene todo enfoque constructivo. Y me limito a señalar la imposibilidad lógica de diseñar un algoritmo para resolver cualquier problema matemático, simple consecuencia del teorema de parada...

3.2. RASGOS DEL HACER MATEMÁTICO CONSTRUCTIVO

1. Con esa precisión, puede estimarse que Kant establece con nitidez alguno de los rasgos básicos del enfoque constructivista matemático que pretende resolver una cierta problemática. Problemática que se muestra nítidamente en Kant, como he tratado de mostrar en las páginas anteriores y que cabe resumir aquí en las palabras: naturaleza del número natural, caracterización del razonamiento matemático, aplicación de la Matemática a las ciencias de la naturaleza, método axiomático euclídeo, problema del compromiso ontológico, metodología del hacer matemático, fundamentación de la Matemática... Problemática que se pretende resolver, insisto, desde un enfoque constructivista, aunque en Kant tal resolución venga mediatizada por su sistema filosófico, sistemático, general.

Son los rasgos de la solución constructivista los que cabe resumir, ahora, con una precisión: se abandona ese sistema total de Kant para únicamente mostrar los puntos distintivos aceptables por el constructivista. Exposición de elementos que sirve, a la vez, de resumen valorativo de la posición kantiana expuesta en lo anterior. Entre estos rasgos se tienen:

1) La construcción matemática se concibe como referida, siempre, a un objeto singular, a un individuo en el sentido de que esa construcción se realiza a través de la presentación figural de un objeto, figura o fórmula operatoria. Bien entendido que no se parte de dicho objeto figural como objeto material o concreto en sí, sino que esa representación se traza a partir del concepto que lo posibilita. La noción de esquema como método o regla constructiva es, aquí, esencial para diferenciar la imagen de la regla constructiva de dicha imagen. Igualmente, para superar la dificultad entre propiedades relevantes y accidentales de la imagen y la posibilidad de alcanzar, por ello, la universalidad de la construcción.

2) Por tal representación, la construcción se concibe siempre como un acto intuitivo. Hay que tener la captación del objeto en sí y no por referencias a propiedades. Intuición como captación sensible pero, a la vez, como esquema.

Es decir, en el término «intuición» se muestran dos aspectos diferentes: el primero, el señalado de captación sensible del objeto representado; el segundo, como proceso constructivo por el que trazar la imagen a captar o realizar el cómputo marcado por la representación.

Es un doble papel del término «intuición» característico, por ejemplo, de las fórmulas numéricas donde se tiene la captación sensible de la forma de sus componentes pero, más importante, la captación del método que dichas componentes entrañan. Si es más propio de lo aritmético, por ejemplo, también se encuentra en la Geometría con la distinción, igualmente, de imagen y esquema. Pero donde alcanza este doble papel de intuición todo su sentido es en el hacer computacional: el algoritmo es, claramente, una fórmula simbólica ostensiva, pero lo que manifiesta en ella es la regla o método del algoritmo que esa ostensión muestra.

Noción de intuición, así, doble, implícita en Kant y que tiene su campo de aplicación no sólo en lo aritmético y geométrico, sino en lo computacional.

3) Los procesos constructivos son los que generan o producen los objetos matemáticos como esquemas. Los elementos que maneja el matemático no son, pues, objetos en sí ni conceptos; son objetos posibles cualesquiera dados por sus construcciones, por sus esquemas operatorios.

Esta antropologización evita las cuestiones de los compromisos ontológicos, fundamentalmente la ontologización realista platónica a la que se ve abocado el hacer matemático existencial global; y, a la vez, la dificultad del empirismo de intentar alcanzar una universalidad en el concepto general matemático.

En la generación o producción se muestra una representación fenoménica singular —lo que permite asegurar la existencia del objeto— o se establece una regla o método que produzca, de modo efectivo, el objeto individual que denotan.

Desde este enfoque, el hacer matemático es, claramente, finitista e impide realizar afirmaciones existenciales que no vengan apoyadas por reglas efectivas de construcción o producción. Es la posición que adoptará el constructivismo más radical de Brouwer y, más reciente, escuelas como la soviética de Markov con su matemática recursiva, o los ligados en torno a la interpretación computacional de la Matemática.

Es claro que el infinito queda como un mero pensar, no como un conocer en términos kantianos, y sólo aparece como proceso de construcción iterativa, como proceso que puede ser proseguido sin límite alguno; el único infinito aceptable es el potencial.

4) Los procesos constructivos se realizan en determinados campos de juego: los establecidos atendiendo a una serie de principios aceptados como postulados o axiomas. Es decir, mediante el manejo del método axiomático postulacional, no el axiomático formal. Caracterizado el campo por esos principios constitutivos —sea el geométrico, con sus diversos espacios; el algorítmico, con sus distintos campos numéricos de decisión; el analítico infinitesimal, con sus reglas de derivación e integración...—, el matemático va realizando, en él, las diferentes construcciones que encuentran, así, su validación en el interior del campo, y sólo en su interior. Como tal validación, los actos productivos mostrarán su certeza intuitiva en dicho campo, no transportable a otros.

Los principios constitutivos no se estiman como dados de una vez para siempre, sino que van surgiendo en el proceso constructivo del conocimiento. Así, el de inducción completa que aparece como tal método demostrativo con Pascal, convirtiéndose en principio unificador de la Aritmética; o el principio denominado tesis de Church-Turing, que aparece hacia 1936 y se convierte en el principio unificador de la Teoría de la computabilidad... Y ello en paralelo a lo que ocurre en otros campos cognoscitivos; así, y como mero ejemplo, por el principio de conservación de la energía, que surge hacia 1845 por parte de Meyer, Joule, Helmholtz..., y se convierte en principio unificador de la Física.

Principios constitutivos, unificadores de campos cognoscitivos que no requieren más que una justificación, no demostración, para su aceptación como tales principios unificadores.

Los cuatro rasgos aparecen en Kant aunque, en él, se muestran muy restringidos, fundamentalmente en cuanto a la aceptación de todas las consecuencias apuntadas. Así, en cuanto a la aceptación de la variación constitutiva de los principios. O, al aceptar que el número es esquema, no objeto ni concepto, Kant no alcanza la visión de que también, como esquemas o reglas, los números vienen delimitados en sus campos propios, en aquellos en los cuales son auténticamente productivos. Ello le hubiera conducido a la admisión de fórmulas universales numéricas, lo que, es claro, Kant niega tajantemente. Hubiera supuesto la elaboración de sistemas formales de segundo nivel, no como los geométricos, de primer nivel y, realmente, ya elaborados plenamente desde Euclides.

2. En Kant hay un auténtico problema, y es su concepción idealista trascendental, que le conduce a sostener que *las* formas del espacio y el tiempo son las formas de la sensibilidad del sujeto cognoscente, las precondiciones para cualquier experiencia. Constitución de sujeto cognoscente por la cual las proposiciones geométricas han de ser sintéticas *a priori*, apoyadas en la intuición pura del espacio. Proposiciones, precisamente, conformadoras de nuestra experiencia.

Debo recordar, aquí, que es punto en el que Frege se mantendrá con Kant a ultranza, y llegará a sostener que las Geometrías no-euclídeas son meras ficciones del pensar, con el mismo rango que la alquimia o la astrología... Años antes, Hamilton, como recuerda Giedymin (1991), venía a sostener hacia 1833 que ninguna persona inteligente podía dudar de la verdad de las propiedades clave de las líneas paralelas tal como las plasmó Euclides. Y, si Kant o

Hamilton desconocían la elaboración de las Geometrías no-euclídeas, no puede decirse lo mismo de Frege.

Si recuerdo la consideración radical fregeana respecto a tales geometrías es porque no tiene más remedio que sostenerla si acepta el punto de partida kantiano: la constitución del sujeto cognoscente. Esa constitución es la que impide que construcciones formales consistentes, pero sin representación figural propia, sean consideradas conocimiento; y, si pretenden serlo, se las tachará de ficciones y pseudociencias, como la alquimia, la astrología... No es, por ello, mera creencia más o menos plausible de Kant o de Frege, sino un elemento incardinado en su sistema total.

Sistema que, en Kant, conduce igualmente a confinar la Lógica formal a un mero canon negativo de la razón, no viendo que esa razón puede elaborar sistemas lógico-formales como nuevas estructuras cognoscitivas.

Si ese sistema, en cuanto a la constitución del sujeto cognoscente, se relaja, y se admite, como he venido sugiriendo, que el sujeto no viene condicionado por unos principios constitutivos únicos en cuanto estructuradores de la forma espacial de la sensibilidad, cabe la producción, por parte de dicho sujeto, de otros principios, constitutivos ahora no de su forma de la sensibilidad, sino de estructuras geométricas en el espacio que constituye a dicha forma sensible. Consecuente, cabe admitir otras posibles construcciones geométricas y formales, otras posibles construcciones matemáticas según nuevos principios unificadores.

Una sugerencia como la anterior implica, evidentemente, el rechazo de que los juicios geométricos sean sintéticos *a priori*. Más fundamental, supone rechazar la propia concepción kantiana de que la epistemología concierne con las leyes del sujeto cognoscente cuando ese sujeto se estima como un ser inmutable. Supone rechazar lo que he calificado de ahistoricismo kantiano y aceptar, en alguno de los enfoques que pretendan superar tal limitación, procesos evolutivos para la constitución del propio sujeto constructivo y no ya para la admisión de unos u otros principios constitutivos del saber.

Es la línea seguida, en parte, por ejemplo, por Poincaré, para quien es la razón la que construye la Matemática, pero en su uso constructivo ella misma viene condicionada, en su hacer, por tal construcción.

Una sugerencia como la anterior, con la solución de admitir un evolucionismo, supone una transformación radical en cuanto al pensamiento kantiano, al que no sé si cabría atribuir esta posibilidad sin una total deformación de tal pensamiento.

3. Otro punto se muestra también esencial en cuanto a la problemática de la Filosofía de la Matemática: su aplicabilidad a la Ciencia de la naturaleza. Para Kant dicha problemática no existe realmente, queda disuelta atendiendo a la constitución del sujeto cognoscente y a la representación de los fenómenos ante ese sujeto a través de las formas espacio-temporales; no hay Ciencia de la naturaleza sin Matemática porque tales ciencias versan acerca de las magnitudes extensivas y, por ello, vienen conformadas, constituidas por principios matemáticos. Como he reiterado, no se trata de aplicación de Matemática a ciencias, sino que, en Kant, se trata de constitución de las ciencias a partir de la Matemática.

Es interesante observar que, incluso, el método característico de las ciencias experimentales, el experimento, viene en Kant conformado por un proceso del mismo tipo que el productivo matemático: es la razón quien busca, mediante la pregunta adecuada, la respuesta adecuada, para lo cual lo hace mediante un previo protocolo dirigido, siempre, por la razón. En el experimento se produce el fenómeno, la representación sensible de la pregunta de la razón en el dominio propio en el que tenga sentido el experimento.

Una enorme ventaja, la de la epistemología kantiana, concretada a este aspecto. Ventaja que, sin embargo, se vuelve radicalmente problemática si se rechaza su punto de partida, el de la constitución del sujeto cognoscente en esas dos facultades así como su rechazo a que pueda alcanzarse el conocimiento en sí de las cosas; si se rechaza su giro copernicano por el que serán las cosas las que se regulen por el conocimiento y no sea el conocimiento el que quede regulado por las cosas.

Aquellos que han pretendido conservar la ventaja kantiana, aun rechazando ese punto de partida, se han visto abocados, sin embargo, a ciertas formas de convencionalismo o positivismo donde se trata de estudiar no la cosa en sí, sino las relaciones y leyes entre fenómenos con la aceptación del dato amorfo al que el sujeto cognoscente da e impone sus leyes cognitivas. Con una curiosa distorsión: mientras que se acepta sin grandes dificultades que, por ejemplo, la Mecánica constituye conocimiento de la naturaleza, aunque sea de los fenómenos y no de la cosa en sí, se plantea como problema que la Geometría o la Matemática en general constituya conocimiento, y ello a pesar de argumentos como los de indispensabilidad de esa misma matemática para la propia Mecánica...

3.3. A MODO DE CONCLUSIÓN

He tratado, hasta aquí, de mostrar algunos de los elementos de la Filosofía de la Matemática de Kant: problemática de esa Filosofía e intentos de solución de la misma. Y ello a través de unos rasgos que caracterizan un determinado tipo de hacer matemático: el figural-constructivo.

Pero también he indicado la existencia de otra línea, consecuente con la existencia de otro hacer matemático, el existencial-global, el que surge tras la ruptura epistemológica que se produce en el hacer matemático en los entornos de 1827. Otra línea que, entre otros, sistematizará Frege.

Si hasta los entornos de 1970 la Filosofía de la Matemática se centró en una problemática apoyada en el enfoque fregeano, tomándolo como la visión ortodoxa, una vuelta a Kant permite alcanzar no otra visión excluyente de la anterior por convertirla en también ortodoxa, sino que permite precisar los ámbitos propios de cada una de las problemáticas que ambas visiones subtienden, con sus intentos de solución, sin pretender reduccionismos como en el pasado, que se me muestran inconsecuentes.

Una vuelta a Kant permite reconocer, claramente, la validez del planteamiento de ambas líneas de pretendido fundamento del hacer matemático en sus campos propios, sin eliminaciones dogmáticas de uno en beneficio del otro.

Permite reconocer, a la vez, que dicho intento de fundamentación definitiva, de una vez para siempre, y en el que coinciden desde Kant a Frege, con Russell, Hilbert, Brouwer..., carece de sentido. Que sólo tiene sentido el intento de caracterizar, no fundamentar, cada una de las formas de la Matemática, cada uno de los aspectos en los que se manifiesta el uso constructivo de la razón pura.

Es el mejor homenaje a la concepción, inherente a todo matemático, de ese uso constructivo de la razón pura, de la razón matemática; manifestación de una de las Experiencias de la Razón, tanto en el hacer constructivo-figural como en el existencial-global, como en el computacional, la experiencia de la razón propia del Ámbito conceptual.

REFERENCIAS

ALBADALEJO, T. (199?): «Poesía y razón poética: Gianvincenzo Gravina», en Simposio *Novedad y tradición en la Literatura del siglo XVIII*, a publicar en Actas.

ASPRAY-KITCHER (eds.) (1988): *History and Philosophy of Modern Mathematics*, Minnesota Studies in the Philosophy of Science XI, Univ. of Minnesota Press, Minneapolis.

— (1988): «An Opinionated Introducion», en Aspray-Kitcher (eds.), 1988, 3-57.

BEESON, M. J. (1988): «Computerizing Mathematics: Logic and Computation», en Herken (ed.), 191-225.

BETH, E. W. (1961): «Primera parte», en Beth-Piaget, 1961.

BETH-PIAGET (1961): *Epistémologie mathématique et Psychologie*, PUF, París.

CHÁVARRI, E. (1981): «Incursiones de la Lógica en la Crítica», *Estudios Filosóficos,* XXX, Valladolid, 33-62; en Chávarri, 1990.

— (1990): *Ensayos en torno a la racionalidad*, San Esteban, Salamanca.

DE LORENZO, J. (1980): *El método axiomático y sus creencias*, Tecnos, Madrid.

— (1981): «Matemática y crítica», *Estudios Filosóficos,* XXX, Valladolid, 63-95.

DEAÑO, A. (1980): *Las concepciones de la Lógica*, Taurus, Madrid.

FRIEDMAN, M. (1990): «Kant on Concepts and Intuitions in the Mathematical Sciences», *Synthese*, 84, 213-257.

GIEDYMIN, J. (1991): «Geometrical and Physical Conventionalism of H. Poincaré in Epistemological Formulation», *Stud. Hist. Phil. Sci.*, 22-1, 1-22.

GOCHET-GRIBOMONT (1990): *Logique*, Hermes, París.

HERKEN, R. (ed.) (1988): *The Universal Turing Machine*, Oxford Univ. Press, Oxford.

HINTIKKA, J. (1967): «Kant on the mathematical method», *The Monist,* 51, 352-375.

— (1972): «Kantian Intuiotinism.», *Inquiry*, 15.

— (1973): *Logic, Language-Games and Information*, Oxford Univ.

Press, Oxford; trad. cast. *Lógica, juegos de lenguaje e información. Temas kantianos de filosofía de la Lógica*, por A. García Suárez, Tecnos, Madrid, 1976.

HUME, D. (1981): *Investigación sobre el conocimiento humano*, trad., pról. y notas de J. de Salas, Alianza, Madrid.

KANT, M.: *Crítica de la razón pura*, pról., trad. y notas de Pedro Ribas, Alfaguara, Madrid.

KITCHER, P. (1975): «Kant and the Foundations of Mathematics», *The Philosophical Review*, 84, 23-50.

— (1983): *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford Univ. Press, Oxford.

PARSONS, C. (1964): «Infinity and Kant's Conception of the Possibility of Experience», *Philosophical Review*, 73, 182-197; en Parsons, 1984.

— (1969): «Kant's Philosophy of Arithmetic», en Morgensbesser, Suppes, White (eds.), *Philosophy Science and Method: essays in Honor of Nagel*, St. Martins, Nueva York; en Parsons, 1984.

— (1984): *Mathematics in Philosophy*, Cornell Univ. Press, Ithaca.

PLA I CARRERA, J. «Alfred Tarski i la teoria de conjunts», *Theoría*, 11, San Sebastián, 343-417.

RESCHER, N. (1973): *The Primacy of Practice*, Basil Blackwell, Londres, trad. cast., *La primacía de la práctica*, por Ana Sánchez-Torres, Tecnos, Madrid, 1980.

RESNIK, M. D. (1980): *Frege and the Philosophy of Mathematics*, Cornell Univ. Press, Ithaca.

RISJÖRD, M.(1990): «The sensible foundations for mathematics: a defense of Kant's view», *Stud. Hist. Phil. Sci.* vol. 21, n.º 1, 123-143.

SCHMIT, R. (1988): «Le constructivisme dans la Logique de Hintikka», *Archives de Philosophie*, 51, 665-681.

STRAWSON, P. F. (1966): *The bounds of Sense*; trad. cast. de Thiebaut, *Los límites del sentido*, Ed. Revista de Occidente, Madrid, 1975.