Fundamentos versus Filosofías del Hacer matemático

Javier de Lorenzo

Fundamentos y Filosofías del Hacer matemático son dos maneras de Pensar en la Matemática. La primera es un Hacer interno, matemático, apoyado en unas creencias y valoraciones que constituyen, a la vez, Filosofías de ese Hacer. La segunda es un enfoque externo que toma la Matemática como su campo de reflexión.

La línea de Fundamentos trata de superar las grietas que, de siempre, se producen en el Hacer matemático. La de Filosofía de intenta ir más allá de ser una crítica de la razón constructiva para lo que se apoya en la génesis e historia de la Matemática así como en lo que realmente hacen los matemáticos; en la actualidad, se adentra en cuestiones culturales, antropológicas, sociológicas, lingüísticas…

Hasta finales del siglo XX se identificaba Filosofía de la Matemática con Fundamentos de la Matemática. Y estos se centraban, por modo casi único, en la exposición de tres escuelas nacidas a caballo de los siglos XIX y XX: Logicismo, Formalismo, Intuicionismo. El Logicismo se dejaba a un lado en cuanto a Fundamentos y todo quedaba en el choque de dos grandes matemáticos: Brouwer y Hilbert, con sus pugnas de los años veinte. Se tenía la igualdad

Filosofía = Fundamentos = Polémica Hilbert-Brouwer.

Es igualdad que se me muestra como no correcta al igual que tampoco es adecuado identificar por modo exclusivo un Hacer de Fundamentos con lo realizado por los miembros de las tres Escuelas antes mencionadas.

Fundamentar la Matemática se me presenta como un Hacer con doble cara apoyado en unas creencias y valoraciones que se asumen de modo acrítico. Es un Hacer interno matemático en el que se construyen, matemáticamente, unos productos matemáticos que contribuyan a dar certeza a otros productos matemáticos. Pero Fundamentar muestra otra cara: las creencias y valoraciones que la entornan permiten construir una visión del Hacer matemático que constituye una Filosofía de ese Hacer.

Cualquier intento de fundamentación no puede ser neutral: por un lado, y desde su origen, se apoya en unas creencias, en ideologías que marcan las diferencias entre unas y otras posibles escuelas, entre unos y otros intentos de fundamentación. Por otro lado, desde cada una de esas posibles escuelas se pretende no solo fundamentar el Hacer matemático sino que se intenta anular a las demás. Anulación en lo conceptual, en lo personal, en lo académico… Las Escuelas matemáticas constituyen redes sociales que tratan de ocupar todo el terreno y ello supone que no lo ocupen las demás.

Por su lado, la Filosofía es, siempre, un enfoque exterior a la Matemática y no sustantivo porque no se hace filosofía, sino filosofía de, filosofía adjetiva. Un pensar en el que se intenta averiguar de qué trata el hacer matemático y, si se produce un cuerpo de conocimientos, si ese conocimiento contiene o no verdades y, de contenerlas, de qué tipo son y cómo alcanzarlas. O se plantea el papel del Hacer matemático en las ciencias, en el individuo, en la sociedad –a través de la educación, la enseñanza…-; o se pregunta por la universalidad de este Hacer, por el papel que tiene *su* lenguaje, por los valores que lo entornan, por su génesis, sus rupturas y estilos…

La diferencia entre Fundamentos y Filosofía se enlaza con las barreras que ya planteara Kant: el conocimiento de la physis –y la matemática proporciona la base para ese conocimiento- es diferente a la filosofía, a la metafísica, que ha de centrarse en tres grandes temas: Dios, el mundo, el espíritu; temas de los cuales no hay conocimiento sino saber. Y, radical, para Kant no se puede hacer filosofía con la matemática ni obtener conocimiento con la filosofía. Dos culturas diferentes: los Fundamentos producen conocimiento, la Filosofía produce saber acerca de ese conocimiento.

Línea de Fundamentos

Ligado a la Matemática hay una creencia básica: su seguridad, su certeza. Manifestaciones de esta creencia, se tienen expresiones “como 2+2 son 4”, o “ni Dios puede modificarlas”. Una creencia que da como imagen de la Matemática ser un Hacer monolítico, bien fundamentado, con conceptos bien definidos y proposiciones bien demostradas que se articulan en una teoría hipotético-deductiva con el dato previo y explícito de unos axiomas explícitamente expuestos…

Y, sin embargo, frente a esta creencia, frente a esta imagen radicalmente acrítica y ahistórica, el Hacer matemático ha mostrado grietas en todos los campos y desde siempre. Ni es un Hacer monolítico, ni procede en su construcción por método hipotético-deductivo alguno, ni sus conceptos de base han estado siempre perfectamente definidos ni sus proposiciones estrictamente demostradas…

En el Hacer matemático existen y han existido grietas, conceptos de base difusos, proposiciones aceptadas sin demostración o con demostraciones erróneas durante años… aunque esas grietas hayan parecido sectoriales al menos hasta los finales del siglo XIX. Y, a pesar de ello, los matemáticos están convencidos de que serán subsanables, reparables; que no porque haya grietas el edificio matemático se va a derrumbar o que por su existencia lo que se va construyendo no sea matemática. Los matemáticos aceptan en general el dictum de d'Alembert: seguid, la fe vendrá después.

Como afortunadamente hay grietas, hay matemáticos que tratan de restañarlas, que tratan de resolver los problemas que engendran. Aunque se acepte el dictum de d'Alembert o se trate de convivir con la posible existencia de la contradicción como hará Nicolás Bourbaki, por ejemplo, hay que superar, restañar esas grietas.

Con las palabras anteriores estoy afirmando que el tema de Fundamentos va más allá de la imagen que se detiene en las tres escuelas que he mencionado al principio porque desde siempre, y como siempre han existido grietas, se ha intentado restañarlas, obtener unos Fundamentos seguros para el edificio matemático o para aquellas partes del mismo que se han visto afectadas.

En brevísimo esquema me detengo en la Geometría, la disciplina considerada desde siempre como la más segura de todas. Es la que da nombre al "geómetra", a quien trabaja la Matemática, reemplazando al término "matemático" porque éste se identificaba con el de astrólogo hasta bien entrado el siglo XVII.

En este terreno la noción de paralelismo ha sido una grieta permanente, el "escándalo de la geometría" como lo calificaría Bolyai padre, y ello desde sus comienzos, desde su formulación como Postulado V por Euclides. Y han sido permanentes los intentos de restañarla. Y ya en el primer tercio del siglo XIX, Gauss, Lobachevski, Bolyai construyen nueva geometría métrica que, junto a la riemaniana, compondrán las denominadas geometrías no-euclídeas por antonomasia.

Geometrías imaginarias porque se mantiene una creencia: el espacio de la naturaleza, de la physis, es métrico euclídeo, y la geometría es el estudio de ese espacio por lo cual sus proposiciones son verdaderas con verdad ontológica por adecuación a la physis. Y aquí incide otra creencia, ahora en lo epistemológico: ese estudio se incardina en la percepción sensorial y se admite, en línea kantiana, la visualización de la geometría métrica euclídea. Aunque, de hecho, el paralelismo, la geometría métrica euclídea, sea lo más antiperceptivo posible.

Es interesante observar que la creencia en la visualización de la geometría métrica euclídea es una creencia que va en contra de la Ciencia newtoniana que se ha construido desde otra creencia: el conocimiento de la physis se realiza teniendo en cuenta las cualidades primarias atribuibles a los cuerpos y no las secundarias que son las que realmente percibimos sensorialmente. El conocimiento científico se ha alzado contra el conocimiento del sentido común como una construcción simbólica apoyada en la matemática aceptando la creencia de que el espacio de esa construcción simbólica es métrico euclídeo aunque no visualizable, no perceptible. Se deja en el aire cómo alcanzar esa construcción simbólico-conceptual desde lo sensorial perceptivo.

Matemática aplicada: Geometría como Ciencia Natural y sus Fundamentos

Gauss, desde la construcción de la geometría no-euclídea se plantea –como lo hará por su lado Lobachevski- la cuestión de qué geometría es la propia del espacio y, con ello, rechaza la posición kantiana de que el espacio es una forma a priori de nuestra Sensibilidad y, por ello, de la intuición. Lo hace explícito en carta a Bolyai padre de 1832 cuando le escribe: “Es precisamente en la imposibilidad de decidir a priori entre ∑ (geometría euclídea) y S (geometría no-euclídea) en la que tenemos la más clara demostración de que Kant estaba equivocado al afirmar que el espacio es solo una forma de nuestra intuición”.

Como consecuencia, Gauss escinde la Matemática en dos: aplicada, pura. En la primera, como miembros de las Ciencias Naturales, incluye la Mecánica racional, la Geometría. En la matemática pura es la razón quien dicta sus leyes: el número es “puramente un producto de nuestro intelecto” como escribe en 1829 a Bessel y, consecuente, todo lo que de él se deriva, la Aritmética, reina de las Matemáticas; en la Matemática aplicada es la physis la que dictamina sus posibles leyes o principios. Es una escisión que aceptarán a lo largo del siglo XIX todos los matemáticos: la Geometría como ciencia empírica del espacio, mientras que la Matemática pura se construye básicamente por el honor del espíritu humano.

A esa creencia contribuirá la creación por parte de Monge de la Geometría Descriptiva, secreto militar en un principio por sus aplicaciones. Clave para la Arquitectura, para la ingeniería, ahonda más aún el enlace de la Geometría con las consideradas ciencias aplicadas que constituyen lo primario en la fundación de las Escuelas Politécnicas por parte de la Revolución francesa.

En el siglo XIX la Geometría tiene un desarrollo espectacular: se le puede considerar el siglo de oro de la Geometría. Se construyen la descriptiva, la diferencial, las métricas no-euclídeas, la Proyectiva… Pero al considerarse Ciencias Naturales, empíricas, todas ellas carecen de la seguridad que se atribuye a la Matemática pura, a la construida por la sola razón a pesar de lo querido por Kant. Se ha producido una escisión, unas grietas en cuanto al estatuto epistemológico de ambos haceres. Y si hay proliferación de geometrías, también el siglo XIX verá una proliferación de intentos de Fundamentar esas geometrías. Intentos de Fundamentos de la Geometría muy diferentes entre sí, mostrando que no hay uniformidad en los diagnósticos ni en sus posibles soluciones.

Desde el curso 1873-74 Moritz Pasch desarrolla unas lecciones de Geometría que apoya en dos de las creencias que he ido mencionando: la Geometría tiene su origen en la experiencia, en lo empírico por un lado; como lo empírico sin más no produce conocimiento seguro, esa geometría tiene que ser fundamentada porque se admite que tiene que ser un conocimiento matemático y, por ello, seguro e indubitable. Desde estas creencias, el matemático ha de captar perceptivamente los elementos primeros, los conceptos básicos, indefinibles por primarios; captados y formuladas sus relaciones en axiomas, el geómetra se ha de olvidar de cualquier tipo de figura, de representación salvo del esquema primario, y se centra en desarrollar la geometría de manera estrictamente deductiva, por la sola razón.

En el Prólogo a la edición alemana de 1882 de **Lecciones de Geometría Moderna** en la que plasma las lecciones que lleva impartiendo desde 1873, se lee:

> En las tentativas hechas hasta el presente para establecer los *fundamentos* de la Geometría de un modo que responda a las exigencias cada día más acentuadas, no se ha hecho resaltar claramente en todo su valor el *origen empírico* de la misma (p. vii) (soy yo quien enfatiza)

Y agrega poco después

> Limitándose desde un principio al núcleo empírico, conserva la Geometría el carácter de *ciencia natural*, diferenciándose de las demás en que sólo necesita tomar inmediatamente de la experiencia un muy reducido número de conceptos y leyes. (p. vii-viii)

Ciencia natural, su origen epistemológico es empírico. Origen que se encuentra, por modo exclusivo, en la "percepción de los sentidos" por lo que

> no es lícito referirse a la 'intuición' o a la 'imaginación' como fuentes especiales de conocimientos matemáticos (p. 282)

como precisa en Nota agregada en la edición de 1887. Lo obtenido por la percepción de los sentidos es lo que se ha de organizar de manera puramente deductiva a partir de los conceptos y axiomas intuidos…

Como notas incidentales quiero indicar, en primer lugar, que en el Prólogo a la edición española que escribe en 1912, Pasch reconoce que en la treintena de años transcurridos desde la primera edición de su libro han realizado

> los geómetras una gran labor relativa a la formalización de axiomas y definiciones, a la división de los axiomas en grupos, a la independencia entre unos y otros conceptos y teoremas. (p. ix)

En 1912 Pasch, en ese Prólogo, en las palabras que he citado, parecería que hace una referencia explicita a la obra de Hilbert de 1899 pero lo que hace es recomendar un libro que, según él, contiene todos los avances señalados: **Los Fundamentos de Geometría** de Schur, publicados en 1909. No cita, para nada, la obra de Hilbert ni las polémicas que la misma suscitó, ni los profundos cambios que se introducen en dicha obra.

Como segunda Nota es interesante señalar que la obra de Pasch se traduce por Álvarez Ude y Rey Pastor en 1913 mientras que **Los Fundamentos de Geometría** de Hilbert no tendrán traducción al castellano hasta 1954…

Pasch reafirma la creencia de que la Geometría es una Ciencia natural que tiene que ser organizada deductiva, axiomáticamente. Cabría plantear una dificultad: el origen empírico se podría atribuir, más que a la métrica euclídea, a la Geometría Proyectiva que, en principio, no es métrica aunque la métrica se introduzca por la puerta falsa de la razón doble. Pasch lo advierte al reconocer la insistencia de Klein de que la Proyectiva es independiente de la teoría de las paralelas, es decir de la métrica, y "se puede *fundamentar* sin su admisión" (p. viii, y vuelvo a enfatizar yo), pero él requiere de la métrica en el plan organizativo fundacional que tiene entre manos por lo cual acude a la noción de congruencia como concepto primario.

El origen empírico de lo geométrico sería más bien Proyectivo si se consideran como primarios los conceptos de proyectar y cortar, que son más primitivos que los métricos. Precisamente los dos conceptos con los cuales se va a dar otro salto conceptual cuando Cantor los adopte en su obra: son los que muestran uno de los caminos para discretizar el continuo y poner de relieve que dos segmentos desiguales en cuanto a su métrica pueden ser equipolentes punto a punto… Equipolencia biyectiva que llevaría a la idea de que una curva pueda cubrir todo un cuadrado…

Aquí estoy planteando una cuestión en cuanto al origen sensorial perceptivo: si captamos o no las operaciones de proyectar y cortar antes que las nociones métricas y, de hacerlo, por qué se han tenido en cuenta las nociones métricas antes que las proyectivas en la edificación de las geometrías…

Las creencias en que el espacio sea métrico euclídeo y en que el origen de lo geométrico es la percepción pasiva de los sentidos tiene una consecuencia: no se puede obtener otro tipo de geometría métrica. Si se es consecuente, las geometrías métricas no euclídeas no caben en el terreno matemático. Como mucho se las puede considerar construcciones imaginarias, ficciones o, más bien, aberraciones como la astrología o la alquimia y han de tener el mismo destino que estas, la papelera. Es el sentir explícito de Frege, por ejemplo, pero también de muchos filósofos de tendencia kantiana como se pone de manifiesto en las polémicas en torno a estas geometrías de finales del siglo XIX.

Frente a esta consecuencia algunos científicos reaccionan en clave kantiana pero contra Kant aceptando estas geometrías. El problema se centra en lo epistemológico, en cómo pasar de lo sensorial perceptivo a lo conceptual. El matemático puro deja a un lado este problema y se limita a afirmar que la Geometría es una Ciencia Natural más.

Helmholtz crea mundos imaginarios no-euclídeos con los cuales intenta convencer a los filósofos kantianos y a los matemáticos de la validez de las geometrías no-euclídeas. Levanta duras polémicas aunque hace surgir otro problema si todas son aceptables en pie de igualdad: qué geometría adoptar como base para el conocimiento científico. Problema ya planteado por Gauss y Lobachevky pero de manera no pública.

Poincaré dará un paso más en línea con Klein y con Helmholtz: las geometrías no tienen como objetivo el estudio del espacio ni tienen como esencia ser teorías axiomáticas como pretende Pasch. Las geometrías estudian las propiedades invariantes respecto a las transformaciones de un grupo. Son los grupos de transformaciones los que constituyen modelos posibles de lo real; cada geometría, cada grupo, posibilita dar un modelo y, a su través, un posible conocimiento de la physis. Con ello, y frente a Kant, frente a Pasch, cuestiona que el espacio tenga, en sí, la estructura dada por una u otra geometría a priori, sea métrica euclídea o no, con lo cual la atribución a las proposiciones de esta de ser verdaderas carece de sentido.

Aceptando que todo conocimiento se origina en la experiencia, aunque no sea un producto directo de ella, Poincaré busca una justificación para su enfoque estructural de lo geométrico. Somos seres que vivimos en la Tierra, un planeta que tiene unas condiciones térmicas y químicas que permiten la existencia de cuerpos “casi” rígidos como el nuestro. Los movimientos del cuerpo o transformaciones que componen un grupo, los pasos al andar, lo fisiológico de adaptación evolutiva a este medio, la educación… son elementos que establecen un mínimo fundamento para el hacer geométrico. Una justificación de tipo estructural evolutivo, epistemológico-genético, a medias entre lo filosófico y lo matemático.

En la búsqueda por dar un Fundamento a la Geometría surge otra línea radicalmente diferente a las dos anteriores: adoptar el método axiomático pero con una inversión: de organizador de un cuerpo ya dado de conocimiento –al estilo de Euclides, de Pasch- transformarlo en instrumento de definición de nuevos elementos; convertirlo en un mecanismo de conceptualización, en lo que se denominará *definición implícita*.

Es una inversión radical porque el método se independiza de un determinado cuerpo de conocimiento –aunque en lo apariencial siga utilizando la terminología geométrica- al que hasta ese momento organizaba. Ahora solo se acepta la existencia de conjuntos de elementos de naturaleza y cardinalidad desconocida –pueden ser puntos, rectas, planos; o mesas, sillas, vasos de cerveza- y se adoptan como axiomas relaciones entre esos elementos y a partir de ellos se caracteriza una disciplina que tiene como objetivo dar conocimiento del objeto definido implícitamente por los axiomas.

Lo obtenido se ha de bastar a sí mismo porque no hay seguridad de que los axiomas elegidos, así como el proceso demostrativo empleado, no den paso a contradicciones. Por un lado, y aunque en el proceso demostrativo se tengan cadenas de longitud finita, esas cadenas pueden ser tan largas que no se encuentre la contradicción que puede aparecer en la línea siguiente. Por otro, tampoco se tiene seguridad de que el objeto definido exista y no sea una mera elucubración carente de sentido; recuerden la exigencia clásica: la definición no implica la existencia de lo definido.

Ello obliga a adoptar mecanismos de demostración de la no-contradicción de lo definido implícitamente. Se crea otra creencia que para algunos se convierte en esencial: aceptar que la demostración de imposibilidad de inconsistencia certifica la existencia del elemento definido. Es decir, si no hay contradicción, el objeto definido existe aunque en esa demostración no se muestre el objeto ni se le pueda mostrar.

Inversión que supone una ruptura epistemológica, un salto en el Hacer interno matemático porque se ha pasado a construir un mecanismo de conceptualización que conlleva otro tipo de convicción, de creencia. Para quien considera que la geometría está ahí la cuestión de su consistencia no existe. Pero para quien admite que lo geométrico, lo matemático en general, viene dado por su definición axiomática, la problemática de su no contradicción se vuelve esencial. Surge un nuevo modo de conceptualización acompañado de una grieta en el mismo. Y el matemático se ve obligado a crear mecanismos de demostración de consistencia de cada teoría matemática que se construya para asegurar la existencia de lo construido.

Hilbert es el responsable, en el fondo, de esta inversión en lo geométrico. En sus **Fundamentos de Geometría de** 1899 Hilbert reduce la consistencia de la Geometría a la consistencia de la Aritmética, naturalmente de la Aritmética superior, la de los números reales. Ha desplazado, no resuelto, el problema al obtener una consistencia relativa y, por ello, lo que ahora se tiene que demostrar es que el continuo es consistente.

Hay que observar que el continuo, al que Hilbert convierte en el cuerpo arquimedianamente ordenado de los números reales, es la base del Análisis; en el fondo, la base del Hacer matemático "puro". Con lo cual, y desde este enfoque, lo que ha hecho Hilbert es afirmar que es toda la Matemática la que está en el aire y carece de fundamento hasta que se demuestre que no es contradictoria.

Quizá por ello Pasch no cite a Hilbert en 1912: ve que éste ha provocado una ruptura radical en lo geométrico con su nueva línea de Fundamentos. Una ruptura con su propia manera de Hacer que es un hacer intrínseco a lo geométrico.

A modo de conclusión en el ejemplo de Fundamentar lo geométrico

Lo que en este esbozo he pretendido mostrar es que el matemático, en su Hacer geométrico y aceptando creencias como las del origen sensorial de las nociones geométricas y su paso a elemento conceptual deductivo no se sabe muy bien cómo, trata de Fundamentar esas creencias. Fundamentos internos a la Matemática, aunque muy distintos entre sí, porque se van construyendo nuevos conceptos, nuevos productos matemáticos. Así, aparecen las geometrías no-euclídeas o las no arguesianas, Pasch incorpora el axioma que hoy lleva su nombre; se enlaza con la Aritmética de números reales para temas como la consistencia, con el Análisis en la creación de las funciones fuchsianas, con el Álgebra para constituirse en grupo…

Pero también, e insisto, esos diferentes intentos de Fundamentación se apoyan en unas creencias que no son estrictamente matemáticas sino que suponen elementos ideológicos, valoraciones que se aceptan de modo acrítico…

También algún filósofo se adentra en los terrenos de la fundamentación de la Geometría. Me limito a mencionar a Bertrand Russell. Lo hará en su disertación de 1894 para graduarse en Ciencias Morales y es la base para su **Ensayo sobre los Fundamentos de la Geometría** que publica en 1897. Su punto de partida, su enfoque, claramente polémico contra el idealismo que hasta ese momento sustentaba. Así, comienza con las palabras

> La Geometría, a través de los siglos XVII y XVIII, se mantuvo, en la discusión contra el empirismo, como fortaleza inexpugnable de los idealistas. (p. 16)

Russell acude a Kant para tomar su pregunta central: cómo es posible el conocimiento partiendo de la experiencia, sin más. Actúa, ya, no como matemático en el interior de la matemática sino como filósofo que pretende una explicación del por qué de la seguridad de esa matemática, de cómo se realiza dicho conocimiento y de qué tipo son los objetos –si es que hay alguno- de ese conocimiento… Fundamentos según el título y aparente objetivo, pero ya como algo externo al Hacer en sí del matemático y, por ello, más que Fundamentos, lo que Russell esboza es una Filosofía de de ese Hacer.

La Matemática pura y sus Fundamentos

La Geometría ha sido base para la obtención de otros conocimientos y no sólo de la physis, sino internos al Hacer matemático. Es la que se encuentra en el origen y desarrollo del Cálculo diferencial e integral, del Análisis, aunque este Análisis se quiera desprender de ese origen para constituirse en parte de la Matemática "pura".

Pascal lanza el reto de la cuadratura de la cicloide y en su intento de solución establece los rudimentos de la integral definida con una apoyatura geométrica radical. Con un problema al ir más allá de la captación sensorial perceptible: los trapecios cuya base son infinitésimos constituyen realmente líneas y la suma de líneas jamás dará una superficie aunque para Pascal esa suma da el área pedida. Claramente es un proceso descalificable desde el inicio: va contra un principio básico como el de la homogeneidad del espacio. La respuesta de Pascal, rotunda: descalificar a quienes le descalifican pero con ello no da cuenta, realmente, de su modo de hacer.

Leibniz a través de las diferenciales pretende justificar el cálculo diferencial apoyándose tanto en la figura que visualiza las proporciones entre el triángulo infinitesimal y un triángulo perceptible, como en el cálculo de las leyes formales con las que operar con esas diferenciales. Mantenimiento de leyes formales aunque tenga que aceptar la no linealización del producto. Las críticas, claras: no hay fundamento alguno. Como tampoco lo habrá en la versión dinámica newtoniana del cálculo diferencial a través del cálculo de fluxiones con cantidades evanescentes que siendo dejan de ser…

Evanescencia que lleva a d'Alembert a sugerir un instrumento que se convierte en esencial: el paso al límite. Un enfoque dinámico apoyado en la imagen visual como se mantiene en todo tratado elemental del Cálculo. En él se introduce un concepto que se sigue manejando en la enseñanza elemental: un elemento del continuo se considera, a la vez, un número y una variable. Inconsecuencia conceptual que supone una grieta más en el Hacer matemático y en su soporte conceptual primario. Para cualquier lógico al modo de Dedekind, de Frege, un soberbio disparate, pero que es base del Cálculo…

En este terreno, de modo inmediato, surge otra grieta en el manejo de las sucesiones y series de números reales donde el paso al límite ya es de suma de elementos. En ese manejo se carece de cualquier tipo de criterios de convergencia por lo que Abel exclamaría “la parte más esencial del Análisis está en el aire”. Y a dar base a ese Análisis, a dar un Fundamento al mismo, se lanzan los matemáticos del siglo XIX. Desde Abel y Cauchy, a Kronecker, Weiertrass, Dedekind… cada uno con su intento propio, diferente al de los demás.

Dedekind, como antes Abel, lo expresará de modo explícito: al explicar en clase las nociones básicas del Análisis encuentra que están en el aire, faltas de fundamentación, apoyadas en la captación intuitiva geométrica, sin definiciones conceptuales precisas. Para lograr ese fundamento, esa seguridad que requiere la creencia básica de la Matemática, Dedekind realiza una construcción del continuo apoyándolo en cortaduras, en clases de números racionales que, a su vez son clases de enteros… y maneja la expresión “la clase de todas las clases”.

No entro en la construcción del continuo de Dedekind, en su intento de respuesta de qué son y para qué sirven los números naturales ni en los trabajos de Kronecker o Weiertrass. Sí insistir en que sus intentos de Fundamentación son internos a la Matemática, constituyen un hacer matemático. En ellos se desgaja del Análisis el enfoque dinámico por el cual los números eran a la vez constantes y variables, en beneficio de un continuo estático enfocado como conjunto discreto de elementos: el Cálculo, a partir de ahora, estático, no dinámico apoyado en la noción de entorno, de conjunto de elementos y de funciones entre esos conjuntos.

Haciendo camino, comienzan a surgir dificultades. La aparición de funciones teratológicas, como la función de Weiertrass, continuas en todos sus puntos pero no diferenciables en ninguno, suponen que ese nuevo Análisis produce, cuando menos, sorpresas, que hay grietas en estos intentos. Las funciones teratológicas se muestran, con Hermite, como “un atropello o ultraje al sentido común” y no ya por su imposible representación gráfica sino porque se exige la existencia de un ser omnisciente que capta y maneja conjuntos de puntos dados en cardinalidad infinita, manejo de un infinito actual cuando el matemático es un ser finito.

Para tratar de que se acepten estos “horrores”, para fundamentar el Análisis, se tienen los procesos de cortaduras de Dedekind, los de aritmetización de Kronecker o los de Weiertrass que se han denominado, creo que erróneamente, aritmetización del Análisis y más bien son procesos de aritmetización del continuo.

Como resultado se tiene un producto interno, estrictamente, al Hacer matemático aunque, de hecho, se va a dejar en el aire, una vez más, el Fundamento deseado. En el aire porque, con afirmación de Emil Du Boy-Reymond, entonces Rector de la Universidad de Berlín, por mucho que conozcamos en los terrenos científicos siempre hay que admitir *Ignoramus, Ignorabimus*!, lo que también sucede en el Hacer matemático como reconocerá su hermano Paul. Afirmación que ha resonado en los medios académicos hasta bien entrados los años treinta del siglo pasado.

La inversión epistemológica y la "Matemática moderna"

Los intentos de fundamentación del Análisis provocan una inversión radical en el Hacer matemático: los sistemas, multiplicidades, conjuntos… se convierten en la base de un nuevo Hacer que en 1915 Rey Pastor calificará de *Matemática moderna*. Los conjuntos son la apoyatura para un nuevo modo de hacer matemática, para un nuevo estilo, aunque se originan en el estudio de las funciones, en la elaboración del Análisis. Lo que se produce en los entornos de 1870 es una profunda inversión en el Hacer matemático. De partir de la función, de la serie convergente o divergente, del grupo, de la ecuación diferencial… se pasa ahora a partir del conjunto o agregado discreto de números reales y de la biyección o equipolencia entre agregados con eliminación de todo lo que suene a intuitivo geométrico… Es la inversión que adopta Hilbert en 1899 para la Geometría.

Cantor crea la Aritmética del transfinito mientras otros matemáticos, haciendo camino, pasan a desarrollar una matemática con base conjuntista como Jordan o los miembros de la Escuela de París que construyen el Análisis de variable real, la integral de Lebesgue, los espacios de Frechet, el Cálculo de Probabilidades, la Teoría de juegos…

Un nuevo hacer que exige, por otro lado, la seguridad que la creencia de base mantiene. Pero no se entra en el problema de cómo alcanzar ese origen conjuntista, del cómo y por qué se hace la elección de los conceptos que se muestran en principio difusos… como tampoco se había hecho cuestión de cómo se había llegado a la Geometría proyectiva, a la afín, a las geometrías no-euclídeas…, que no existían desde siempre, sino que se habían ido construyendo a lo largo del siglo XIX.

Ligada a la supresión del enfoque dinámico del cálculo clásico, aparece otra creencia: no importa la génesis ni los problemas históricos ni epistemológicos asociados para asegurar el Hacer matemático. Hilbert lo expresará con total rotundidad en 1899 cuando aplica el método axiomático a la construcción de los números reales, de la

Aritmética, en su ensayo *Sobre el concepto de número*. Lo genético debe dejarse a un lado, por muy importante que haya sido; lo que importa es el método axiomático

> para la representación *definitiva* de nuestro conocimiento y su *plena seguridad lógica*. (p. 244, soy yo quien pone el énfasis)

En esta inversión se plantean numerosos problemas. Así, hay que construir un lenguaje para expresar este nuevo tipo de Hacer matemático y formular de modo explícito las reglas de demostración para conseguir el rigor expresivo y demostrativo que la creencia exige. La apoyatura que se tenía en la imagen geométrica ya no tiene sentido y debe ser eliminada. Peano construye la *Pasigrafía* y da los *Principios de la Aritmética*, Frege la *Conceptografía* y da los *Fundamentos de la Aritmética*. Se construye un lenguaje en el que expresar el contenido matemático, el contenido del nuevo estilo de Hacer matemático.

Objetivo no inocuo porque ese lenguaje se convierte en la Lógica matemática. Peirce, Frege, Peano… son figuras en este proceso. Ese lenguaje, convertido en Lógica formal, por partir del conjunto o agregado de elementos discretos y no del objeto singular al que hay que llegar finalmente, exige de los cuantificadores; pero, lo que es más importante, de un cambio en la estructura gramatical porque no hay objeto, un sujeto al que atribuir un predicado sino que hay que pasar a la forma función-argumento o concepto-objeto en la terminología fregeana.

Hay un punto en el que deseo insistir: hasta la aparición de esta inversión la fundamentación que se pretendía era sectorial: es a la Geometría a la que se tiene que dar seguridad o bien al Cálculo diferencial e integral. Pero ahora hay un nuevo modo de hacer que obliga a replantear todas las nociones básicas matemáticas. Es lo que da origen a una búsqueda de unos Fundamentos que den la roca firme sobre la que edificar la "nueva" matemática, la "moderna".

Las Tres grandes Escuelas de Fundamentos

La radicalidad de esta inversión produce, como no podía ser de otra manera, una escisión entre los matemáticos. En un primer momento Frege, seguido después por Russell y Couturat, trata de fundamentar el Hacer matemático en la Lógica –en la nueva lógica, por supuesto, que exige la noción de dominio de la función o extensión del concepto-, Hilbert lo intentará en el método axiomático aún no formalizado y discutirá con Frege sobre el papel de este método.

Por su lado Poincaré se opondrá a los anteriores y resaltará la historicidad del Hacer matemático. Insistirá en que carece de sentido una pretendida fundamentación de modo ya definitivo y para siempre, garantía que se podría encontrar en quien realiza ese Hacer, el matemático. Y resaltará que la Matemática linda con la Física, con la Filosofía Natural, con la que tiene unas relaciones que no pueden eliminarse. La Matemática no es tan pura y no tiene como misión mirarse el ombligo.

La disensión es clara y responde a unas cuestiones básicas: si hay que fundamentar, qué es lo que hay que fundamentar, y dónde o en qué. Para Frege, para Hilbert, sí hay que fundamentar y es el total de la nueva Matemática, que desde ahora se va a denominar "clásica" –a pesar del calificativo de *moderna* de Rey Pastor-, la que se elabora a partir de la noción de conjunto o extensión de un concepto. Frege sitúa el fundamento en la Lógica aunque al final no sepa cómo elegir los axiomas lógicos –es asunto que no es propio de la Lógica llegará a admitir-. Hilbert lo hará en el signo y el método axiomático.

Para Poincaré no hay que fundamentar nada y quienes lo intentan confunden lo claro con lo oscuro. El número 1, el 2… sirven para contar y son más claros que la clase de todas las clases que son biyectivas con la clase unidad o la clase binaria respectivamente; definiciones que han de ser acompañadas de la demostración de que esas clases de clases son, efectivamente, números naturales… Para Poincaré el número natural o la noción de grupo no requieren de fundamento alguno porque son nociones primarias como el principio de inducción completa y son las que permiten definir al resto del Hacer matemático. Los intentos de una fundamentación definitiva y para siempre del Hacer matemático se le muestran como entelequias…

Lo que acabo de enunciar en los objetivos y en las disensiones no son temas matemáticos, son creencias contra creencias… Pero las disensiones no son solo producto de las creencias de cada matemático. Surgen las primeras dificultades en el interior del nuevo Hacer que, en algún caso, parecen mostrar auténticas contradicciones. La noción de conjunto aparece como concepto sin definición precisa y ello conduce a manejar expresiones como "conjunto de todos los conjuntos" que se muestra aporética; a la vez, y sobre el Axioma de elección, planea la expresión "esto no es matemática, es teología"… Dificultades que provocan lo que se calificó de crisis de la Matemática o más bien crisis en los Fundamentos de la matemática. Las disensiones se radicalizan pero también los intentos de superación que llevan a que en los entornos de 1908 se plasmen distintas líneas a seguir en el futuro.

Frente a una postura genético-histórica como la de Poincaré se radicaliza una ideología opuesta: el nuevo Hacer matemático se tiene que fundamentar de manera rigurosa, total y definitiva, sin más espera. En la Matemática no hay ni puede haber *ignoramus* ni *ignorabimus*. Aunque esta afirmación la adopte Hilbert desde 1900 y la convierta en uno de sus lemas hasta su muerte, la compartirán Frege, Russell, Brouwer…

Creencias contra creencias se originan distintas líneas en la búsqueda de ese fundamento. Líneas que cristalizan en las escuelas: Logicismo, Intuicionismo, Formalismo. Desde las tres se hacen Fundamentos y, por ello, las tres muestran las dos caras que mencioné: en una se hace matemática; en la otra, Filosofía de.

Cara interna, matemática, de la Fundamentaciones

Como hacer interno matemático me limito a señalar, en el Logicismo, la creación de la Lógica matemática, de la Lógica por parte de Frege, de Peano. Intento de formalizar la nueva matemática y alcanzar el continuo y, con él, el resto de la Matemática pura. Tras las antinomias ese objetivo exige, por parte de Russell y Whitehead, en **Principia Mathematica**, el manejo de axiomas como el de reducibilidad para evitar el círculo vicioso o impredicatividad y, sobre todo, el axioma del infinito que es estrictamente existencial. Aceptación que tiene como consecuencia la afirmación de que el objetivo logicista no ha sido alcanzado, al menos de momento.

Formalismo e Intuicionismo rivalizan en los años veinte tanto en el Hacer interno como en el plano ideológico. David Hilbert desarrolla su Programa en pugna con las ideas de Weyl, de Brouwer y con el apoyo sustancial de Paul Bernays. Su Programa intenta la fundamentación definitiva, por medios puramente matemáticos, del total de la matemática "clásica", de la que ha sido codificada en la teoría axiomática de conjuntos por parte de Zermelo en 1908, y que adopta como lenguaje un sistema lógico de primer orden como propuso Skolem en los años veinte. Codificación que permite definir la Matemática como la disciplina formulada y demostrada por medio del lenguaje L_1 y los axiomas ZFS o cualquier otro sistema axiomático equivalente..

Metodológicamente el Programa tiene como pasos: aceptar dos niveles, uno real y otro ideal, en la Matemática; axiomatizar las teorías de la matemática real; formalizar sintácticamente las teorías axiomatizadas; demostrar, por medios sintácticos finitistas, que los sistemas formales obtenidos son consistentes; consecuencia final, la consistencia de la Matemática real. Junto al problema básico de demostrar la consistencia, Hilbert plantea demostrar la completitud, decidibilidad… de sistemas formales tan elementales como la Aritmética o la Lógica L_1. Un Programa metamatemático por tratar de

Fundamentar la Matemática pero matemático por llevarse a cabo en el interior de ese Hacer matemático.

El Programa alcanzó sus limitaciones en los años treinta con los teoremas de incompletitud, de indecidibilidad, de imposibilidad de demostración interna de la consistencia de la Aritmética y, con ella, del resto de la Matemática. La definitiva fundamentación hilbertiana quedaba, como en el Logicismo, en creencia utópica.

Si para Frege y Russell la seguridad la daba la Lógica, para Hilbert estaba en el signo y su captación intuitiva. Para Brouwer esa seguridad se encuentra en la razón constructiva del matemático porque la Matemática, para él, es una actividad mental. Brouwer construye una matemática que no es la "clásica", la apoyada en los conjuntos y su axiomatización formalizada, sino una matemática "creada por una acción libre" de la razón matemática que se materializa de manera constructiva "completamente separada del lenguaje matemático y de aquí del fenómeno mismo del lenguaje descrito por la lógica teórica". El matemático produce resultados matemáticos de manera inductiva, pero efectiva, a lo largo del tiempo.

En la Matemática intuicionista se rechazan las demostraciones existenciales por utilizar mecanismos como los de reducción al absurdo, ya que no se admite el principio del tercero excluido en general, mientras que se establecen otros que no son admisibles, en principio, desde el Análisis clásico. Así, no son aceptables los teoremas que utilizan el axioma de elección o teoremas como el del punto fijo –establecido precisamente por Brouwer-, o los clásicos de acotación como el de Bolzano-Weiertrass o los de la media como el que establece:

> Dada una función continua de variable real definida en el cerrado [a,b], existe un punto c, cε[a,b], tal que f(c) es el valor medio de f en el cerrado de definición.

O, más rotundo:

> Si una función continua en el cerrado [a,b] es tal que f(a)<0<f(b), existe al menos un punto c en el intervalo, cε[a,b], tal que f(c)=0.

La demostración ni da el punto c ni asegura que sea único; lo que se afirma es su existencia y el matemático tendrá que obtenerlo, si es que puede, por otros medios.

Un teorema aceptable para el intuicionista es el que se podría formular diciendo: toda función de variable real definida en un dominio de números reales es continua. Naturalmente hay que precisar ya que el lenguaje intuicionista no es el de la matemática clásica. Así, no se podría afirmar: "toda función" sin dar de manera constructiva la función de la que se habla. Es decir, hay que construir, para cada c del dominio, el valor correspondiente f(c) y ello significa que hay que dar métodos constructivos para calcular dicho elemento…

También hay teoremas que son asumidos por los dos tipos de matemática, la clásica y la intuicionista como el teorema fundamental del álgebra. Sin embargo, en la demostración, hay diferencias de matices. La demostración clásica es más breve y, en muchas ocasiones, más elegante. Como contrapartida, la demostración intuicionista, más tediosa, da mayor información. No es preciso recalcar que los términos más elegante, más tediosa… no son matemáticos sino valorativos.

Lo destacable en el Intuicionismo histórico, que escuelas constructivistas posteriores heredan como la de Bishop o la de Markov, es que aceptar una demostración o la existencia de un objeto supone el establecimiento de unas rutinas que sean eficientes o calculables en tiempo y espacio finitos o bien simplemente viables, en cuyo caso se pasa a otros campos como los de calculabilidad o análisis numérico.

Por otro lado, Brouwer siempre resaltó la diferencia entre Matemática y Lógica a la que estimó como un producto marginal del Hacer matemático. Sin embargo, Heyting logró su formulación tratando de captar la diferente interpretación de los conectivos lógicos y estableció la Lógica intuicionista. Una lógica débil aunque posteriormente sea la utilizada en terrenos como el de los topos en la teoría de categorías.

En esta mirada a la cara interna del Hacer de Fundamentos he querido indicar que los miembros de las tres Escuelas hacen matemática apoyados, unos, en la originada en la inversión de los entornos de 1870 –y que hoy es la "clásica"- a la que pretenden fundamentar; otros, construyendo una "nueva" matemática, la intuicionista. Se logran resultados que se reflejan en las diferentes Lógicas construidas, en la Teoría de Modelos, en la Teoría de la recursividad… Son resultados que constituyen campos nuevos del Hacer matemático con sus repercusiones en otros. Pero también indicar el fracaso en sus intentos de dar una definitiva, y ya para siempre, fundamentación del Hacer matemático –afortunadamente, como había dicho Poincaré años antes-. Objetivo de fundamentación definitiva que no es matemático sino que se apoya en unas creencias y valoraciones no matemáticas.

La cara externa, valorativa y filosófica, del Hacer de Fundamentos

En estas valoraciones y creencias se incardina lo que ya indiqué de no neutralidad en esos intentos de fundamentación. En ellos no tiene más remedio que aparecer un elemento de carácter constitutivo social: el rechazo e intento de anulación del perteneciente a otra tendencia. Si no se acepta una consecuencia de un teorema, por ejemplo, se denigra a quien propone esa consecuencia: y menciono como ejemplo lo que se llegó a calificar despectivamente como “skolemismo”...

A ello se suma que en el primer tercio del siglo XX los formalistas se encuadran en un centro que tuvo un papel de privilegio en el colectivo matemático: Göttingen. Con Klein, Minkowski, Hilbert en un primer momento, Göttingen es el centro de referencia para los matemáticos de todo el mundo. Tras la muerte de Poincaré en 1912 el cetro del Imperio matemático pasa a Hilbert. Y ello condiciona en parte el éxito del formalismo frente al intuicionismo de Brouwer.

Desde los miembros de la Escuela Formalista se enfocó la actitud de Brouwer como estrictamente crítica y sin sentido olvidando conscientemente que Brouwer hacía matemática aunque una matemática diferente. Se reconocía que la hizo y excepcional, en los terrenos de la topología en los años 1910, pero con un enfoque conjuntista por lo que, además, se le podía criticar por no ser consecuente… En este capítulo cabría mencionar episodios lamentables como el que calificara Einstein de guerra de gatos y ratones cuando Brouwer podría pasar a ser el nuevo emperador con un Hilbert entonces enfermo.

Actitud que había tenido Frege con sus críticas al trabajo de algebrización de la Lógica iniciada por Boole, seguida por Schröder, Lindenbaum, Skolem… O la marginación que se ha hecho con Peirce con olvido de sus contribuciones a la Lógica incluso en detalles como su elaboración de las tablas veritativas para el cálculo proposicional bivalente en 1902 y para el trivalente en 1907…

Carga valorativa que se muestra, igualmente, en el abandono tanto de lo genético como de la relación de la Matemática con otras disciplinas, especialmente la Física. Se pretende un Hacer de lo que se considera matemática pura. Y ello aunque alguno de los que intervienen también dedique su trabajo a la física como el mismo Hilbert. Un purismo que irá más allá de la Fundamentación y será mantenido por Bourbaki, por ejemplo…

En esta cara externa se encuentran otros aspectos. Logicismo, Intuicionismo, Formalismo responden a preguntas que cualquier Filosofía se ha de plantear como indiqué en los comienzos. Así, las tres Escuelas mencionadas entran, aunque sin gran profundidad, en el terreno ontológico haciendo resurgir, de manera un tanto tangencial, el tema de los universales, tema propio de la Edad Media.

En lo ontológico, el logicismo adopta una posición realista: los elementos matemáticos se encuentran en un mundo eidético como América existía antes de que llegara Colón. El matemático se ve obligado, desde lo epistemológico, a asumir el papel de descubridor de ese mundo, como Colón y los restantes descubridores de América. Es la metáfora que empleará Frege, luego el primer Russell. Los matemáticos no construyen, descubren. Es posición que plantea, de modo inmediato, varios problemas. Así, cómo se accede a ese mundo eidético porque lo sensorial es en principio inviable; alguno acude a la existencia de una intuición que ha de ser, en este caso, eidética.

Por otro lado, el Hacer matemático sigue siendo la herramienta para obtener el conocimiento científico, el conocimiento de la physis, y surge la cuestión de cómo ese mundo eidético, del que aún queda por descubrir casi todo, se muestra indispensable para el conocimiento científico. Cabría adoptar una posición en cierto modo platónica y aceptar que ese papel se debe a que el mundo eidético matemático es el de las formas puras que se materializan en la physis. Ello exigiría la existencia de alguien o algo que realizara esa plasmación…

Por otro lado, el matemático tendría que dejar a un lado el papel que exige a la demostración, ya que si lo que hace es descubrir, lo que descubre está ahí y no necesita de pruebas de consistencia ni, en el fondo, de demostración salvo la que se tenga en el plano puramente organizativo en el sentido de que se puede derivar de otras, pero la proposición se tendría que aceptar sin más, y la demostración sería simple instrumento de convicción para que lo acepten los demás.

Por otro lado surgiría una posible inconsecuencia: si la Matemática es lógica o simple desarrollo de teoremas a partir de unos principios lógicos formales primitivos, entonces estará constituida de proposiciones analíticas, formales y, por ello, nada pueden decir del mundo, ni se les puede atribuir conocimiento ni carácter veritativo como correspondencia con unos referenciales. La verdad semántica, eliminada.

Para el Intuicionista no hay mundo eidético ajeno al hombre que este tenga que descubrir no se sabe muy bien ni con qué medios. Las entidades abstractas, los conceptos son construcciones mentales y, con palabras de Brouwer de 1907, "existir en matemáticas significa ser construido". Construcción que realiza el matemático con independencia al lenguaje y a la Lógica a partir de la captación de la dualidad-unidad que se da en el tiempo y que, por reiteración, lleva a la construcción de dos diferentes tipos de sucesiones. En particular, de la sucesión fundamental, la de los números naturales.

En términos clásicos constituye un Conceptualismo cuyo gran peligro es el solipsismo. Se tiene que dar cuenta de que construcciones mentales de matemáticos diferentes coinciden en cuanto al producto. Y enfatizo “en cuanto al producto” porque en cuanto actividades psicológicas son claramente diferentes y el intuicionismo nada tiene que ver con el psicologismo. El solipsismo latente en la posición de Brouwer se superaría apelando a la existencia de un sujeto universal, lo que lleva a una posición difícilmente aceptable.

El Formalismo hilbertiano pretende marginarse, aparentemente, a las cuestiones de carácter más filosófico como las que atenazan al Logicismo y al Intuicionismo. De modo explícito admite como único punto de partida el signo y su captación. A partir del signo que se supone concreto -lo cual ya plantea inmediatas dificultades conceptuales-, se realizan configuraciones finitas de signos entre las cuales se eligen unas como bien formadas –y hay que especificar criterios que van más allá de lo estrictamente sígnico- y se continúa el proceso. Se prima lo metodológico sobre lo ontológico.

Pero ello no evita, por imposible, adoptar una posición filosófica: rechazar la existencia de objetos abstractos, sea como existentes en un mundo eidético conceptual, sea como construcciones mentales. Las entidades abstractas no existen. Lo que existen son configuraciones sígnicas y abreviaturas de esas configuraciones en un lenguaje que, por carecer de referencial, tiene que ser consistente. Bien entendido que, aquí, consistencia quiere decir que no se pueden tener dos configuraciones sígnicas como α y $\neg\alpha$ en el mismo sistema formal. Como se ha hecho notar más de una vez “hacer matemática es manipular signos carentes de significado en un lenguaje L según reglas sintácticas explícitamente formuladas”. Para completar la atribución que se tuvo en la disputa medieval de los universales el Formalismo sería un Nominalismo: los conceptos abstractos son meros *flatus vocis*…

En otras palabras, para cierto Logicista hay conocimiento de objetos abstractos situados en un mundo eidético que se va descubriendo; las proposiciones matemáticas que hacen referencia a esos objetos abstractos son verdaderas. Para logicistas de otro cuño, las proposiciones matemáticas son proposiciones formales que nada dicen de lo real; son analíticas por su forma, independientes a contenido alguno. Para el intuicionista, las construcciones mentales apoyadas en la intuición del número producen conocimiento verdadero. Para el formalista no hay entidades abstractas de las que predicar nada.

La elección de una u otra posición de Fundamentos, con sus cargas ideológicas y en última instancia, puramente filosóficas, no es cuestión matemática sino más bien de carácter sociológico, histórico, de temperamento…

Las nuevas Filosofías de

Las tres Escuelas señaladas alcanzan sus limitaciones poco antes de la segunda Guerra Mundial. Se convierten, realmente, en historia pero se mantienen en un primer plano en lo que calificar Filosofía hasta bien entrado el último tercio del siglo XX. Es lo que se tiene en Historias de la Filosofía como la de Routledge cuyo volumen IX se dedica a **Philosophy of Science, Logic and Mathematics**. Su Capítulo 2 lleva el título *Philosophy of Mathematics in the twentieth century*. En sus 73 páginas, Michael Detlefsen pasa de Kant a las tres Escuelas para discutir las posiciones posteriores de Dummet, Benacerraft, Quine… o las observaciones de Parsons acerca de si la evidencia de “7+5=12” es o no del mismo tipo que la de la proposición “la Tierra se mueve alrededor del Sol”… Magnifico trabajo expositivo pero con solo una precisión: ni se hace fundamentos ni filosofía de la Matemática. Únicamente exposición histórica de las tres escuelas y de alguno de sus epígonos sin tener en cuenta, para nada, el objeto del que aparentemente se hace historia: la Filosofía del Hacer matemático.

Por su lado, el matemático sigue con su trabajo. Desde la inversión de los entornos de 1870 ha logrado resultados magníficos en su apoyatura conjuntista y el manejo de un lenguaje como el de la lógica de primer orden. Apoyatura que no significa, en modo alguno, que realice Teoría de conjuntos o Lógica, sino Hacer matemático. Hermann Weyl, en los años treinta, indica que el Hacer matemático se desarrolla en aquellos momentos siguiendo dos grandes campos de trabajo: Topología, Álgebra. Si hubiera agregado, Retículo, habría establecido el Programa estructuralista que muy pocos años después seguirá estrictamente Nicolás Bourbaki.

Estructuralismo en el que reconoce que el trabajador matemático deja a un lado la noción semi-filosófica de conjunto para seguir las líneas que marcan las estructuras madre. Bourbaki termina escribiendo unos *Elementos conjuntistas* como si fueran su punto de partida que, naturalmente, no sigue; una broma más del bourbakismo. Y el bourbakismo será el estilo dominante en el Hacer matemático a partir de los años cincuenta. Con él no hay ni problemas de fundamentos ni de filosofía de. Al menos, aparentemente, porque sí se mantiene una filosofía de.

Y en ese mantenimiento hay que retomar a Kant. En su **Crítica de la razón pura** Kant elabora una Filosofía de la Matemática pero no hace matemática. La **Crítica** es un pensar acerca de, externo a la Matemática. Parte de una creencia: la matemática proporciona un conocimiento que es verdadero. De aquí que no se pregunta por los Fundamentos de un conocimiento seguro, acumulativo, ahistórico, porque ese

Fundamento se sustenta en dos pilares no cuestionables: el origen sensorial y la razón; es decir, la Sensibilidad y el Entendimiento que son las dos Facultades en que escinde Kant a la naturaleza humana. Desde esos pilares se ha logrado construir la Ciencia, el conocimiento científico cuyo culmen es para Kant la Mecánica de Newton.

Filosofía natural, conocimiento de la physis que no se apoya en trascendencia o revelación alguna ni en principios metafísicos, sino en principios matemáticos y se construye aceptando que el espacio de la physis viene caracterizado por la geometría métrica euclídea. Espacio que Pascal definió como un receptáculo homogéneo, isotropo, ilimitado de tres dimensiones en el cual se encuentran los cuerpos en movimiento. El estudio del cambio de movimiento de los cuerpos exige de la masa, fuerza, aceleración engarzadas a través de una ecuación diferencial.

El problema que se plantea y trata de resolver Kant es cómo es posible este conocimiento seguro, cierto, verdadero. Y su respuesta es que ese conocimiento está constituido por juicios sintéticos a priori, mientras que los juicios de la Lógica son analíticos, formales.

Lo que importa destacar es que con Kant aparece una Filosofía como análisis crítico de las disciplinas o Haceres en que se ha ido plasmando el trabajo humano. En concreto, se elabora una Filosofía de la Matemática en línea, básicamente, lógica con un enfoque de filosofía analítica que se originó con la inflexión dada por Russell al establecer que las proposiciones matemáticas eran analíticas por su forma. Filosofía de la Matemática que se siguió fundamentalmente en los medios anglosajones con olvido de los aspectos genéticos e históricos que tanto había resaltado Poincaré. Un enfoque que muestra un carácter exclusivista como se pone de relieve, por ejemplo, al tomar las antologías que jalonan la segunda mitad del siglo XX hasta los entornos de 1970 y entre las que cabría citar las de Benacerraf-Putnam o la de van Heijenoort y no ya las Historias de la Filosofía del siglo XX como la que antes mencioné, mero ejemplo…

Un hecho que reconoce Charles Parsons en un libro editado en 2014 que titula **Filosofía de las Matemáticas en el siglo XX**. Parsons en nota final de la Introducción a pie de página, y con cierto tinte de desprecio, escribe que lo que él hace –lo que realmente ha hecho a lo largo del siglo XX porque el libro es una recopilación de sus ensayos- es una filosofía propia “del mundo de habla inglesa”. E indica que parece existir una larga tradición francesa de más de un siglo en que la historia de la matemática es más prominente que la lógica para agregar: “Esta tradición sin embargo es poco conocida aquí” (p. 8). Ni una referencia más.

Charles Parsons da cuenta, en realidad, de que la filosofía de la Matemática que se ha ido realizando desde la finalización de la segunda guerra mundial en el ámbito de habla inglesa tiene un enfoque lógico y analítico, no matemático. Reconoce, de modo implícito, que esa filosofía no tiene en cuenta aquello de lo que trata de ser: un análisis crítico del Hacer matemático.

En esas Filosofías propias del mundo anglosajón, los elementos matemáticos que aparecen y se discuten son los números naturales o, como mucho, se da algún ejemplo de matemática muy elemental. Se plantea si 5, 5^{10}, $(5^{10})^{10}$… son números o si, como parecen mostrar los dos últimos ejemplos, lo que se tiene es la representación de una operación como la exponenciación y no el resultado de la misma. Pero el papel que puedan tener los dos bloques matemáticos apuntados por Hermann Weyl en 1932 como propios del Hacer matemático, la topología y el álgebra, se marginan totalmente.

Frente a esta tradición anglosajona, frente a la llamada "concepción heredada", en los años setenta del siglo pasado se produce una inversión por la cual se pasa a considerar a la Matemática como un Hacer, como una construcción que realizan los matemáticos, que son miembros de unas colectividades. Un Hacer que requiere una gran imaginación y, por supuesto, un intenso trabajo conceptual.

No sé si con ello se recuperó lo que Parsons califica de tradición francesa pero, de hecho, se pasó a hablar de Estilos del Hacer matemático, de inversiones y rupturas epistemológicas en ese Hacer, a tener en cuenta su génesis, su historia y, sobre todo, lo que hacen y dicen los matemáticos, así como a enlazar la Matemática como construcción con otro tipo de construcciones ligadas, en este caso, con el arte… Es una línea en la cual no se hace matemática ni se intenta una fundamentación sea o no definitiva de ese hacer. Se trata de analizar crítica, filosóficamente, lo que hacen los matemáticos.

Análisis crítico en el que caben muy distintas perspectivas. Así, con intención estrictamente filosófica, se tiene un largo debate entre los años 2007 y 2009 en torno a la afirmación *El Platonismo ha muerto*, con sus repercusiones en alguna revista americana de divulgación matemática.

Un debate muy clásico y que encuentra un posible giro desde la neurobiología. Y cito, por un ejemplo, al neurobiólogo Jean-Pierre Chageux en sus diálogos con un matemático medalla Fields como Alain Connes en **Matière à pensée** de 1989, que culminan en las **Conversations on Mind, Matter and Mathematics** de 1995. Se plantea un nuevo frente en el que la génesis del conocimiento no queda marginada y se sugiere la idea de que el cerebro no es pasivamente receptivo sino más proyectivo… Se busca una forma de cómo, desde lo sensorial, alcanzar lo conceptual. Problema inexistente en los debates analíticos en los que, siguiendo a Wittgenstein, se margina la psicología o se afirma la imposibilidad de capturar la experiencia como haría Ernst Nagel o se ridiculizan los intentos de la inteligencia artificial…

Reuben Hersch, desde la pregunta **What is Mathematics, Really?**, busca establecer unos criterios, un test, para llevar a cabo una posible filosofía de las matemáticas desde una convicción: la aproximación histórico-social procura mejores respuestas al test que propone que las que puedan dar los neo-fregeanos, los intuicionistas-constructivistas o cualquier otra filosofía. Hersch había afirmado en 1987, como si fuera novedad, que frente a platónicos y formalistas que enfocan, según él, el hacer matemático como una matemática teológica, se tiene que la matemática es, realmente, una actividad humana o, en otros términos, una matemática antropológica.

De la multitud de líneas que han surgido, quiero destacar la labor que lleva a cabo Fernando Zalamea. Ha publicado **Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas**, obra de muy profundo calado filosófico, pero con un enfoque que tiene en cuenta, precisamente, la Matemática que se lleva a cabo en los últimos tiempos.

En cualquier caso, ha surgido un intruso en el ecosistema matemático con expresión de Steen: el ordenador. Intruso que permite la afirmación de que la Matemática es experimental por su mayor manejo del ensayo y error y, sobre todo, por la posibilidad de que sea el ordenador el que en un futuro no muy lejano pase no solo a ayudar en las demostraciones de teoremas que exigen una multitud de computaciones, sino a construir teoremas, a realizar el mismo trabajo que se atribuye al matemático humano...

Y se ha producido otro hecho con un nuevo intruso mucho más potente que el ordenador: Internet. La red ha llevado a que el Hacer matemático muestre, en algún sentido, un enorme cambio en su aspecto metodológico y no solo pedagógico: de trabajo aislado, individual o, como mucho en pequeños grupos o con intercambio de correspondencia pero que seguían obligando a un trabajo individual, se ha pasado a trabajar en grupos de individuos que actúan simultáneamente. Se plantea un problema en la red, o se busca ese problema, y una colectividad de matemáticos que no tienen por qué ser profesionales trabaja de manera simultánea en su resolución exponiendo lo que cada uno va haciendo de modo inmediato. Incluso se ha institucionalizado este modo de actuar y, de hecho, se tienen, ya, foros donde resolver o demostrar un problema o teorema planteados. Situación que conduce a discutir el papel que esta nueva metodología tiene en la Matemática, cómo influye en ella.

En la inversión producida y por la intromisión de elementos como los últimamente citados se me muestran varios aspectos problemáticos. Hay quienes, creyendo superados los intentos de un análisis crítico que se hacían desde terrenos analíticos, lógicos en los que se marginaba la matemática de las Ciencias Naturales, pasan a considerar el Hacer matemático como una Ciencia Natural más apoyándose en el manejo del ordenador.

De hecho, todas las Ciencias requieren y han requerido del aparato técnico y hoy día no puede realizarse investigación científica alguna sin su soporte tecnológico correspondiente. Hasta ahora únicamente el Hacer matemático se había mostrado inmune a esos avances tecnológicos a los que, ciertamente, contribuye a desarrollar y perfeccionar. La aparición del ordenador ha permitido a algunos cubrir esa aparente "deficiencia" del Hacer matemático y a considerarlo ciencia empírica, experimental e, incluso, aleatoria. La cuestión es que no hay claridad alguna en lo que calificar de ciencia empírica o experimental y precisar los muy diferentes tipos de experimento que se tienen en las distintas ciencias "experimentales"… Atribuir al Hacer matemático, sin precisión alguna, esos adjetivos, se me muestra como una falta de auténtico análisis crítico filosófico.

Falta de concreción conceptual que se me muestra igualmente en la afirmación de que el Hacer matemático es un producto cultural. Afirmación convertida, hoy día, en tópico que, si se queda ahí, en un truismo: el anfiteatro en el que nos encontramos es un artefacto material-cultural y no es matemática aunque se haya utilizado la misma para su construcción. Habría que precisar los diferentes tipos de productos antropológicos o sociológicos… Algo que ocurre con el término *práctica* -que es lo que yo llamo Hacer desde al menos 1971-, término que ha llevado a la creación, en el año 2009, de la Association of Philosophy of Mathematical Practice (APMP) y que celebrará en noviembre de 2015 en París su Tercer Congreso Internacional…

Un punto más. La Filosofía de la Matemática es una construcción, un Hacer que requiere, como lo requiere la propia Matemática, no solo de gran imaginación sino de un esfuerzo, de un trabajo que exige de algo que debería ser elemental: tener la experiencia del Hacer filosófico y, aún más, del Hacer matemático y, desde esas experiencias, analizar críticamente este último Hacer. Experiencias que, por supuesto, vayan bastante más allá del número natural 1, del 2, aunque no implique que quien las tenga sea, a la vez, y además de filósofo, matemático creador.

Anellis, Irving, 1989: "Distorsions and Discontinuities of Mathematical Progress: a Matter of Style, a Matter of Luck, a Matter of Time… a Matter of Fact". *Philosophica*, 43; pp. 163-196

Anellis, Irving, 2005?: Peirce's Truth-Functional Analysis and the Origin of Truth Tables. En red.

Benacerraf, P. – Putnam, H. (eds.), 1964: **Philosophy of Mathematics**. Basil Blackwell Oxford.

Brand, Walter – Deutschbein, Marie 1930: **Introducción a la Filosofía Matemática**. Tradn. de R. Ledesma Ramos. Ed. Revista de Occidente, Madrid. Edición original de 1929.

Bridges, D. – Mines, Rey, 1984: "What Is Constructive Mathematics?". *The Mathematical Intelligencer*, 6, nº 4, pp. 32-38

Chageaux, Jean-Pierre- Alain Connes, 1989: **Matière à pensée**, en **Conversations on Mind, Matter and Mathematics**, 1995, en la red..

Corry, Leo, 2002: David Hilbert y su Filosofía Empirista de la Geometría". *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, vol. I, nº 1, pp. 27-43

Davis, E.B. 2007: "Let Platonism die". *EMS Newsletter*, junio, pp. 24-25. En la misma revista y en polémica, Hersh, junio 2008; Mazur, junio 2008; D. Mumford, diciembre 2008; Ph. Davis, diciembre 2008; Martin Gardner junio 2009; E.B. Davies, junio 2009.

De Lorenzo, Javier, 1971: **Introducción al estilo matemático**. Ed. Tecnos, M. 2ª ed. 1989.

De Lorenzo, Javier, 2014: **Estilos matemáticos en los inicios del siglo XX**. Ed. Nivola, M.

De Lorenzo, Javier, 2015: **Pensar en la Matemática**. Ed. Comares, Granada.

Detlefsen, Michael, 1996: "Philosophy of mathematics in the twentieth century". En **Routledge History of Philosophy**, vol. IX, pp. 50-123

Ferreirós, J – Gray, J. (eds.), 2006: **The Architecture of Modern Mathematics. Essays in History and Philosophy**. Oxford Univ. Press

Goodman, Nicolás, 1979: "Mathematics as an Objective Science". *The American Mathematical Monthly*, 86, pp. 540-551.

Hersh, Reuben, 1979: "Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics". *Advances in Mathematics*, 31, pp. 31-50.

Hersh, Reuben, 1997: **What is Mathematics, Really?**. Oxford Univ. Press.

Hilbert, David, 1899: **Fundamentos de Geometría**. CSIC, M. 1954

Hilbert, David, 1993: **Fundamentos de las Matemáticas**. Selección e introducción de Carlos Álvarez y L. F. Segura. Tradn. al castellano de L. F. Segura. Colección Mathema. UNAM, México.

Kline, Morris, 1972: **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times**, Oxford Univ. Press.

Mancosu, Paolo (ed.) 2002, 2011²: **The Philosophy of Mathematical Practice**. Oxford Univ. Press

Parsons, Charles, 2014: **Philosophy of Mathematics in the Twentieth Century. Selected Essays**. Harvard Univ. Press.

Pasch, Moritz, 1913: **Lecciones de Geometría Moderna**, M. Tradn. de Álvarez Ude y Rey Pastor, con Prólogo de 1912 de M. Pasch.

Prediger, Susanne, 2002: "Consensus and Coherence in Mathematics – How can they be Expláned in a Culturalistic View?", *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 16, Julio, pp. 1-11.

Restivo, Solomon: *The Social Life of Mathematics*. En red.

Rey Pastor, 1916: **Introducción a la Matemática superior. Estado actual, métodos y problemas**. Biblioteca Corona, M.

Snapper, Ernst, 1979: "The Three Crises in Mathematics: Logicism, Intuitionism and Formalism". *Mathematics Magazine*, 52 nº 4, pp. 207-216

Snapper, Ernst, 1979: "What is Mathematics?". *The American Mathematical Monthly*, 86 nº 7, pp. 551-557.

Tymocko, T. (ed.), 1985: **New Directions in the Philosophy of Mathematics**. Birkhäuser, Boston. 2ª ed., 1998 Princeton Univ. Press.

Van Heijenoort, J. (ed.), 1971: *From Frege to Gödel*. Harvard Univ. Press. Cambridge, Mass.

Zalamea, Fernando, 2009: **Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas**. Univ. Nacional de Colombia. Disponible en la red en su versión castellana.

Algunos Foros:

http://terrytao.wordpress.com/
http://gowers.wordpress.com/
http://polymathprojects.org/
http://mathoverflow.net/

Ponencia expuesta el 23 de junio de 2016 en el VII Coloquio Internacional de Filosofía e Historia de la Matemática celebrado en México, UNAM. A publicar en *Mathesis*.