Javier de Lorenzo

LA FILOSOFIA de la MATEMATICA de POINCARE

EDITORIAL TECNOS

SERIE DE FILOSOFIA Y ENSAYO

Dirigida por MANUEL GARRIDO

ABELLÁN, José Luis: *Miguel de Unamuno a la luz de la psicología.* Una interpretación de Unamuno, desde la psicología individual.

ABELLÁN, José Luis: *Ortega y Gasset en la filosofía española.* Ensayos de apreciación.

DÍAZ, Elías: *Revisión de Unamuno.* Análisis crítico de su pensamiento político.

DOPP, Joseph: *Nociones de lógica formal.*

ENJUTO BERNAL, Jorge: *La filosofía de Alfred North Whitehead.*

FERNÁNDEZ DE CASTILLEJO, José Luis: *Actualidad y participación.* Una filosofía contemporánea.

GARRIDO, M., y otros: *Filosofía y ciencia en el pensamiento español contemporáneo (1960-1970).*

GARRIDO, M., y otros: *La filosofía científica actual en Alemania.*

GARRIDO, M.: *Lógica simbólica.*

GURMÉNDEZ, Carlos: *Ser para no ser.* Ensayo de una dialéctica subjetiva.

HIERRO, José S.-P.: *Problemas del análisis del lenguaje moral.*

HUGHES, John B.: *José Cadalso y las «Cartas Marruecas».*

LORENZEN, Paul: *Metamatemática.*

LORENZO, J. de: *Introducción al estilo matemático.*

MARTÍN SANTOS, Luis, y otros: *Ensayos de filosofía de la ciencia.* Simposio de Burgos. En torno a la obra de Karl R. Popper.

MATES, Benson: *Lógica matemática elemental.*

MOULOUD, Noël: *Lenguaje y estructuras.* Ensayos de Lógica y Semiología.

NICOL, Eduardo: *El problema de la filosofía hispánica.*

NICOL, Eduardo: *Historicismo y existencialismo* (2.ª ed.).

PARÍS, Carlos: *Hombre y naturaleza.*

QUINE, W. V.: *La relatividad ontológica y otros ensayos.*

QUINTANILLA, Miguel A.: *Idealismo y filosofía de la ciencia.* Introducción a la Epistemología de Karl R. Popper.

RAMA, Carlos M.: *Teoría de la historia.* Introducción a los estudios históricos (3.ª ed.).

RODRÍGUEZ PANIAGUA, José M.ª: *Hacia una concepción amplia del Derecho natural.*

RODRÍGUEZ PANIAGUA, José M.ª: *Marx y el problema de la ideología.*

SÁNCHEZ DE LA TORRE, Angel: *Los griegos y el Derecho natural.*

SOTELO, Ignacio: *Sartre y la razón dialéctica.*

TIERNO GALVÁN, Enrique: *Acotaciones a la historia de la Cultura Occidental en la Edad Moderna.*

TIERNO GALVÁN, Enrique: *Razón mecánica y razón dialéctica.*

LA FILOSOFIA DE LA MATEMATICA DE JULES HENRI POINCARE

JAVIER DE LORENZO

LA FILOSOFIA DE LA MATEMATICA DE *Jules Henri Poincaré*

EDITORIAL TECNOS
MADRID

© by Javier de Lorenzo, 1974
Editorial Tecnos, S. A.
O'Donnell, 27. Madrid-9
ISBN: 84-309-0528-6
Depósito legal: M. 31543-1974

Printed in Spain - Impreso en España por EOSGRAF, S. A. - Dolores, 9 - Madrid-29

INDICE

PREFACIO

Dos son los objetivos que me han guiado al escribir este libro. Uno explícito: exponer, de la manera más sistemática posible, el pensamiento de Jules Henri Poincaré en cuanto a la fundamentación del hacer matemático. El otro, implícito: a través de esa exposición, tomada como hilo conductor, esbozar un recorrido histórico-crítico de las distintas líneas que se han producido en el tema de fundamentos, en Filosofía de la matemática, desde que la misma cristalizó a fines del siglo XIX como problemática con entidad propia.

Jules Henri Poincaré, nacido en Nancy el 29 de abril de 1854 y muerto en París el 17 de julio de 1912, aporta a esta problemática una serie de elementos entre los cuales considero importante resaltar los siguientes: tema de la impredicatividad; distinción entre plano lógico y plano intuitivo —o en términos posteriores hilbertianos, matemática y metamatemática; o en términos lingüísticos, sintaxis y semántica—; reflejo de ambos planos en el hacer matemático entre sistema formal y su manejo intuitivo; necesidad de las demostraciones de consistencia para el sistema formal si se suprime la génesis o el proceso constructivo directo del mismo; necesidad del principio de inducción completa —como principio y, fundamentalmente, como forma de razonamiento— en la Aritmética y en la Epiteoría de los sistemas formales; especificidad de tal forma de razonamiento en cuanto más compleja que el silogismo, más general que las reglas lógicas; enlace 'número natural-demostración formal'; necesidad de una síntesis entre el sistema formal y el razonamiento intuitivo; posición crítica en cuanto a las restantes líneas de fundamentación, especialmente los formalismos, con indicación de sus limitaciones... Todos ellos reflejan una posición constructivista que ve en la recurrencia su más adecuado método de trabajo, la más pura manifestación del razonamiento matemático, al ser un proceso directo de construcción que permite establecer el número natural base, junto con la intuición, de los sistemas matemáticos. Posición sostenida por una línea subyacente de pensamiento: el hacer matemático es un trabajo del *hombre en dialéctica con la naturaleza; es un hacer 'antropológico' que se refleja en sistemas formales, en sistemas convencionales lingüísticos que permiten su instrumentalización por otras disciplinas científicas en cuanto se dote a dichos sistemas de un referencial. Poincaré reconoce la existencia de otros pensadores que mantienen la posibilidad de una 'matemática teológica'. A pesar de su crítica, de su antagonismo a tales pensadores —representados principalmente por los logicistas—, aceptará su existencia como un hecho y, con ello, una vez más, mantendrá su tesis de que no cabe zanjar de manera definitiva la problemática de los fundamentos, al igual que no cabe considerar la existencia de unas normas lógicas fijadas de una vez para siempre del pensamiento humano.*

Sin embargo, el pensamiento de Poincaré parece haber quedado en muchas ocasiones oculto originando multitud de interpretaciones contrapuestas, incluso de unos mismos pasajes que, desde mi punto de vista, se muestran coherentes y unívocos si se tiene en cuenta el contexto general de los escritos del matemático francés. Puede deberse el hecho anterior a dos motivos: En primer lugar, la falta de exposición sistemática, organizada; Poincaré puede considerarse uno de los precursores del estilo analítico, característico de los filósofos científicos y neopositivistas: compone ensayos, en su mayoría críticos, no tratados. En segundo lugar, posee un estilo literario brillante que, en el contexto del ensayo, es vehículo que provoca oscurecimientos de su contenido. Ambos motivos posibilitan un intento expositivo de carácter sistemático, unificador, como el realizado en la Parte I de este libro. Intento al cual es factible hacer una posible crítica: al pretender una sistematización, una exposición del pensamiento de un autor, se encuentra, a veces, lo que en él se quiere buscar y se expresa lo hallado en términos no del autor, sino de quien escribe acerca del mismo. Frente a Poincaré el peligro de caer en la crítica anterior es grande, a pesar de lo cual he procurado ser lo más objetivo posible en la sistemática de su pensamiento, pero no dejo de reconocer que la crítica, si lo es, puede realizarse a lo largo de esta obra. Toda lectura es, siempre, reinterpretación, reelaboración de quien lee.

Las últimas palabras bastan para justificar, si ello fuera preciso, el primer objetivo perseguido en esta obra; objetivo que se cubre en la Parte I, aunque se complete y matice en la continuación —con reiteraciones a veces insalvables por necesarias— y *requiera de Capítulo previo en el que se esboza la actitud de Poincaré ante el hacer científico general, hacer del cual el específicamente matemático es una parcela, quizá el pórtico, fundamental. En cuanto al segundo objetivo debo observar que los temas tratados por Poincaré, sus intuiciones y su crítica a otras corrientes de pensamiento permiten un recorrido por lo hasta ahora expuesto en la fundamentación del hacer matemático, dado que los mismos constituyen el núcleo esencial de esta problemática. A partir de 1930-31, fecha de los grandes teoremas de Gödel que inician las 'limitaciones de los formalismos', se han realizado esfuerzos que, esencialmente, adoptan la forma de desarrollos técnicos al estilo matemático; esfuerzos que no se han visto acompañados de parecido desarrollo en las partes que pudieran calificarse de teóricas, salvo la nota de un cierto sincretismo producido entre las líneas justificadoras que se manifestaron en los primeros años de este siglo. De aquí que esta obra pueda enfocarse como una valoración histórico-crítica, con todas las limitaciones que encierra, de las distintas posiciones, objetivo que se cubre en la Parte II, aunque se complete y matice con lo dicho en la anterior y se haya hecho —caso Dedekind, Frege, Brouwer, Russell...— con la suficiente brevedad. Valoración que, finalmente, conduce a sostener, con Poincaré, la necesidad de compatibilizar un cierto razonamiento intuitivo con el manejo de sistemas formales que constituyen la plasmación objetivadora de tal razonamiento, de tal hacer subjetivo. Compatibilidad que muestra, desde mi punto de vista, la actualidad del pensamiento constructivista del matemático francés.*

NOTA.—*Un texto entrecomillado es cita textual; va seguido, en general, de una fecha que reenvía a la Bibliografía y, con ello, al título del texto citado; la fecha se acompaña de la página correspondiente. Cuando no se ha considerado necesario destacar, en los textos de Poincaré, fecha alguna, se indica por el número de página de las recopilaciones de ensayos, citados en abreviatura. Cuando van dos o más fechas juntas, con sus paginaciones correspondientes, el texto corresponde a la primera y la segunda o las restantes indican que el mismo pasaje, o una leve modificación, se encuentra en las mismas.*

Las abreviaturas más utilizadas son:

CH.	*La Science et l'Hypothèse.*
VC.	*La Valeur de la Science.*

CM.	*Science et Méthode.*
DP.	*Dernières Pensées.*
OC.	*Oeuvres de Henri Poincaré.*
RMM.	*Revue de Métaphysique et de Moral.*
Rev. Ph.	*Revue Philosophique.*
PM.	*Principia Mathematica*

Capítulo 1

LA POSIBILIDAD DEL HACER MATEMATICO

La Matemática ha gozado y goza de un prestigio de rigor y exactitud, de necesidad y universalidad absolutos. Prestigio asociado a la consideración de ser la Matemática *la* ciencia deductiva por excelencia: A partir de unas proposiciones consideradas como axiomas, como primeras, el matemático obtiene otras proposiciones que, según todas las apariencias, «se imponen no solamente a nosotros, sino a la misma naturaleza» *(CH.,* 1), y ello mediante una cadena de razonamientos impecable.

Sin embargo, Poincaré señalará que la realidad con la que se enfrenta el matemático es muy otra. Si ciertamente parte de algunos datos previamente admitidos, la construcción que realiza no sigue la marcha que el esquema anterior indica. En cada teoría, en cada demostración, admite convenciones y hace constantemente suposiciones, hipótesis. De ellas obtiene otras proposiciones cuya validez estará condicionada a la validez de las hipótesis admitidas. El razonamiento que en prácticamente todas las ocasiones realiza no parece mostrar carácter deductivo, particularizador, alguno. Pero es en tales ocasiones, es mediante esas construcciones mediante las cuales el matemático enriquece su ciencia, que aumenta en extensión. Aumento constante, de enriquecimiento progresivo, con cambios y generalizaciones que, en la realidad, son su estado permanente.

En Poincaré 1894 esta aparente contradicción entre la imagen generalizada de la Matemática y lo que parece ser su auténtica realidad se plantea en términos de posibilidad, en reminiscencia a la misma problemática kantiana respecto a la metafísica: «La posibilidad misma de la ciencia matemática parece una contradicción insoluble. Si esta ciencia no es deductiva más que en apariencia, ¿de dónde proviene ese rigor perfecto que nadie piensa poner en duda? Si, por el contrario, todas las proposiciones que enuncia pueden deducirse unas de otras por las reglas de la lógica formal, cómo no se reduce la matemática a una inmensa tautología?» *(CH.,* 9-10).

Subyacente al planteamiento de esta aporía hay una serie de ideas en muchos casos implícitas en torno al concepto de ciencia y sus métodos —que no puede disociarse de la Matemática, dado que es el matemático quien proporciona al científico alguno de sus instrumentos más valiosos como el lenguaje y, sobre todo, los marcos de espacio y tiempo— y a la Matemática. Ideas subyacentes que son las que, realmente, dan paso en Poincaré al planteamiento del carácter aporético del hacer matemático. Se muestra imprescindible realizar una aproximación, aunque esquemática, de tales ideas para situar el pensamiento del matemático francés, principalmente en cuanto a la ciencia, siguiendo en todo lo posible sus propias palabras, sus afirmaciones textuales. Dualmente se realizará una aproximación esquemática —desarrollada, precisada posteriormente— de su pensamiento en cuanto al hacer matemático.

§ 1. Aproximación al concepto de ciencia

1. Una ciencia consiste en «un sistema de leyes deducidas de los hechos observados» *(DP.,* 66). Ha de apoyarse en la observación, ya que «la ciencia no es ni puede ser más que experimental» *(íd.,* 43). Ahora bien, «no es suficiente observar» *(CH.,* 167). El hombre es un ser limitado y carece del tiempo suficiente para tal objetivo; «la natural flaqueza de su espíritu le obliga a hacer una elección, por más que una elección sea siempre un sacrificio» *(CM.,* 216). No basta la simple observación o la experimentación sin idea previa, sin una serie de hipótesis, alguna de las cuales serán hipótesis de trabajo y otras hipótesis serán auténticas proposiciones que podrán convertirse en leyes. Que se pueda contentar con la experiencia totalmente desnuda «es imposible, sería desconocer completamente el verdadero carácter de la ciencia. El sabio debe ordenar; se hace ciencia con hechos como una casa con piedras; pero una acumulación de hechos no es una ciencia, como un montón de piedras no es una casa» *(CH.,* 168). Además no hay experiencia sin idea preconcebida, dado que cada uno lleva en sí toda una concepción del mundo de la que no puede sustraerse fácilmente, mientras que el hecho lo es en cuanto encaje en previas hipótesis, en un previo contexto, determinado de antemano. Por otro lado, los hechos serían estériles si no hubiese espíritus capaces

de elegir entre ellos, distinguiendo aquellos detrás de los cuales se oculta algo y de reconocer eso que se oculta, «espíritus que en el hecho bruto verán el alma del hecho» *(CM.,* 25). El ejemplo de la caída de la manzana y de Newton, aunque pudiera ser falso, permite ejemplificar estas aseveraciones.

De aquí que pueda afirmarse: «la ley procede de la experiencia, pero no surge inmediatamente de ella. La experiencia es individual, la ley que se obtiene es general; la experiencia no es más que aproximada, la ley es precisa o al menos pretende serlo» *(VC.,* 142). En su forma externa «toda ley no es más que un enunciado imperfecto y provisional» que debe «ser reemplazado un día por otra ley superior, de la que no es más que la imagen grosera» *(íd.,* 251). Ahora bien, tal enunciado es la expresión «de una relación necesaria entre el estado presente del mundo y su estado inmediatamente posterior»; en otras palabras, «las leyes son, en suma, ecuaciones diferenciales» *(íd.,* 163, 174). Quizá tales leyes, para ser más precisos, no sean únicamente ecuaciones diferenciales, sino que puedan tomar «el carácter de una ley estadística» *(íd.,* 210). En cualquiera de los dos casos, o de cualquier otro que pudiera presentarse en el futuro, las leyes son enunciados que «están y no pueden estar más que en indicativo», al igual que «las verdades experimentales, y en la base de las ciencias, no hay, no puede haber otra cosa» *(DP.,* 33). Tal forma indicativa se debe a que, en la formulación, el hombre se apoya en esquemas lógicos. «No se puede concebir un silogismo en que las dos premisas estén en indicativo y la conclusión en imperativo; pero se puede concebir que esté construido sobre el modelo siguiente: Haga esto; cuando no se hace aquello, no se puede hacer esto; por tanto, haga aquello. Y parecidos razonamientos no están fuera del alcance de la ciencia» *(DP.,* 40).

2. Una ley, como enunciado o proposición, lo es de una relación entre las cosas. «Nos hace conocer algo de la realidad; pero lo que ella puede alcanzar no son las cosas mismas, como lo piensan los dogmáticos ingenuos, son únicamente las relaciones entre las cosas; fuera de estas relaciones, no hay realidad cognoscible» *(CH.,* 4).

La ciencia no tiene por objeto decir qué son las cosas. Ello comporta cuestiones «no solamente insolubles, son ilusorias y carentes de sentido» *(CH.,* 192), aunque a tales cuestiones se aboquen los metafísicos. Aparece claro, así, que la ciencia no podrá decir qué es el éter, la fuerza, el átomo, el calor, la electricidad, la vida..., lo único que puede decir es cómo se miden las relaciones que tienen esos objetos, o simplemente cómo se comparan entre sí, qué relaciones cualitativas pueden tener unos con otros. Lo que quería Fresnel «no era saber si hay realmente un éter, si está o no formado de átomos, si esos átomos se mueven realmente en tal o cual sentido; era prever los fenómenos ópticos» *(CH.,* 190.) Las relaciones entre cualidades percibidas, únicas transmisibles por el discurso, que posibilita su inteligibilidad, constituyen el valor objetivo de la ciencia. Entendiendo por objetivo lo que «debe ser común a varios espíritus, y por consiguiente poder ser transmitido de uno a otro», dado que «las sensaciones de otra persona serán para nosotros un mundo eternamente cerrado» *(VC.,* 262). Sensaciones subjetivas que son imposibles de transmitir o, con mayor precisión, lo que es imposible de transmisión es lo que en tal sensación exista de cualidad pura. Lo que no ocurre ya para las relaciones entre esas mismas sensaciones, relaciones que podrán tener el carácter de cualitativas o cuantitativas; en el primero podrán compararse simplemente; en el segundo, medirse. «No tendrá, pues, valor objetivo más que lo que sea transmisible por el 'discurso', es decir, inteligible» *(VC.,* 265).

3. El lenguaje es elemento fundamental. Es el que permite postular la base para una posible fundamentación tanto de la ciencia en general como de la Matemática en particular. Base que se apoya en la evidencia del pensamiento reflexivo, en el razonamiento propio, y en el reconocimiento por otros de ese mismo pensamiento reflexivo. «Por las comunicaciones que tenemos con los otros hombres, recibimos de ellos razonamientos totalmente hechos; sabemos que esos razonamientos no vienen de nosotros y al mismo tiempo reconocemos en ellos la obra de seres razonables como nosotros. Y como esos razonamientos parecen aplicarse al mundo de nuestras sensaciones, creemos poder concluir que esos seres razonables han visto lo mismo que nosotros» *(VC.,* 262).

4. Pero la ciencia requiere, además de un lenguaje especial, de una apoyatura en otras ramas del mismo. «Todas las leyes son obtenidas de la experiencia, pero para poder enunciarlas se precisa una lengua especial; el lenguaje ordinario es muy pobre, muy vago, además, para expresar relaciones tan delicadas, tan ricas y tan precisas» *(VC.,* 141). El lenguaje común, por otro lado, se

encuentra compuesto de términos equívocos, de ideas preconcebidas que interfieren en la imposibilidad de una experiencia desnuda, que deberá manifestarse o expresarse mediante este lenguaje ordinario, impreciso, en el que se manifesta la previa concepción del mundo que posee cada científico. La lengua especial que permite paliar este hecho viene dada por la Matemática. Y ello porque «las ecuaciones (diferenciales) expresan relaciones, y si las ecuaciones permanecen verdaderas, es que esas relaciones conservan su realidad. Nos enseñan, ahora como antes, que hay tal relación entre una cosa y otra; únicamente ese algo lo llamábamos otras veces *movimiento,* ahora lo llamamos *corriente eléctrica.* Pero esas denominaciones no eran más que las imágenes sustitutas de los objetos reales que la naturaleza nos ocultará eternamente. Las relaciones verdaderas entre esos objetos reales son la única realidad que podemos alcanzar, y la única condición es que haya las mismas relaciones entre esos objetos que entre las imágenes que estamos obligados a colocar en su lugar. Si esas relaciones nos son conocidas, nada importa si juzgamos cómodo reemplazar una imagen por otra» *(CH.,* 190).

No solamente el lenguaje matemático —en las palabras mencionadas a través de las ecuaciones diferenciales— es útil porque permita expresar las relaciones entre las cosas. Otro motivo fundamental se encuentra en el hecho de que todo enunciado científico es, ya, una generalización respecto a un hecho. Y la generalización comporta la forma matemática. Y ello «no solamente porque se tenga que expresar leyes numéricas; es porque el fenómeno observable es debido a la superposición de un gran número de fenómenos *todos semejantes entre sí» (CH.,* 187). En esta semejanza es en la que puede apoyarse la introducción de ecuaciones diferenciales. Porque lo importante no se encuentra únicamente en que cada fenómeno elemental obedezca a leyes simples, «es necesario que todos aquellos que se han de combinar obedezcan a la misma ley. Es únicamente entonces que la intervención de las matemáticas puede ser útil; las matemáticas, en efecto, nos enseñan a combinar lo semejante con lo semejante» *(íd.).* El lenguaje matemático es sin duda un instrumento cómodo, pero, además, se muestra esencial para la ciencia dado que, sin él, «la mayor parte de las analogías íntimas de las cosas nos habría permanecido desconocida para siempre; para siempre habríamos ignorado la armonía interna del mundo, que es (...) la única verdadera realidad objetiva» *(VC.,* 6-7). Es el lenguaje matemático quien, en suma, permite clasificar los fenómenos simples de los cuales enunciar, después, la proposición que los englobe.

A pesar de estas ventajas, el lenguaje matemático parecería comportar riesgos. Uno de ellos, el de interponer un velo entre la realidad y el ojo del físico al ser un lenguaje artificial, aunque a este peligro se haya respondido ya en el párrafo anterior al indicar que la realidad no está constituida más que por las relaciones entre las cosas y que la Matemática no tiene por objeto más que expresar relaciones entre tales cosas. No hay, pues, velo interpuesto alguno. Otro peligro consiste en permanecer en dicho lenguaje matemático, en creer que es dicho lenguaje el objetivo final de la ciencia. Sin embargo, una vez expresadas en ecuaciones diferenciales las leyes observadas y elegidos los parámetros correspondientes, la labor del lenguaje matemático, del matemático o físico ante tales enunciados, consiste meramente en resolver el sistema que forman y permitir una posterior explicación o interpretación de lo que tal solución indica *(CH.,* 251). La propia elección de los parámetros a integrar es cuestión no ya del matemático sino del físico o del científico en general. En otras palabras, hay elementos de la física, de la ciencia, que son indefinibles en términos de la Matemática. Pero lo que siempre ocurrirá es que, de haber una solución del sistema de ecuaciones diferenciales, habrá infinitas, y ello equivale a decir que existen infinitas interpretaciones posibles estrictamente físicas, incluso alguna de ellas no compatibles entre sí. Unicamente la experiencia permitirá decidir cuál de tales interpretaciones posibles es más adecuada.

Otro tipo de riesgo se encuentra en el hecho de que «parezco reemplazar el mundo por un sistema de símbolos simples. Ello no es por hábito profesional de matemático. (...) El mundo bergsoniano no tiene leyes; lo que puede haber de ley, es simplemente la imagen más o menos deformada que los sabios se hacen. Cuando se dice que la naturaleza está gobernada por leyes, se entiende que este retrato es aún bastante parecido. Es sobre él y únicamente sobre él que deberíamos razonar, bajo pena de ver desvanecerse la idea misma de ley que era el objeto de nuestro estudio» *(DP.,* 67). Y ello, se insiste nuevamente, porque «lo que importa no es saber lo que es la fuerza, es saber medirla. Todo lo que no nos enseñe a medirla es tan inútil al mecánico como lo es, por ejemplo, la noción subjetiva del calor y del frío al físico que estudia el calor. Esta noción subjetiva no puede traducirse en números; por tanto, no sirve para nada» *(CH.,* 129). De aquí que «todo lo que se puede buscar allí es un símbolo, menos preciso y menos cómodo que las flechas de las que se sirven los geómetras, pero igualmente alejado de la realidad» *(CH.,* 130).

5. Puede decirse, por consiguiente, que la ciencia se articula en un sistema de proposiciones que permiten conocer algunas relaciones entre las cosas. Es, por tanto, una clasificación, «un modo de relacionar hechos que las apariencias separan, aunque estén ligados por algún parentesco natural y oculto. En otros términos, la ciencia es un sistema de relaciones» *(VC.,* 265-6). Como tal clasificación no podrá decirse de ella que es verdadera o falsa, sino que es más o menos cómoda. Comodidad no apoyada en el libre arbitrio del científico, ya que si es cómoda para todos no lo será por casualidad precisamente, ya que «sin duda esas relaciones, esta armonía no podrán ser concebidas fuera de un espíritu que las conciba o sienta. Pero son sin embargo objetivas porque son, llegarán a ser o permanecerán comunes a todos los seres pensantes» *(VC.,* 271). Además, tal clasificación surge de la experiencia para condensarse en unas expresiones matemáticas, de las que se obtienen infinitas soluciones. La elección de una de ellas se hará en función de tal comodidad, apoyándose en la simplicidad de la misma y, por supuesto, en la capacidad de predicción que tenga, contrastándose ésta mediante la experiencia nuevamente. Por otro lado, no hay que olvidar que dicha arbitrariedad se encuentra condicionada por otro hecho, fundamental, el que la ciencia «es una obra colectiva, y no puede ser otra cosa; es como un monumento cuya construcción exige siglos y en el que cada uno debe aportar su piedra; y esta piedra le cuesta a veces toda su vida» *(DP.,* 38).

6. Si la ciencia es un sistema de leyes, de proposiciones que se ha elevado del hecho particular, de la proposición experimental que lo traduce, a la ley general, la ciencia no es únicamente tal sistema. Aunque tenga por objeto lo general y en presencia de un hecho particular el científico quiera conocer la ley general, aspirando a una generalización cada vez mayor *(DP.,* 37), también tiene otro objetivo, el de prever. A pesar de que «no se puede decir que la acción sea el principio de la ciencia» *(VC.,* 220), en esta previsión es en la que se apoya para ser útil, para servir como norma de acción y, básicamente, para tener un valor «como medio de conocimiento» *(VC.,* 219).

Si «ante todo el sabio debe prever» *(CH.,* 168), debe hacerlo sabiendo que «por sólidamente asentada que pueda parecernos una previsión, no estamos nunca *absolutamente* seguros de que la experiencia no la desmentirá si nos proponemos verificarla» *(CH.,* 171). Es por lo que «la verdadera ciencia teme las generalizaciones prematuras, las deducciones teóricas» *(DP.,* 43). A pesar de lo cual, como norma de acción, «la vemos actuar diariamente ante nuestros ojos» *(CH.,* 4), transformando profundamente el habitat humano y haciendo que el científico pueda tener nuevos y más precisos instrumentos para elaborar nuevas proposiciones, nuevas hipótesis que han de contrastarse nuevamente mediante la experiencia, y que una vez confirmadas por ésta, puedan convertirse en verdades fecundas o, si la experiencia no las confirma, deban abandonarse o modificarse.

7. Se ha dicho ya que la ciencia no es una acumulación de hechos, que exige la existencia de un ser que organice las proposiciones acerca de tales hechos. En otras palabras, la ciencia es el resultado de una interacción hecho-observador. Faltar uno de los elementos de esta relación equivale a la desaparición de la ciencia, aún más, de cualquier relación de tipo equivalente. Pero el observador no es un mero ente pasivo. Está obligado a crear marcos, sistemas para adaptarse mejor a la naturaleza y sobrevivir en ella. Sin embargo, «el cerebro del sabio, que no es más que un rincón del universo, no podrá jamás contener el universo entero, de suerte que entre los innumerables hechos que la naturaleza nos ofrece, habrá unos que serán eliminados y otros que serán retenidos» *(CM.,* 24), por más que esta selección le sea costosa. Ello hace que la ciencia sea siempre una conquista, un trabajo, parcial y limitado, ya que «querer encerrar la naturaleza en la ciencia sería como meter el todo en la parte» *(CM.,* 16). Pero ésta es una conquista a la que el hombre no puede renunciar. Para llevarla a cabo ha de suponer una gran cantidad de hipótesis, como la armonía ya mencionada como propia de la verdadera realidad objetiva que el hombre puede alcanzar. «Esa armonía que la inteligencia humana cree descubrir en la naturaleza, ¿existe fuera de esa inteligencia? No, sin duda, una realidad completamente independiente del espíritu que la concibe, la ve o siente, es una imposibilidad. Un mundo tan exterior como ése, incluso si existiera, nos sería radicalmente inaccesible. Pero lo que llamamos realidad objetiva es, en último término, lo que es común a varios seres pensantes, y podría ser común a todos; esta parte común, lo vere-

mos, no puede ser más que la armonía expresada por leyes matemáticas» *(VC.,* 9-10). «Sin duda un espíritu más vasto y fino que el nuestro juzgará de otro modo. Pero importa poco; no es de este espíritu superior del que nos podemos servir, sino del nuestro» *(CM.,* 217).

8. Si es del hecho del que tiene que partir para obtener una proposición experimental y es de varias proposiciones experimentales de las que parte para obtener una ley, una proposición general, ello indica que el científico utiliza un proceso generalizador, un método que tradicionalmente se ha calificado de inducción. Ahora bien, «está claro que un hecho cualquiera puede generalizarse de una infinidad de maneras, y se trata de elegir» *(CH.,* 173). Si «el método científico consiste en observar y experimentar» *(CM.,* 11), tal método reposa «sobre la inducción que nos hace esperar la repetición de un fenómeno cuando se reproducen las circunstancias en las cuales se había presentado por vez primera. Si *todas* esas circunstancias pudieran reproducirse a la vez, este principio podría ser aplicado sin temor: pero eso no sucederá nunca; alguna de esas circunstancias faltarán siempre. ¿Estamos absolutamente seguros de que carecen de importancia? Evidentemente, no. Eso podrá ser verosímil, eso no podrá ser rigurosamente cierto» *(CH.,* 6). En esta verosimilitud se apoya el que todas las veces que se razona por inducción se «hace uso más o menos conscientemente del cálculo de probabilidades» *(CH.,* 214). En otras palabras, lo que se pudiera calificar 'problema esencial del método experimental' se encuentra en la probabilidad de las causas, es decir, en deducir causas de efectos *(CH.,* 222). Es la esencia misma de la generalización.

El enunciado de una ley es forzosamente incompleto ya que debería comprender la enumeración de *todos* los antecedentes en virtud de los cuales un consecuente dado podrá producirse. «Debería describir primeramente *todas* las condiciones de la experiencia a realizar y entonces la ley se enunciaría: si todas las condiciones son cumplidas se producirá tal fenómeno» *(VC.,* 249). Tal descripción de todas las condiciones sólo es posible cuando se haya descrito el estado del universo entero en un instante t, lo cual permitiría deducir el estado del mismo en el instante $t+dt$, o también en el $t-dt$. Ello es imposible para la pequeña porción de naturaleza que es el cerebro humano. De ahí que únicamente quepa decir: «si tales y tales condiciones son realizadas, es probable que tal fenómeno se producirá aproximadamente» *(VC.,* 249). Por ello es «tan difícil de justificar ese principio (la inducción) como de pasarse sin él» *(VC.,* 258). A pesar de lo cual resulta ser clave para poder realizar las generalizaciones de que se compone la ciencia, porque permite interpolar y, por consiguiente, obtener leyes y, de éstas, por nuevas interpolaciones, pasar a leyes cada vez más generales, más extensas. Naturalmente, el empleo de este método implica riesgos. «Se pueden tener razones para esperar que las observaciones no se contradigan de hecho, o que las contradicciones no serán irreducibles, pero por así decir no estamos protegidos contra el riesgo de una contradicción por las reglas mismas de la lógica formal» *(DP.,* 55-6).

El proceso inductivo, generalizador, se ve claramente en el método del geólogo que puede realizar deducciones y llegar a conclusiones a partir de unos datos observados, particulares, mientras que el matemático no puede hacer lo mismo. «Si de una circunstancia única, concluye a circunstancias anteriores múltiples; si la extensión de la conclusión es de alguna manera mayor que la de las premisas, es posible que lo que se deduzca de una observación se encuentre en desacuerdo con lo que se obtenga de otra» *(DP.,* 55). El método generalizador, por poco fundamentado que esté, es radicalmente necesario, sin embargo, y hay que observar que consiste en una *inferencia deductiva* que conduce, a partir de las proposiciones que se refieren a un fenómeno o a una serie de fenómenos semejantes pero siempre particulares, y que por eso mismo son proposiciones de carácter experimental, a una proposición más general que enuncia la ley más extensa que engloba las proposiciones anteriores como conclusión de las mismas. Esta ley, por tener un contenido mayor que las proposiciones particulares, experimentales, de las que se infiere, permite a su vez prever nuevas experiencias, nuevas proposiciones experimentales que confirmarán el acierto o no de tal ley, aunque no de modo directo, ya que la misma, al ser elegida como conclusión de una inferencia de carácter inductivo, puede calificarse de convención porque no se obtiene en tal inferencia con la necesidad que impondría la deducción formal. La confirmación se hará si las previsiones a que da paso esta ley, las nuevas proposiciones experimentales que de ella se obtienen, y ahora con absoluto rigor formal deductivo, son acertadas, contrastadas afirmativamente por la experiencia. Si no lo son, la ley, como proposición, podrá mantenerse, pero no servirá para nada. De aquí que, cuando se llegue a una situación de este tipo, se la abandone por otra más operativa. «Si un principio deja de ser fecundo, la experiencia, sin contradecirlo directamente, lo habrá condenado, sin embargo» *(VC.,* 209).

Si este método inductivo de generalización comporta riesgos, comporta simultáneamente una serie de postulados e hipótesis en los cuales se apoya para ser utilizado. Principio esencial, clave para el razonamiento, al igual que el de no-contradicción, es el de razón suficiente. Pero a diferencia del de no-contradicción, de carácter eminentemente lógico, el principio de razón suficiente muestra un carácter acentuadamente gnoseológico. «Desgraciadamente, este principio es muy vago y muy elástico» *(CH.,* 243), adoptando múltiples formas. Así, para el cálculo de probabilidades permite adoptar la forma de la continuidad apoyándose en dicho principio, que puede adoptarse como hipótesis o punto de partida. A condición de que intervenga únicamente en tal hipótesis, con lo cual «los problemas en los que el cálculo de probabilidades puede ser aplicado con provecho son aquellos en que el resultado es independiente de la hipótesis hecha al principio, siempre que únicamente satisfaga esta hipótesis a la condición de continuidad» *(CH.,* 244). Creencia en la continuidad que «sería difícil justificar por un razonamiento apodíctico, pero sin la cual toda ciencia sería imposible» *(íd.)*.

Junto al principio de razón suficiente otras dos hipótesis se muestran como imprescindibles: la unidad de la naturaleza y su simplicidad. La primera es aceptable o puede serlo para todos, lo que no ocurre con la segunda, ya más difícil, pero que se muestra, a pesar de esta posible diferencia y dificultad de aceptación, como realmente operativa. Gracias a estas dos hipótesis cabe hablar de una armonía de la naturaleza y traducirla al lenguaje matemático. Gracias a ellas puede afirmarse que la ciencia «tiende cada vez más a mostrarnos la solidaridad de las diversas partes del universo, a desvelarnos la armonía; porque esta armonía sea real, o porque sea una necesidad de nuestra inteligencia, y por consiguiente un postulado de la ciencia, es una cuestión que no intentaré decidir. La ciencia siempre va hacia la unidad y nos hace ir hacia la unidad. Igual que coordina las leyes particulares y las liga a una ley más general» *(DP.,* 41).

9. Apoyándose en el método inductivo —y en las creencias o hipótesis que permitirían una posible justificación del principio de inducción—, el científico construye un sistema de proposicio-

nes, que pretende objetivo, sistema que constituye el sistema científico. Pero este sistema de proposiciones debe ser ordenado porque «un conjunto absolutamente desordenado no podría tener valor objetivo, ya que sería ininteligible, pero un conjunto bien ordenado puede no tener ninguno; si no corresponde a sensaciones efectivamente experimentadas» *(VC.,* 265). La arbitrariedad en la elección del buen orden ha de quedar garantizada, nuevamente, por la experiencia. No hay, no puede haber, por esta garantía, arbitrariedad alguna; sí libertad electiva. Dentro de las garantías señaladas, el científico podrá elegir el orden expositivo que más le agrade. Seguirá en tal elección, en general, las líneas que muestren mayor simplicidad y armonía; se dejará guiar, normalmente, por un afán que puede calificarse de estético. Sin embargo, cabe hacer dos grandes agrupaciones en las posibilidades expositivas: engranaje de las proposiciones, pero manteniendo su enlace con el aspecto experimental, aunque ello signifique que deban exponerse en capítulos separados, con características propias, ramas que cabe unificar; o bien engranaje de las proposiciones en exposición deductiva *a priori,* como ciencia de principios. Los científicos continentales tienden a este último tipo expositivo en disciplinas como la Mecánica, partes de la Dinámica y, desde luego, la Geometría; los científicos ingleses hacen todo lo contrario, así Maxwell *(CH.,* 110).

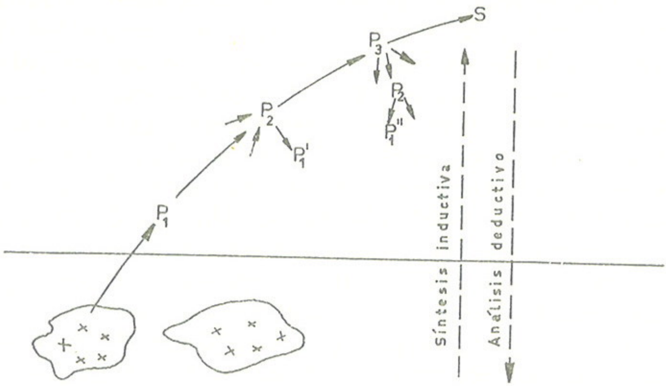
El educado en la exposición tradicional, frente a un sistema científico «no solamente no tolerará en él la menor apariencia de contradicción, sino que exigirá que las diversas partes estén lógicamente vinculadas entre sí y que el número de hipótesis esté reducido al mínimo» *(CH.,* 248). Y ello porque, para él, la idea de sistema deductivo se articula en 'ciencia deductiva de principios'. Una ciencia adoptaría tal carácter cuando se hace descansar a todo el sistema de proposiciones obtenido tras la experiencia en unos primeros principios o proposiciones que se adoptan como indemostrables. A tales primeros principios puede denominárseles axiomas, hipótesis, postulados; puede discutirse, también, que sean enunciados de hechos experimentales o juicios sintéticos —ya *a priori,* ya experimentales puros—, o juicios analíticos, o convenciones, pero en la constitución de una ciencia deductiva de principios, como indica Poincaré, 1887, «su existencia misma no es dudosa» *(1887,* 79). Retomando el clásico argumento de la imposibilidad de regreso al infinito, en 1891, «toda conclusión supone premisas; esas premisas o son evidentes por sí mismas y no tienen necesidad de demostración, o bien no pueden ser establecidas más que en otras proposiciones, y como no se podría remontar así hasta el infinito, toda ciencia deductiva, y en particular la geometría, debe descansar sobre un cierto número de axiomas indemostrables» *(CH.,* 49). En otras palabras, la exposición clásica de un sistema científico es la que permite partir de hipótesis nítidamente enunciadas para deducir de ellas todas las consecuencias con rigor matemático. Consecuencias que, en sistemas cuya base es experimental, han de compararse de modo inmediato con la experiencia *(CH.,* 248).

Hay que observar que en tal sistema deductivo los principios o proposiciones primeras han de ser de dos tipos: los propios de la ciencia que pretende exponerse, más otra serie que corresponde a disciplinas en las cuales tal ciencia se apoye. Así, en Geometría se encuentran las correspondientes al Análisis, «porque consideramos los resultados del Algebra y del Análisis puro como ya conocidos en el momento en el que se aborda el estudio de la Geometría» *(1887,* 79). Lo mismo se hace en Mecánica donde se supone conocida, por previamente construida, la Geometría y, por consiguiente, el Análisis puro; análogo para aquellas partes de la Dinámica que pretenden ser expuestas de esta forma.

Este hecho indica ya la importancia que tiene la elección de tales primeros principios y los problemas que se ligan a tal elección. Entre éstos, el de poder separar y distinguir unos principios de una clase respecto a los pertenecientes a otra; la mayor o menor universalidad de alguno de ellos y su potencia deductiva; la independencia de unos respecto a otros. Así, en particular en Geometría —modelo por otro lado de este tipo expositivo—, «se ha establecido que el *postulatum* de Euclides es indemostrable. Pero este postulado no puede ser la proposición única sobre la cual reposa toda la Geometría; porque muchos resultados pueden demostrarse sin él» *(1887,* 79). La discusión acerca de la naturaleza de los principios propios a elegir como primeros en la exposición de una ciencia —si analíticos, sintéticos, *a priori, a posteriori,* convenciones— incumbe al científico expositor de la misma. En cuanto a los primeros principios o hipótesis de sistemas deductivos como la Geometría o la Mecánica son, realmente, principios aparentes que pueden ser calificados de convenciones unos y otros de definiciones disfrazadas de los términos indefinibles explícitamente que en ellos intervienen. En tales convenciones «lo que hay de verdadero es lo que es común a todos los autores; es la afirmación de tal o tal relación entre las cosas que los unos llaman con un nombre y los otros con otro» *(CH.,* 191-2).

Ahora bien, la elaboración del orden de las proposiciones de un sistema científico no tiene, no debe tener, un fin en sí de carácter meramente estético o de satisfacción del rigor lógico, satisfacción que quizá pudiera reducirse al primero. En primer lugar, porque «la evolución natural de toda ciencia» se articula en tres fases: Puramente descriptiva, Comparativa, Explicativa *(DP.,* 44). Y únicamente cabe hablar de exposición deductiva, con rigor, en esta última fase, alcanzada por muy pocas ramas científicas. En segundo lugar, y fundamentalmente, porque tal exposición es un método de organizar las distintas proposiciones y, como tal, posee una finalidad extrínseca, la de convertirse en un más nítido y operativo método de previsión. Pero en este caso pueden obtenerse nuevas proposiciones que no encajen en tal sistema y se necesite la elaboración de otro con otros principios y, quizá, con otras reglas. Ocupa, por ello, esta fase expositiva, una de las etapas mediante las cuales se construye cada ciencia, que jamás se encuentra clausurada, sino en permanente estado de generalización y aumento.

10. *Resumiendo.*—Como resumen, quizá, de todo ese proceso de construcción, de lo indicado en esta aproximación al pensamiento de Poincaré, cabe representar tal proceso por un esquema



como el adjunto. A partir de unos hechos, naturales o provocados mediante la experimentación, y agrupados mediante un criterio de semejanza en clases de equivalencia, el científico enuncia una serie de proposiciones p_1 de carácter experimental, que suponen ya una cierta generalización. Tales proposiciones admiten el contraste experimental, que será quien posibilite el calificativo de verdaderas o falsas. Además, las proposiciones p_1 permiten obtener, mediante una inferencia, alguna proposición p_2 aún más general que las englobe como casos particulares. Al ser p_2 más general, permitirá igualmente deducir otras proposiciones más particulares p'_1 y de carácter experimental, respecto a las cuales tiene sentido lo dicho para las proposiciones p_1. A partir de una serie de proposiciones p_2 puede inferirse una ley, p_3, más general y que permitirá obtener, de ella, nuevamente proposiciones de los tipos p_1 y p_2, falsables. Dado un conjunto de leyes cabe ordenarlo en sistema deductivo de principios, para lo cual habrá que elegir algunas proposiciones p como principios, de carácter absolutamente general, englobador de las ya existentes y que permitan deducir nuevas leyes y proposiciones mediante el empleo del razonamiento deductivo, con rigor matemático, hasta llegar a proposiciones de carácter nuevamente experimental.

Hay, pues, interrelacionadas, dos fases en la construcción de cada ciencia: Un proceso de generalización mediante lo que cabe calificar de *síntesis inductiva,* carente del rigor propio, de la necesidad que suele ser atribuida a la Matemática y que requiere ser contrastado en cada paso con la experimentación, en la cual, naturalmente, influye a su vez, dado que cualquier generalización, por interpolar, modifica la experiencia. Pero a partir de las premisas del sistema deductivo y de las proposiciones obtenidas en los niveles p_2, etc., pueden obtenerse, mediante un proceso de *análisis deductivo,* proposiciones que son, en cada deducción, más particulares, consecuencias que han de llegar a ser falsables nuevamente.

Paso a paso las proposiciones que se van obteniendo en la síntesis inductiva, al reiterar el proceso a lo largo del tiempo, permiten lograr una generalización mayor, mostrando la solidaridad de las diversas partes del universo y mostrando, a la vez, que el proceso de síntesis inductiva y el proceso de análisis deductivo se interpenetran entre sí de modo radical, no pudiendo considerarse aisladamente, sino como los verdaderos constituyentes del hacer científico, en una unión absoluta que impide que la ciencia se pueda convertir, en su totalidad, en un sistema deductivo acabado, con radical y absoluta validez para todo tiempo.

Se observa, finalmente, y reiterando, que para la construcción de la ciencia el científico se sirve, como mínimo, de tres elementos según la interpenetración mencionada: Experimentación, Lenguaje matemático, Lógica. Son los instrumentos de que se vale el científico en su trabajo, las herramientas de las que dispone tanto para hacer progresar como para fundamentar un sistema deductivo, por provisional que sea y, con él, el hacer científico. Y, con ellos, lograr un conocimiento cada vez mayor de la naturaleza, de las relaciones que ligan unos objetos con otros en la misma, relaciones que constituyen la única realidad objetiva, cognoscible.

§ 2. Aproximación al concepto de matemática

Desde la plasmación en *Elementos* llevada a cabo por los matemáticos griegos, la Geometría se ha considerado como el modelo de sistema deductivo de principios. Modelo en el cual cabe inspirarse para exponer, como se ha señalado, otras disciplinas científicas como la Mecánica. Newton realizó esta labor en sus *Principia.* Pero la Geometría se apoya en principios que son, algunos, del Análisis; no constituye toda la Matemática, sino una parcela, relativamente pequeña, además, de la misma. A pesar de lo cual se ha extrapolado y a cualquier teoría matemática se le atribuyen los rasgos propios de una manera no ya de hacer, sino de exponer una de sus parcelas. Toda la Matemática ha quedado convertida en el ejemplo de ciencia deductiva, modelo de rigor y de universalidad en cuanto a la validez de sus proposiciones. Las ideas de Poincare, he indicado, respecto a esta extrapolación son muy diferentes. Los rasgos distintivos que atribuye al hacer matemático —admito que forma parte del hacer científico— pueden resumirse en los puntos siguientes, en paralelismo con los rasgos que atribuye a cada ciencia en general:

Es un hecho que la Matemática no hace sino aumentar en el número de sus proposiciones, enriqueciéndose a lo largo del tiempo. En cada instante hay más teoremas, más propiedades que en cualquier otro instante anterior. La Matemática es una disciplina en constante expansión, en permanente devenir, siempre fecundo.

En cada instante, el matemático encuentra analogías, afinidades entre las distintas parcelas, logrando unidad allí donde parecía haber diferencias profundas. Así, la geometría enlaza con el análisis mediante las geometrías no-euclídeas y las funciones meromorfas; a la vez con el álgebra al observar que tales funciones constituyen un grupo, apoyatura a su vez de la geometría; la Teoría de números, cuyo objeto es lo discreto, utiliza de un modo fecundo el Análisis, cuyo objeto es lo continuo... Interrelaciones que indican que, a pesar de su aumento constante, el hacer matemático constituye una unidad.

Junto a este permanente aumento del contenido también es un hecho que la marcha del hacer matemático en cada una de sus parcelas, en cada una de sus proposiciones, es la generalización: el paso de una proposición a otra más general; el paso de una teoría a otra más amplia que la englobe o reduzca a caso particular, si no a mero ejercicio *(VC.,* 30). «En cada página el autor anunciará la intención de generalizar una proposición ya conocida» *(CH.,* 11). Aunque tal generalización la exprese después en otros casos particulares, ejemplificadores, combinando así la síntesis con el análisis.

Las proposiciones de la Matemática, a pesar del aumento de las mismas y de las constantes generalizaciones, gozan de un carácter de rigor absoluto «que nadie piensa poner en duda» *(CH.,* 9-10). Obtenida una proposición matemática, su validez —si no contradice proposiciones ya establecidas— será permanente. Quizá se delimiten los campos de tal validez —proceso ya indicado en el párrafo anterior—, pero jamás se la podrá negar dentro de los mismos, ya que la experiencia empírica no le afecta y la proposición en sí constituye, prácticamente, una caracterización de tal campo.

La Matemática, como sistema de proposiciones, es una creación libre, aunque no arbitraria, del hombre. «El espíritu tiene la facultad de crear símbolos» *(CH.,* 40). Es el matemático «quien construye con todas las piezas una combinación nueva relacionando los elementos» *(CH.,* 24). Si el científico era el creador de símbolos para construir la ciencia, si era el creador de las proposiciones y leyes de la naturaleza, realiza tal construcción no arbitrariamente, sino como resultado de una interrelación con la naturaleza, mediante la experiencia a la que debe acudir para falsar sus proposiciones y leyes. La experiencia era su motor, su contraste. El matemático no puede acudir a la misma. El matemático, en su libertad creadora, se encuentra, sin embargo, tan condicionado como el científico en general. Aunque el condicionante sea de un tipo diferente al empírico. La potencia creadora del matemático «no está limitada más que por la necesidad de evitar toda contradicción; pero el espíritu no la emplea más que si la experiencia le da un motivo » *(CH.*, 40). En su construcción, etapa tras etapa, el matemático debe evitar cualquier tipo de contradicción; es lo único que le garantiza la coherencia de la misma. Además, se encuentra condicionado, al igual que el científico, por su educación, su habitat y, fundamentalmente, por su evolución biológica como especie *(CH.*, 72, 74), condicionado por la «experiencia ancestral de la raza» *(CH.*, 109; *VC.*, 129; *CM.*, 81, 89 ss.). En este sentido, su espíritu no es tan libre, abocado a pensar conforme a unas estructuras psicofisiológicas que no ha tenido libertad para elegir. El hombre, cada individuo es un ser limitado que debe ir conquistando el conocimiento en un trabajo conceptual constante. Pero es gracias a ese pensamiento estrictamente humano como transforma la naturaleza. «Las leyes consideradas como existentes fuera del espíritu que las crea o que las observa ¿son inmutables *en sí?* No solamente la cuestión es insoluble, sino que carece de sentido alguno. ¿A qué preguntarse si en el mundo de las cosas en sí las leyes pueden variar con el tiempo, cuando en parecido mundo, la palabra tiempo quizá carezca de sentido? De lo que ese mundo es, nada podemos decir, ni pensar, sino únicamente de lo que parezca o pudiera parecer a inteligencias que no difieran mucho de la nuestra» *(DP.*, 66).

Es actitud radical de que el conocimiento es un proceso de construcción, no de descubrimiento de relaciones entre objetos de un mundo, de cosas en sí, trascendente. Actitud que impide hablar de *la* Ciencia, *la* Matemática, como construcciones o sistemas independientes de quien las realiza, por limitado que sea; aunque, por abuso de lenguaje, se utilicen tales términos para denotar el resultado del hacer, del trabajo, provocando una cierta reificación con ello. Es actitud que conduce a Poincaré, por ejemplo, a negar la afirmación que hiciera Couturat: «Si los logísticos tienen éxito donde los otros han fracasado, Poincaré bien querrá recordar esta frase y *hacer el honor de la solución a la logística*», con un rotundo «Pero no (...) Si tiene éxito, *haré honor a la intuición de Russell...*» (*CM.*, 139) [1]. Es actitud que obliga a ciertas restricciones respecto al infinito: «Un teorema debe ser verificado, pero como nosotros somos finitos, no podemos operar más que sobre conjuntos finitos; por tanto, aunque la noción de infinito desempeñe un papel en el enunciado del teorema, es preciso que en la verificación no constituya ya un problema; porque en ese caso la verificación sería imposible» (*DP.*, 85).

[1] Subrayados míos.

Insistentemente se ha citado la frase de Poincaré, auténtica *boutade,* «las Matemáticas son el arte de dar el mismo nombre a cosas diferentes» (*CM.,* 30) (*VC.,* 143). Así enunciada podría reflejar su pensamiento acerca de la invención matemática, del proceso de analogía o de la importancia que el lenguaje matemático posee para las restantes ciencias. Pero, de hecho, deforma el pensamiento del matemático francés, su enfoque del hacer matemático. Ciertamente, «los matemáticos no estudian objetos, sino relaciones entre objetos; les es indiferente por ello reemplazar esos objetos por otros, siempre que las relaciones no cambien. La materia no les importa, sólo la forma les interesa» (*CH.,* 32). Con lo cual «las teorías matemáticas no tienen por objeto revelarnos la verdadera naturaleza de las cosas; ésa sería una pretensión irrazonable. Su único objeto es coordinar las leyes físicas que la experiencia nos hace conocer, pero que sin el auxilio de las matemáticas no podríamos siquiera enunciar» *(CH.,* 245). En otras palabras, la Matemática es una «forma pura» (*VC.,* 143), pero condicionada siempre a la experiencia de relaciones fácticas, enlazada por siempre con las restantes ciencias y, a su través, con un contenido intuitivo del que no debe ser separada arbitrariamente. Precisamente quien enseña a conocer las analogías entre las cosas «es el espíritu matemático, quien desprecia la materia para no adherirse más que a la forma pura. Es él quien nos ha enseñado a designar con el mismo nombre a seres que no difieren más que por la materia, a designar con el mismo nombre por ejemplo la multiplicación de los cuaterniones y la de los números naturales» (*VC.,* 143). Ahora bien, los símbolos se construyen no sólo por el amor de tal construcción, sino porque las proposiciones que los enlazan «no están en contradicción con diversas proposiciones llamadas intuitivas y que se han obtenido de nociones empíricas más o menos elaboradas» *(CH.,* 40-1). El símbolo '$\sqrt{2}$' no es una construcción arbitraria, salida enteramente de la mente del matemático; es un símbolo construido como culminación de un proceso que comienza con la noción o idea intuitiva, casi empírica, del continuo físico. Proceso que, correctamente conducido, es decir, sin contradicciones en sus etapas, conduce a la creación del continuo matemático, conjunto de símbolos no contradictorio que responde en parte a la elaboración de unas nociones intuitivas, empíricas. Es por lo que puede sostenerse que «reduciendo el pensamiento matemático a una forma hueca se le mutila» *(CM.,* 115). Aunque las proposiciones matemáticas no puedan ser consideradas como empíricas, ni obtenidas directamente de la experiencia, el matemático ha de elaborarlas condicionado siempre por tal experiencia, de aquí que «el matemático puro que olvidara la existencia del mundo exterior, sería semejante a un pintor que supiera combinar armoniosamente los colores y las formas, pero a quien los modelos le faltaran. Su potencia creadora pronto se agotaría» (*VC.*, 148). Alguna de las nociones fundamentales que construye el matemático preexisten en su espíritu —como la de número natural, la estructura de grupo—, pero sólo puede darles su verdadero alcance en contacto con la experiencia: para la constitución de la Geometría, el matemático se apoya en la estructura de los desplazamientos de los cuerpos sólidos, que dan paso a los cuerpos ideales y a ese mismo grupo algebraico, cuya noción «está sacada enteramente de nuestro espíritu y la experiencia sólo es una ocasión que nos ayuda a hacerla surgir» (*CH.*, 90).

Todos los símbolos que componen la Matemática pueden ser construidos con motivo de la experiencia, aunque no de una mera abstracción de la misma. En esta construcción, un primer estadio lo constituye el número natural, por un lado; la estructura algebraica de grupo, por otro. La experiencia 'ha forzado' al matemático a crear el continuo y, con él, el Análisis. Sin ello toda la Matemática se hubiera reducido a la Aritmética o a la teoría de sustituciones algebraica. Y si bien cabe afirmar que sólo en el número natural hay auténtico rigor «y por consiguiente verdad matemática» y que «si *todo* sale del número natural, era el único capaz de hacer salir *tanto*» (*VC.*, 150), el Análisis ha logrado abrir perspectivas inalcanzables para la Aritmética. Entre ellas, la de una unidad, la de una ordenación simple y simétrica, penetrando en la propia teoría de números —por obra de Hermite, como reconoce Poincaré, y de él mismo—, «y esta invasión ha establecido el orden allí donde reinaba el desorden» (*íd.*). Igualmente es el Análisis el instrumento del que dispone el científico, ya como ejemplo de construcción, ya como lenguaje imprescindible. En otras palabras, el conjunto de símbolos, de formas puras construido por el matemático ha de poseer un contenido intuitivo del que no cabe prescindir sin mutilarlo simultáneamente.

Puede observarse, finalmente, que si la experiencia fuerza al matemático a crear todo un conjunto de símbolos y proposiciones acerca de tales símbolos, dichas proposiciones son independientes de la experiencia. La Matemática, de esta forma, no puede apoyarse en la experimentación para ser fundamentada ni siquiera explicada. De aquí que sus instrumentos sean las reglas lógicas y, a diferencia de las restantes ciencias, los propios recursos del razonar matemático. En este sentido cabe recordar el caso de la Geometría en cuya elaboración como sistema deductivo intervienen únicamente esos dos factores: reglas lógicas, reglas propiamente matemáticas. Sin embargo, la Geometría no es *la* construcción que pudiera considerarse paradigmática, al menos en su versión expositiva y de aquí, precisamente, que la construcción de las restantes ramas matemáticas se muestre como aporética al no prestar la debida atención a esos recursos intrínsecos del razonar creador matemático.

§ 3. Superación de la aporía

Las últimas afirmaciones se apoyan en el hecho de que, para Poincaré, la Lógica puede prestar como auxilio al hacer matemático únicamente unos principios analíticos, como el de identidad, y unos razonamientos deductivos, que son estériles, ya que «es sobre todo en Lógica que nada se obtiene de nada» (*1887,* 79). Y aunque el concepto de Lógica se ampliara para dar entrada a principios propios del Análisis y a razonamientos distintos a los silogismos categórico e hipotético, como pueden ser los apoyados en las reglas de cálculo numérico, las de igualdad o sustitución, el método 'constructivo', tales principios y métodos son juicios analíticos y reglas analíticas y tautológicas, es decir, no constructivos o sintéticos. En cuyo caso la Matemática se organizaría como una ciencia deductiva de principios, pero no ya en alguna de sus parcelas, sino en su totalidad.

Consecuencias del concepto 'ciencia deductiva'

Ahora bien, el propio concepto de ciencia deductiva de principios se mostraba a Poincaré como cuestionable. Ya he ido indicando antes algunas razones de ello, implícita y explícitamente, al indicar la negativa del matemático francés a que las ciencias pudieran exponerse en tal forma de una manera absoluta. A tales razones pueden agregarse algunas consecuencias que del concepto de ciencia deductiva obtenía Poincaré:

1. Una disciplina deductiva pura es, o bien tautológica, o bien una mera construcción artificial que nada agrega al conocimiento. Al ser los razonamientos deductivos analíticos y tautológicos, únicamente puede encontrarse en la conclusión lo establecido en los primeros principios. Si éstos se apoyan o pueden reducirse únicamente al de identidad, entonces el sistema construido es una mera tautología. No sería tautología, pero sí un juego diversionista, la ciencia construida agregando a tales principios reducibles al de identidad algunos de cualquier otro tipo, siempre que se desarrollara, al igual que en el caso anterior, con los razonamientos exclusivamente deductivos.

2. Cabría la posibilidad de que existiera un espíritu lo suficientemente potente como para abrazar, de una mera ojeada, todo el edificio construido. Aún más, a tal espíritu le bastaría contemplar los primeros principios —sean del tipo que sean— para conocer toda la ciencia, todo el conjunto de proposiciones que se pudieran obtener de los mismos, y ello aun admitiendo que el número de transformaciones realizadas mediante los razonamientos deductivos fuera infinito abierto ya que el contenido, si lo hay, de todo el sistema se encuentra únicamente en las premisas de partida. Pensamiento plausible de espíritu omnipotente que, naturalmente, se queda en tal pensamiento (*CH.*, 11).

3. Versión ligada a la consecuencia anterior sería la de pensar en la posibilidad de crear una máquina —al estilo del piano lógico de Stanley Jevons— para obtener todos los teoremas de la ciencia a partir de las premisas sin intervención alguna del espíritu humano (*CM.*, 114).

4. Podría admitirse la posibilidad de crear un lenguaje —que pudiera calificarse de formal, con muy pocos signos— apto para expresar todos los conceptos y proposiciones de la ciencia; lenguaje, a la vez, lo suficientemente simple como para ser captado por «una inteligencia ordinaria» (*CH.*, 11).

1'. Consecuencia resumen de las cuatro anteriores se tendría que la aceptación de la existencia de una ciencia deductiva de principios implicaría, en el fondo, que la ciencia de la que se habla no existiría, convertida en mera captación intuitiva de los conceptos y premisas de partida. En realidad, habría desaparecido el propio razonamiento deductivo tan elevado a categoría clave, convertido en pobre sustituto de una intuición también pobre, impotente para captar de un mero golpe la totalidad de la ciencia. «El razonamiento no podría darnos más que las verdades inmediatamente evidentes prestadas por la intuición directa; no sería más que un intermediario parásito y entonces, ¿no cabría preguntarse si todo el aparato silogístico no sirve únicamente para disimular nuestro préstamo?» (*CH.*, 10-1).

5. Junto a las cuatro consecuencias y su resumen se encuentra un quinto punto, que se liga a 1' y que es fundamental para comprender el pensamiento total de Poincaré. Es la apoyatura de todas las ideas anteriores, de su total rechazo de la idea de ciencia deductiva de principios: Como sistema analítico, una disciplina deductiva pura constituye un sistema cerrado, clausurado. No es más que el desarrollo de lo 'puesto' en las premisas. Si éstas quedan dadas, fijadas, todo el sistema lo estará igualmente. En ese caso, el trabajo del pensamiento humano no sirve más que para esclarecer, para descubrir como máximo, unos objetos que existen con independencia suya sin posibilidad de transformación y evolución realizadas por el hombre. Una ciencia deductiva de principios exige la aceptación de la existencia de un mundo platónico de esencias, de un mundo de cosas en sí, trascendentes al ser humano. Posición platónica realista que Poincaré se negará a aceptar.

Para Poincaré las consecuencias anteriores anulan por completo el razonamiento como proceso creador del individuo; en el fondo, o es mero juego la ciencia, o el hombre nada tiene que ver con ella. De aceptarlas, «debemos estudiar las ciencias no sin duda suponiendo que no hay sabios, sino al menos sin suponer que los hay. Así no solamente la Naturaleza es una realidad independiente del físico que podría sentir la tentación de estudiarla, sino la Física misma es también una realidad que subsistiría si no hubiera físicos» (*DP.*, 93).

Solución propugnada por Poincaré

La Matemática —como cualquier otra ciencia— no podrá elaborarse como ciencia deductiva de principios salvo aparentemente en alguna de sus parcelas —la Geometría, el Cálculo aritmético y algebraico...—. Tampoco en simplemente inductiva, participando de ambos enfoques. Participación que aparece clara según lo dicho anteriormente de proceder mediante generalizaciones, mediante las síntesis inductivas; pero, a la vez, al no proceder de la experiencia de modo directo, sino obtenerse esas generalizaciones sin que aparezcan contradicciones —para lo que hay que manejar el proceso deductivo—, las proposiciones poseen las cualidades de rigor, necesidad y universalidad propias del sistema formal en el que se encuadren. La Matemática se muestra, así, como simultáneamente inductiva y deductiva. Punto en el que la aporía de la Matemática, la dificultad para su posibilidad como ciencia, afinca sus raíces.

Poincaré pretende que la superación de la misma sólo podrá obtenerse admitiendo dos salidas:

1. Construcción de sistemas deductivos al ejemplo de la Geometría, del Cálculo aritmético.

2. Reconocer que «el razonamiento matemático tiene por sí mismo una especie de virtud creadora» (*CH.*, 11).

La solución 1, en toda su pureza, como elaboración de sistemas formales, la acepta Poincaré, con ciertas reservas, como propia del hacer matemático. Pero le parece explicación no totalmente satisfactoria para lo que considera clave o fundamento de ese hacer, dado que la elaboración de dichos sistemas formales requiere, a su vez, su propia justificación. Poincaré no admite como aceptable más que la segunda opción, única vía para explicar tanto el proceso generalizador como el carácter de rigor de dicho hacer plasmado, si es preciso, en la elaboración de los sistemas formales. Gracias a la virtud creadora del razonamiento matemático —cuya naturaleza, manifestaciones, especificidad, serán desarrollados en lo que sigue—, el hacer matemático es ciencia. La posibilidad del hacer matemático se encuentra en que el mismo no es otra cosa que el reflejo de la virtud creadora del razonar matemático, reflejo por el cual se logra un proceso de generalización constructiva a la vez que dicha generalización muestra un rigor total. Como caso paradigmático de la virtud creadora, Poincaré señala, en la Aritmética, la inducción completa. Es la inferencia o razonamiento clave al condensar en sí, simultáneamente, el aspecto inductivo o proceso generalizador y el aspecto de rigor absoluto característico de la deducción. Unión de ambos aspectos que se manifiesta como un proceso operatorio específico, irreducible a los procesos deductivos analíticos por una mayor complejidad estructural, irreducible a la experiencia por constituir una elaboración efectuada por el propio espíritu.

§ 4. Excursus histórico-crítico

Que el hacer matemático se muestre como necesitado de una justificación no es tema nuevo o inaugurado por Poincaré. Es prácticamente tan antigua problemática como la Matemática misma. Sin entrar en detalles acerca de la evolución que han supuesto las distintas respuestas justificadoras, bien de la aporía retomada por el matemático francés, bien de la Matemática como disciplina con un estatuto especial, cabe señalar que en los terrenos planteados por Poincaré la aporía surge, fundamentalmente, en el período que cabría calificar como cartesiano.

Ciencia deductiva de principios.—Desde la invitación realizada por Platón a los miembros de la Academia para la composición de *Elementos* —es decir, en terminología posterior de Aristóteles, para estructurar los conocimientos geométricos en 'ciencia' una vez conocidos los 'elementos' además de las causas y principios, considerando tales principios siempre como hipótesis, estructuración que, a partir de dichos elementos, obtenga los diversos teoremas de forma deductiva— y que culminan en la obra de Euclides —«platónico en sus planes y familiarizado con la filosofía platónica» en el decir de Proclo [2]—, la Matemática se muestra como una disciplina estrictamente deductiva, como el modelo ejemplar, y único, de lo que Aristóteles codificará como constituyente de una metodología de la ciencia deductiva. El propio nombre del cultivador de la Matemática queda suplantado por el de 'geómetra', que se mantiene hasta nuestro siglo, aunque últimamente sólo en estilo arcaizante. La Aritmética permanece como *logística,* arte calculatorio pragmático, aunque permita elaborar, con el lenguaje geométrico, una teoría como la contenida en el método de exhaución de Eudoxio y sea desarrollada parcialmente en esquema deductivo

[2] Comentarios de Proclo a Euclides. García Bacca, *1961,* 12.

por Euclides, pero como simple prolongación, en lenguaje y método, de la Geometría. La Aritmética pura —que trata de los números sin contar, 'según razón' en el querer platónico— se resiste a ser encuadrada en unos marcos como los impuestos por la axiomática geométrica euclídea, precisamente por el manejo que realiza del infinito. Infinito que es soslayado mediante demostraciones por reducción al absurdo y no por métodos directos de razonamiento. Sin embargo, el prestigio platónico-aristotélico es tan grande que ningún pensador se detiene a observar una inconsecuencia: la Matemática como ejemplo o modelo a imitar de ciencia deductiva, el único ejemplo completo quizá de tal tipo de ciencia, pero que lo es sólo de un modo parcial. Unicamente la Geometría encuadra, en sus primeros momentos, en tal esquema y, para ello, como el propio Proclo reconoce al hablar del mérito de Euclides, «no incluyó todo lo que pudiera haber dicho sino lo que podía decir en plan de Elementos» [3]. De aquí la posibilidad de que al intentar encuadrar a otras ramas de la Matemática se encuentren dificultades no previstas, solucionadas o superadas únicamente aceptando nuevas formas de razonamiento que pueden no adaptarse al cuadro preestablecido. Puede observarse a este respecto que la Lógica elaborada por los filósofos griegos responde a un modelo parecido al geométrico, campo de ensayo y justificación del mismo.

Reacciones contra tal imposición, naturalmente, existen. La última cita de Proclo ya indica la existencia de dos planos: cuerpo de proposiciones acerca de una materia común, sistematización ulterior de dicho cuerpo realizada mediante un previo plan. Tal distinción la hace con mayor nitidez Arquímedes al deslindar los campos en inventivo y deductivo o expositivo. No rechaza este último, considerando difícil y meritoria la obtención de unos principios que puedan ser considerados como premisas de las cuales deducir, posteriormente, y de modo estrictamente riguroso, la proposición entrevista u obtenida por el primer campo, en el cual intervienen hasta elementos de carácter físico o mecánico, nada matemáticos. Pero si es mérito el lograr tal encadenamiento deductivo, la simpatía de Arquímedes es para el otro campo, cuyo mérito no se le presenta menor [4]. En esta disjunción es en la que se va a afincar la aporía de la Matemática a partir del siglo XVI.

Su abandono por parte del matemático.—Sin conocer la obra

[3] *Id.*
[4] Arquímedes, *El método.*

que pudiera calificarse de metodológica de Arquímedes, los creadores de la *ciencia nueva* vuelven a plantear la misma disjunción, pero ya en todos los ámbitos. La ciencia requiere procesos que no pueden ser explicados, menos forzados, mediante los esquemas formales de la teoría silogística, considerada como el único canon deductivo. En Matemática puede observarse que la disjunción se manifiesta, radical, a partir del siglo XVII, con la aparición de unas nuevas matemáticas en las que intervienen:

1. El álgebra cartesiana, que provoca una revolución al apoyar la Geometría precisamente en el cálculo algebraico, es decir, invirtiendo el esquema euclídeo o griego, convirtiéndose de esta manera esa álgebra en una auténtica «ciencia de principios» analíticos. Con ello, esta inversión podía hacer que tal geometría analítica, subordinada ahora al cálculo, pudiera convertirse en un método incluso para la filosofía, del mismo modo que lo hiciera antes la geometría sintética para la lógica griega. Que lo hiciera o no, no era asunto del matemático; a éste le incumbía únicamente el hecho de que el modelo euclídeo había quedado desplazado, no siéndole de utilidad alguna en su trabajo, en su investigación.

2. La Aritmética cobra nuevo auge con la obra de Fermat y su método de descenso al infinito y, fundamentalmente, con el reconocimiento y manejo por parte de Pascal de un nuevo proceso demostrativo, desconocido hasta el momento: la inducción completa. El auge aritmético se liga, así, con el reconocimiento del infinito potencial y su tratamiento directo como elemento clave de la Aritmética. Ello permite elaborar disciplinas tan aparentemente distintas como la Combinatoria —en la cual utiliza Pascal por vez primera este principio— y el Cálculo de probabilidades, a la vez que permite reflexiones de carácter interesante acerca de la convencionalidad de los sistemas de numeración y de las reglas operatorias de los naturales, que conducen a la posible fabricación de máquinas de calcular, también pascaliana.

3. El Análisis requiere la búsqueda de nuevos procesos, fundamentalmente heurísticos y que, por vacilantes en el primer momento, obligan a los matemáticos a recurrir a la forma deductiva axiomática, pero únicamente como expresión lingüística. Y este acudir al método de los antiguos se hace pura y exclusivamente por el deseo de obtener una convicción, fundada en prejuicios de

la autoridad clásica, apoyada en la fe de la razón lógica. Naturalmente, existían fallos en el desarrollo del Cálculo, pero la convicción de que serían superados quedará resumida en la posterior frase de d'Alembert del continuad, que la fe os vendrá después [5].

La teoría silogística, de esta forma, se encontraba ausente de los razonamientos matemáticos, creadores y expositivos, al menos de una forma explícita. El espíritu matemático de generalización es tal que a partir del siglo XVII la Matemática rompe los moldes de ciencia deductiva, y no sólo por los terrenos de la Aritmética, que nunca los había tenido como propios, dividiéndose en distintas ciencias o ramas, cada una de las cuales trata de buscar su propia expresión, que se quiere deductiva, su propia expresión axiomática.

Este hecho hace que los matemáticos enfoquen la disciplina que trabajan con un espíritu muy diferente de aquellos que continúan creyendo que la Matemática se amoldaba, estrictamente, al modelo geométrico euclídeo en su totalidad [6]. Algunos de entre ellos han dejado constancia de la sorpresa que les producía el hacer matemático. Con una preparación filosófica escasa, en la cual se continuaba afirmando el carácter deductivo de las Ciencias Exactas, apoyadas en ciertos principios primeros y con métodos de demostración absolutamente rigurosos, matemáticos como Abel, como Galois, manifestaron su desconcierto al observar que la Matemática ni era tal edificio deductivo, ni sus proposiciones eran infalibles en toda ocasión, ni se iba de lo general a lo particular sino al contrario, ni los razonamientos a seguir eran los silogismos categóricos... [7]. La marcha del pensamiento matemático parecía consistir en una generalización que no admitía regulaciones apriorísticas, sino que se parecía más a una marcha en la cual se iban dando tumbos de un lado a otro, como expresaría Galois. Otros matemáticos, posteriormente, no se limitarán a dejar constancia del hecho, sino que pretenderán modificar las reglas de la teoría lógica para adecuarla a la marcha real del razonamiento matemático, para posibilitar, con una teoría lógica ampliada, el análisis com-

---

[5] J. de Lorenzo, *1967, 1971*.

[6] Se puede mencionar, a este respecto, la amplia literatura filosófica provocada por las geometrías no-euclídeas, por ejemplo, frente al problema mucho más importante, pero al parecer más técnicamente matemático, de la fundamentación aritmética, hasta bien entrado el siglo XX.

[7] Galois, *1962;* Abel, *1881*. Ver J. de Lorenzo, *1966, 1971*.

pleto de dicho razonamiento —Boole, Peano, Frege, Rusell, Peirce, Schröder...—, colaborando en el camino emprendido por los lógicos ingleses del siglo XIX.

Carácter específico del razonamiento matemático.—Si la aporía replanteada por Poincaré ha estado presente de modo permanente entre los matemáticos, alguno de ellos pretende la superación manteniendo la disjunción señalada por Arquímedes. El razonamiento formal silogístico se ve estéril —en acusación prácticamente generalizada y de la que el propio Aristóteles debe defenderse—, además de inadecuado para el auténtico razonar matemático. En cuanto a la esterilidad, se reconoce que el aumento cognoscitivo deba encontrarse en otras fuentes. Obtenida una materia, es posible su sistematización formal. Pero ésta, para algunos, no va a ser más que un ejercicio vano, propio de los que emplean «la dialéctica vulgar» [8]. En el aspecto no ya cognoscitivo, sino meramente expositivo, tampoco las reglas de la lógica permiten dar cuenta de las proposiciones matemáticas. En este aspecto, la Matemática, como lenguaje imprescindible para las restantes disciplinas positivas, se verá irreducible a la Lógica, o incluso ésta se verá como dependiente de aquélla. El razonamiento matemático tendrá que ser explicado, fundamentado en algún elemento extralógico, admitiendo para él un estatuto independiente. Platón lo había reconocido de modo implícito al enfocar la Matemática como propedéutica para la Filosofía, distinguiendo el método hipotético-deductivo como razonamiento propio del geómetra, y el dialéctico como propio del filósofo, subordinando el primero al segundo [9]. Pero son Descartes, Locke, Berkeley, Hume, Kant, los que señalan de un modo explícito el carácter específico del razonamiento matemático.

Descartes, Kant, coinciden en la afirmación de la existencia de un razonamiento especial, intuitivo o constructivo, junto al silogístico o formal, aunque Descartes niegue cualquier valor positivo a este último y Kant, por el contrario, sostenga tal valor para la Filosofía confinando el constructivismo a la Matemática, posibilitada por la intuición. Esta diferencia explica que mientras Descartes considere a la Matemática como el modelo a imitar por la Filoso-

---

[8] Descartes, *Regla X*. Todavía en el siglo XVIII habrá quienes se asombren de que sea necesario demostrar proposiciones que se consideran *evidentes*.

[9] Platón: *Menón, La República*.

fía —en lo cual le siguen Spinoza, Leibniz—, Kant critique tal postura, por contraproducente: «nada ha sido más perjudicial a la filosofía que la matemática, es decir, la *imitación* de ella en el pensamiento...» [10]. Idea que Kant desarrolla ampliamente en *Crítica de la razón pura* al escribir: «Existen pues dos clases de usos de la razón que, no obstante la universalidad del conocimiento y de su producción *a priori* que tienen en común, son muy distintos en su prosecución» [11]. Como el uso matemático ha tenido éxitos indiscutibles, su método se ha llegado a imitar consiguiendo, con ello, únicamente «que la observancia del método matemático en esta clase de pensamiento no puede proporcionar ventaja salvo la de descubrir tanto más claramente sus propios lados flacos, y que la geometría y la filosofía son dos cosas totalmente diferentes aunque se den la mano en la ciencia de la naturaleza, y, por consiguiente, el procedimiento de la una nunca puede ser imitado por el de la otra» [12].

Que deba recurrirse a un cierto tipo de construcción o intuición propio será sostenido posteriormente por los matemáticos y algunos filósofos imbuidos de la Matemática, como Kronecker, Lange, Goblot, Brouwer, Hilbert, Weyl, Bourbaki, Skolem... [13].

§ 5. El juego de contraposiciones

Para Poincaré la motivación de la aporía se centra, fundamentalmente, en un juego de contraposiciones que realiza entre lo que él considera como ciencia deductiva y los hechos alrededor de los cuales centra sus ideas respecto al hacer matemático. Juego de contraposiciones apoyado en las ideas que he intentado sistematizar, aunque Poincaré no dé tal versión, una radical elaboración de las mismas.

Puede observarse que las ideas que el matemático francés tiene de la ciencia deductiva se mantienen, esencialmente, en la consideración de ser ciencia de principios en el sentido adoptado desde Aristóteles. Con lo cual, para Poincaré, una ciencia deductiva se apoya en los postulados de deductividad, evidencia y realidad, en

---

[10] Kant, 1764: *Untersuchungen über die Deutlichkeit der Grundsätze der natürlichen Theologie und der Moral.* Tomado de Beth, *1965*, 3.

[11] Kant, *1781.* Metodología trascendental, cap. I, t. II, p. 344.

[12] *Id.*, p. 346.

[13] Pueden verse Beth-Piaget, *1961;* Bunge, *1962.*

el sentido de que a partir de unos primeros principios evidentes —'axiomas' si son proposiciones, 'términos indefinibles' pero evidentes si son conceptos— han de obtenerse las restantes proposiciones del sistema —deducción— que han de conformarse con las realidades objetivas que el hombre puede conocer. El postulado de evidencia del sistema deductivo lo justifica Poincaré en la imposibilidad del regreso al infinito. Hay que resaltar el hecho de que en la exposición más explícita de su consideración de ciencia deductiva de principios, Poincaré trata el tema geométrico, el tema de las hipótesis fundamentales de la Geometría y del fundamento de la misma; en él, la llamada a la intuición es el último recurso para, a partir de ella, comenzar el proceso deductivo. Palabras de Poincaré que recuerdan muy vivamente a Pascal [14].

Hay, en la concepción que parte de Aristóteles de ciencia deductiva, como ya observara Beth [15], un dualismo total: *a)* primeros principios —primeras nociones y axiomas—; *b)* nociones definibles y teoremas demostrables a partir de *a)*. El papel de la intuición ha de limitarse a la captación de tales primeros principios sin intervención posterior en la marcha deductiva; el papel de la razón se limita a realizar la marcha deductiva sin poder intervenir en la captación de los primeros principios. La necesidad de tal dualismo se origina en la limitación de ambas facultades, en la limitación del hombre que ha de ponerlas en marcha. En su lenguaje agónico, Pascal ya había señalado: «El corazón siente que hay tres dimensiones en el espacio y que los números son infinitos y la razón demuestra después que no hay dos números cuadrados tales que uno sea doble del otro. Los principios se sienten, las proposiciones se deducen y el total con certeza aunque por vías diferentes —y es tan inútil y tan ridículo que la razón pida al corazón pruebas de sus primeros principios para aceptarlos, como sería ridículo que el corazón pidiera a la razón un sentimiento de todas las proposiciones que demuestra para querer admitirlas. Esta impotencia no debe servir más que para humillar la razón —que todo lo querría juzgar— pero no para combatir nuestra certidumbre» [16].

El verdadero orden, para Pascal —quien expone de manera lúcida el ideal de ciencia deductiva de principios—, sería definir todo y demostrar todo; ello es imposible. De aquí que deba conformarse el hombre con este dualismo que da un orden 'inferior',

14 Pascal, *1658, 1670.*
15 En Beth-Piaget, *1962,* 43.
16 *Pensamiento,* núm. 110, ed. Lafuma; núm. 282, ed. Brunschwicg.

pero que es «el más perfecto entre los hombres» (*Pascal,* 1658). Hay, como se ha visto en la cita anterior, la idea —en Pascal explícita, en otros subyacente a esta hipótesis limitativa— que Poincaré resumiría en la conclusión 1', en el sentido de que estos principios han de ser intuidos y, por consiguiente, el espíritu humano es, respecto a ellos, un ente pasivo que ha de verlos ciertamente, pero no crearlos mediante otra facultad también denominada intuición, pero que va a tener usos diferentes en Pascal, en el logicismo, en Poincaré. El espíritu humano, la razón, es únicamente activa en cuanto a la elaboración deductiva, que puede ser convertida en maquinal. Con lo cual la propia abstracción aristotélica no supone más que una diferenciación o más bien captación de propiedades comunes, sin que se observe que tal abstracción es, ya, una operación, un proceso de idealización.

Leibniz «versus» Poincaré

De la idea central de ciencia deductiva de principios se bifurcan dos corrientes. Por un lado, el logicismo inaugurado por Leibniz, intenta suprimir el dualismo aristotélico-pascaliano a condición de imponer la existencia de un mundo eidético que hay que intuir; mundo que, por consiguiente, supone un radical realismo platónico. Es lo que explica la conclusión 5 obtenida por Poincaré. A partir de la captación de los elementos conceptuales primeros, todo se desarrolla deductivamente sin necesidad de emplear más que los principios de identidad y las reglas deductivas ordinarias, en cuyo empleo la intuición no interviene para nada. Por otro lado, la tendencia intuicionista inaugurada por Descartes y seguida por Kant pretende suprimir igualmente el dualismo, pero poniendo el acento ahora en la fase constructiva, realizada no por mecanismo formal alguno, sino por intuición, convertida la deducción bien en oficio de los dialécticos vulgares, bien en oficio de los filósofos.

Las consecuencias que Poincaré obtiene de una ciencia deductiva de principios afectan, esencialmente, a la desviación en el primer sentido, a la desviación de lo que pudiera calificarse deductivismo puro, maquinal. Tales consecuencias creo que son correctas, aunque quizá incompletas. Constituyen, insisto, alguno de los principios queridos por el programa logicista inaugurado por Leibniz. La consecuencia 1. es, realmente, el resumen de este programa, expuesto en 1715 [17], en el cual Leibniz indica la conveniencia de reducir todas las proposiciones consideradas como máximas o axiomas secundarios a únicamente los axiomas primitivos o inmediatos que califica de los *idénticos,* «como por ejemplo el principio de contradicción o las demostraciones que conducen a lo imposible» *(1715,* § 11) y que se calificarían actualmente de identidades o tautologías lógicas. Conveniencia reductiva ya indicada por Roverbal, según indica el mismo Leibniz, pero elevada por éste a fundamento de la Matemática que, como ciencia, se reduce exclusivamente al desarrollo deductivo de tales identidades lógicas, aunque ello pueda quedar oculto por la «prolijidad de las demostraciones y las repeticiones sin fin» que obligan a utilizar «proposiciones medias, ya demostradas» *(íd.),* convertidas algunas en axiomas y que provocan la posible confusión en cuanto a su íntima reducción a las identidades. Es principio apoyado en la idea de Leibniz de que todas las proposiciones necesarias son analíticas, así como lo es el proceso demostrativo, convertido en mera combinación de elementos equivalentes.

Análogamente, la consecuencia 4 no es otra que la pretendida creación por parte de Leibniz de un lenguaje formalizado, de un «alfabeto del pensamiento humano» que pudiera servir de base a una *característica de la razón* mediante la cual se puedan alcanzar las verdades matemáticas mediante un simple cálculo. Para lo cual podría bastar la elección de «un alfabeto del pensamiento humano, y mediante la combinación de las letras de este alfabeto y el análisis de las palabras resultantes de ellas, se podría descubrir *(inveniri)* y discernir *(diiucari)* todo» [18]. Alfabeto que puede convertirse en auténtico hilo de Ariadna y que puede ser considerado como un «cierto instrumento perceptible por los sentidos y tosco» [19], pero que reduciría el esfuerzo de la investigación racional al establecimiento de las relaciones generales que pueden existir entre los conceptos científicos.

Las consecuencias 2. y 3. se hallan íntimamente ligadas con la 4., como lo prueba el hecho de que R. Lull, precursor de Leibniz, al igual que Comenio, intentara la creación de tal artefacto. Y el

---

[17] Libro IV, cap. VII: «De las proposiciones que se llaman máximas o principios.»

[18] Tratado sin título sobre la *Characteristica universalis,* 185. En Bochenski, *1956,* 289.

[19] *G. P.,* VII, 22. En Bochenski, *1956,* 289. Ver, igualmente, Thiel, *1971;* Sánchez Mazas, *1953.*

mismo Leibniz, en carta a Huyghens de 8 de septiembre de 1679, llega a indicar que tal lenguaje permitiría formular las descripciones estructurales y funcionales de máquinas sin necesidad de recurrir a intuición espacial o cinemática alguna [20].

La pregunta que se hace Poincaré en la consecuencia 1' se liga de modo estrecho a la limitación pascaliana e indica ya el carácter subjetivo que Poincaré realiza de tales consecuencias.

Los puntos anteriores indican con suficiente claridad el rechazo que Poincaré hará respecto a la existencia de una ciencia deductiva de principios interpretada en la corriente del deductivismo puro, al contraponerle sus ideas del hacer matemático. Rechazo —mediante argumento *modus tollens*— basado en unas conclusiones que constituyen, precisamente, la afirmación del programa de Leibniz.

El juego de contraposiciones que a Poincaré le parece evidente combina las conclusiones anteriores con las ideas del hacer matemático, según acabo de indicar. La argumentación que Poincaré realiza en 1894 —en estilo literario muy brillante, pero algo alejado del que pudiera calificarse de sistemático— se encierra entre interrogantes y admiraciones, para finalmente escribir: «Si se rechaza admitir estas consecuencias...» *(CH.,* 11).

Frente a la consecuencia de ser tautológica toda ciencia deductiva, opone Poincaré el hecho de que la Matemática contiene proposiciones irreducibles a las identidades. Frente a la consideración de que todas sus proposiciones pueden deducirse mediante un proceso lógico silogístico o un proceso formal en general, analítico, opone el hecho de que en toda proposición matemática se procede por generalizaciones. Frente a la máquina y la posibilidad de un lenguaje abreviado, opone el hombre, con sus limitaciones, pero creador, irreducible a máquina alguna.

Junto a estas contraposiciones aparecen las que de modo implícito se dirigen, nuevamente, a los postulados implícitos de una ciencia deductiva de principios: evidencia, realidad, aunque tales argumentos no parezcan afectar el programa anterior. Frente a estos postulados cabe situar el que la Matemática es una construcción que se refleja en un sistema simbólico puro, aunque posea siempre una correlación con las relaciones que pueden llegar a conocerse acerca de la naturaleza mediante cada ciencia y la intuición, correlación con la realidad objetiva, es decir, con las re-

---

[20] De Freudenthal, *1958,* 14.

laciones entre las cosas, no con las cosas en sí. Ello motivado porque el hombre es creador de símbolos para la captación de la realidad objetiva y, como tal creador, elabora y no refleja meramente la misma. Si el postulado de realidad se refiriera a este tipo de realidad objetiva, Poincaré lo aceptaría, pero en la forma tradicional le parece una problemática carente de sentido. De modo análogo respecto al postulado de evidencia, aceptado únicamente para ciertas partes de la Aritmética, pero no para las restantes zonas del hacer matemático, donde los primeros principios son, no ya evidentes en sí, sino meras convenciones, aunque no enteramente arbitrarias. Lo cual se traslada de modo inmediato a las definiciones de los objetos que en ellas se manejan. Por otro lado, respecto a los sistemas deductivos de carácter formal, cabría preguntarse por su adecuación o no a la realidad siempre en un punto posterior a la construcción de los mismos, y ello de modo independiente a tal construcción, como se manifiesta de modo explícito en las geometrías no-euclídeas. Y en cuanto a la evidencia de los primeros principios en esos sistemas ello supondría aceptar la existencia de un mundo eidético platónico que Poincaré rechaza de modo radical, oponiéndole la constructividad humana.

La solución adoptada por Poincaré respecto a la virtud creadora como rasgo propio del razonamiento para superar la aporía, para resolver positivamente la posibilidad del hacer matemático, tal como la formula, aparece cargada de psicologismo. Cabe aceptar que el matemático obtenga sus conocimientos mediante otras fuentes, la intuición, la analogía entre distintos terrenos o ramas científicas, el término lingüístico feliz..., pero que sólo después de su formulación rigurosa, deductiva, se convierten en proposiciones calificables de teoremas. El razonamiento como creador aparecería más bien como un proceso elaborador a partir de unos datos, a veces meros símbolos lingüísticos, que transforma en construcciones objetivas. A ello hace referencia Poincaré cuando sostiene que es por intuición como se inventa, por lógica como se demuestra. De hecho, la formulación en sistema formal sólo es realizable tras el previo conocimiento de los distintos teoremas que lo van a componer, aunque en esa elaboración puedan surgir otros no captados con anterioridad, mediante el simple juego deductivo, obteniéndose tales proposiciones como meras consecuencias, aunque con cierta carga de novedad psicológica. Lo que importa, entonces, desde un pretendido enfoque lógico puro, es la ordenación de dichas proposiciones, no el proceso psicológico por el cual han podido obtenerse; proceso psicológico o de cualquier otro tipo, como los mecánicos utilizados por Arquímedes, Pascal, Riemann, Klein...

Pero es acusación psicologizante que sólo tiene en cuenta la formulación y no la solución propugnada por Poincaré, en la cual predomina el carácter formal de tal virtud creadora. Por otro lado, la misma acusación de psicologismo cabría hacer a quien sostiene un punto de vista pretendidamente lógico puro; por apoyarse, igualmente, en la validez indiscutida del proceso de razonamiento deductivo, en el postulado de deductividad, postulado fundamentado, como mucho, en la 'intuición lógica' de un modo tradicional, en el maquinismo cibernético en el momento actual. En ambos casos, subyacente al mismo, se encuentra una convicción de carácter tan psicológico como la que sostiene la posibilidad de una virtud creadora del razonamiento matemático.

PARTE 1

DONDE SE PRETENDE SISTEMATIZAR EL PENSAMIENTO DE POINCARE

Capítulo 2

LA VIRTUD CREADORA

1. La busca

Henri Poincaré parte en posición cercana a aquellos pensadores preocupados por dar una explicación de algo ya existente, la Matemática. Es el punto inicial del planteamiento de la posibilidad del hacer matemático. De modo inmediato, sin embargo, se sitúa en posición de marcado carácter epistemológico crítico: tras analizar los métodos, prácticas, tipos de demostración y definición que utiliza el matemático en su trabajo, pasa a prescribir cuál de estos métodos es el propio de tal hacer y cómo se justifica el mismo. Plano de epistemólogo crítico y no de mero observador que acepta lo ya hecho y no pretende promulgar algunos métodos como aceptables, limitándose a describir lo que acepta y a modificar, si es preciso, sus propias ideas si lo para él inmutable no encaja en el sistema elaborado. Poincaré describirá someramente alguno de tales procesos, pero para destacar más aquellos que prescribirá como esenciales del hacer matemático y que reflejarán la tesis central de que «el razonamiento matemático tiene por sí mismo una especie de virtud creadora» (*1894*, 11).

§ 1. Razonamientos y definiciones utilizados por el matemático

a) *Razonamientos*

En su hacer, en su trabajo, el matemático emplea distintos tipos de razonamiento. En el proceso inventivo la analogía se muestra esencial, así como las técnicas de interpolación y extrapolación apoyadas en tal analogía. Técnicas que poseen un carácter marcadamente psicológico, irreducibles aparentemente a regla formal y a norma objetiva alguna. Otros procesos hay, sin embargo, que pueden caracterizarse tanto por un marcado carácter lógico como por su aspecto de objetividad total. Entre tales razonamientos, comunes al matemático, Poincaré menciona tres, sin querer agotar, por otro lado, su número.

1. *Procesos de cálculo aritmético y algebraico*

En ellos se establecen, en primer lugar, unas convenciones para definir las operaciones fundamentales de adición y multiplicación (*1893*, 31, 41-2). Convenciones no enteramente arbitrarias, ya que se obliga a que satisfagan ciertas propiedades o reglas como las de asociatividad, conmutatividad, para cada una de ellas, la distributividad entre ambas. Estas propiedades han de ser demostradas para cada definición convencional que se formule. Aparecen las mismas, por consiguiente, en lenguaje de estructuras muy posterior al de Poincaré, como los axiomas a que han de satisfacer ambas operaciones. Entre los números naturales tal demostración cabe realizarla mediante un proceso recurrente (*1894*, 16-18). Pero una vez demostradas tales propiedades, reglas o «reglas del cálculo algebraico», éste se convierte en «un instrumento de transformación que se presta a muchas más combinaciones que el simple silogismo» (*1894*, 19). Ahora bien, este cálculo algebraico, aunque se muestre irreducible al silogismo, «es un instrumento puramente analítico e incapaz de enseñarnos nada nuevo» *(id.)*.

Ejemplo explícito del procedimiento —además de las indicaciones mencionadas— lo da Poincaré en *1904 a*, al señalar las convenciones que regulan la definición de los números racionales, así como la limitación en la elección de tales convenciones. La definición de partida será: «una fracción es el conjunto de dos números enteros separados por un trazo horizontal». En palabras más actuales, es un par ordenado de números enteros. Inmediatamente después «se definirán por convenciones las operaciones que pueden sufrir estos símbolos; se demostrará que las reglas de estas operaciones son las mismas en el cálculo de los números enteros, y se comprobará, en fin, que efectuada de acuerdo con estas reglas la multiplicación de la fracción por el denominador, se encuentra el numerador» *(1904 a*, 95).

Constituyen estas reglas lo que algún tratadista de lógica clásica califica de *deducción matemática*, que procede por mera sustitución de magnitudes equivalentes por otras magnitudes en proposiciones que se califican de 'relacionales', ya que en ellas no hay sujeto ni predicado, sino meras relaciones entre términos. Desde un enfoque matemático, tales reglas no se apoyan más que en el paso de una ecuación a otra que es equivalente mediante las transformaciones algebraicas de suma, multiplicación, etc., de ciertas expresiones en los dos miembros de la ecuación. Ciertamente, el punto de partida se encuentra en las convenciones que se realicen en las primeras definiciones. Pero como tal proceso estas reglas son marcadamente analíticas, de aplicación exclusivamente mecánica. No hay en ellas, y de acuerdo con lo manifestado por Poincaré, generalización alguna, pudiendo considerarse como tautológicas en el sentido de que derivan del principio de identidad y, descomponiendo una de las proposiciones mediante análisis, se encontrará en ellas lo puesto en las convenciones de partida.

2. *Cálculo con igualdad*

Otra regla o proceso de razonamiento que Poincaré indica, al paso, es aquella «mediante la cual una misma operación uniforme aplicada a dos números iguales dará resultados idénticos» (*1894*, 11). Regla que califica, igualmente, de analítica y de la que, párrafo siguiente al que contiene las palabras anteriores, afirma, generalizando mediante un plural inadecuado, «todos estos modos de razonamiento, sean o no reducibles al silogismo propiamente dicho, conservan el carácter analítico y son, por ello mismo, impotentes» (*CH.*, 11).

Es regla que cabría traducir a lenguaje simbólico como

$$a=b \Longrightarrow f(a)=f(b)$$

constituyendo, realmente, una de las premisas caracterizadoras de la relación de igualdad, mientras que la otra premisa sería una forma del principio de identidad «toda cantidad es igual a ella misma» (*CM.*, 131).

3. *Razonamiento por construcción, o método genético*

Calificado igualmente de analítico, consiste en que, a partir de unos elementos u objetos dados, determinados, el matemático construye en un primer paso combinaciones cada vez más complicadas.

Construcciones que pueden considerarse como nuevos objetos. En un paso posterior, el matemático ha de volver, analizando las construcciones, los nuevos objetos, al estudio de los elementos de los que había partido. Gracias a este doble movimiento de composición y descomposición o división pueden establecerse las relaciones que ligan a los objetos primitivos entre sí, las relaciones de dichos objetos con los nuevos construidos y, finalmente, las relaciones que pueden ligar a estos nuevos objetos entre sí.

El método constructivo, por este doble proceso de composición y recomposición, se le muestra a Poincaré como eminentemente analítico y, sin embargo, no particularizador, al no marchar de lo general a lo particular, dado que los nuevos objetos construidos por combinación de elementos «no podrían ser considerados evidentemente como más particulares que sus elementos» *(1894,* 26).

Poincaré lo ejemplifica tanto aritmética como geométricamente. El ejemplo aritmético dado por Poincaré —y que reproduzco con leve modificación, en cuanto a los paréntesis que no aparecen en *1894* y los postulados que han de intervenir— consiste en la demostración de la igualdad

$$a+2=2+a$$

es decir, en la demostración de la propiedad conmutativa, realizada a partir de la operación previamente dada que consiste en agregar la unidad a un número *a*, es decir, la operación '$a+1$', que satisface, por hipótesis, la propiedad conmutativa

$$(1) \quad a+1=1+a$$

Se supone, además, que la adición satisface la propiedad asociativa y, por convenio notacional abreviador, se acepta que '$2 = 1+ 1$', '$3 = 2 + 1$', y así sucesivamente. Con lo cual se tendría

$$(2) \quad a+2 = a+(1+1) = (a+1)+1 = (1+a)+1 = 1+(a+1) = \\ = 1+(1+a) = (1+1)+a = 2+a$$

La expresión así obtenida por vía estrictamente analítica, formal, no es más particular que la igualdad '$a+1=1+a$' de la que se parte tomándola como configuración de partida. «Los dos miembros de la igualdad (2) son simplemente combinaciones más complicadas que los dos miembros de la igualdad (1) y el análisis no sirve más que para separar los elementos que intervienen en esas combinaciones» (*1894,* 26).

El método constructivo se liga, según el ejemplo aritmético anterior, y aunque Poincaré no lo explicite, con el dado por las reglas del cálculo aritmético y algebraico. Y ello en el sentido de que, por el constructivo, se van obteniendo proposiciones particulares, casi diríamos configuraciones sígnicas de objetos concretos, materiales, intuibles sensiblemente de modo directo; por el cálculo aritmético y algebraico se dan convencionalmente las reglas a que tales objetos materiales satisfacen, convertidos ya en signos cualesquiera, en variables de objeto. Constituirían el proceso tradicional del paso de la aritmética como disciplina que versa acerca de números particulares, de cifras, al álgebra como disciplina que versa acerca de signos variables. Constituirían ambos métodos dos fases de un mismo proceso.

La diferencia mayor entre ambos se observa en el ejemplo geométrico aportado por Poincaré. Consiste en señalar que un polígono puede considerarse como un objeto construido a partir de triángulos, en los cuales se descompone. Razonar sobre el polígono, en general, tiene la ventaja de obtener propiedades que luego pueden particularizarse para cada uno de los polígonos, individualmente; en concreto, para el propio triángulo. Además, hay propiedades que no podrían obtenerse en el caso concreto sino después de grandes dificultades y, sin embargo, tales propiedades se demuestran, fácilmente, en el polígono general.

De aquí que Poincaré acepte la consideración de que este método sea una condición necesaria para el progreso de la Matemática, aunque no la estime suficiente porque no es, en el fondo, una auténtica generalización, una inducción de lo particular a lo general, sino un paso de lo general a lo general o bien de lo particular a lo particular. El razonamiento —mal llamado desde mi punto de vista— por construcción «no nos obliga a descender, pero nos deja en el mismo nivel» (*1894,* 28).

Las condiciones que Poincaré impondría a este método, para que fuera suficiente, son: 1. Que cada construcción «posea una cierta unidad, que permita ver en ella algo más que la yuxtaposición de sus elementos» (*1894,* 27). En otras palabras, cuando se la pueda colocar junto a otras construcciones análogas, «formando las especies de un mismo género» (*íd.*), con lo cual se podría considerar la construcción en sí, incluso antes que a sus propios elementos. 2. Y fundamental, cuando «se puedan demostrar las propiedades del género, sin estar obligados a establecerlas sucesivamente para cada una de las especies» (*íd.*).

Esta segunda condición es, auténticamente, la que implicaría una inmediata generalización. Con lo que el método constructivo se convertiría en sintético y no en analítico. Sería, entonces, no sólo necesario sino suficiente para el progreso de la Matemática.

b) *Definiciones*

Ligándose de modo estrecho con los procesos de razonamiento, se tiene la definición, que constituye, en realidad, una fase de los mismos. Para Poincaré una definición no es otra cosa que una clasificación, «toda definición es en efecto una clasificación. Separa los objetos que satisfacen a la definición y aquellos que no la satisfacen y los sitúa en dos clases distintas» (*1909 c,* 11). Como tales instrumentos clasificatorios, instrumentos de conceptuación matemática, se tienen los siguientes —bien entendido que este esquema no pretende, al igual que al hablar de los razonamientos, ser exhaustivo por una parte, y por otra, que en ningún caso se puede aceptar la existencia de definiciones reales, dado que la Matemática no estudia objetos de los cuales dar tal caracterización, sino relaciones entre los mismos; en otras palabras, no puede dejarse arrastrar el crítico por las preguntas acerca de sustantivos en el sentido de que deba dar una respuesta, ingenua en ese caso, que implique la existencia de algo que no tenga sentido, y ello por una falacia del lenguaje que obliga a pensar que a todo sustantivo le corresponde un objeto material; es la ingenuidad manifestada en los terrenos de la Física con la creencia en la existencia real de objetos como 'calor', simplemente porque este término viene expresado mediante un sustantivo—:

1. *Definición por abstracción*

Va íntimamente ligada al método de razonamiento calificado de método constructivo. Ambos, unidos, se encuentran en la base del proceso genético matemático, en el sentido de que a partir de los números naturales como dato primario, se pueden ir construyendo etapa tras etapa los números enteros; a partir de éstos, los racionales; a partir de los racionales, los reales; de éstos, los complejos, y así sucesivamente. Método opuesto al formal o axiomático que caracteriza cada campo numérico o cada estructura mediante un sistema de postulados establecidos de antemano. La clave del proceso se encuentra en el establecimiento de las definiciones o convenciones de partida, que consisten en precisar las condiciones por las cuales se consideran dos objetos como equivalentes respecto a una propiedad determinada. No es, por consiguiente, una definición constructiva, dado que supone la previa existencia de los objetos entre los cuales puede establecerse la mencionada propiedad a la que satisfacen o no dichos objetos.

El término 'abstracción' surge, precisamente, del proceso a que da lugar este método definitorio, ya que lo fundamental, en él, es la supresión de las diferencias particulares que muestren dos clases de objetos para poner de relieve la relación que ambos tienen en común. Y esta propiedad es la que se toma como caracterizadora del nuevo objeto. Propiedad que, de modo inmediato, se ha de verificar que satisface las condiciones que se califican de 'permanencia de las leyes formales', como se ha indicado al hablar del razonamiento de cálculo aritmético y algebraico. Allí he puesto como ejemplo de Poincaré, característico, la definición convencional del número racional, definición que ha de completarse para poder observar el mecanismo total de este tipo de proceso, generalizado en la Matemática con el nombre de *aritmetización del análisis* o también con la expresión de «método de sucesiva ampliación del número».

El ejemplo de Poincaré consistía en definir los números fraccionarios como «pares» de números enteros que pueden ser, a su vez, definidos como «pares» de números naturales. Con lo cual los números racionales no serán más que pares de pares de naturales. Y este proceso puede ser proseguido imponiendo, en cada ocasión, las mismas convenciones que definen las operaciones fundamentales. En otras palabras, y concretándose al número racional: definido como un par de enteros, separados por una raya, o como tal par ordenado, se establecen como definiciones de las operaciones suma y producto las siguientes, meras convenciones aparentemente arbitrarias:

$$(1) \quad (a, b)+(c, d)=(ad+bc, bd)$$
$$(2) \quad (a, b)\,(c, d)=(ac, bd)$$

que se apoyan, en su formulación, en el previo conocimiento de la suma y la multiplicación de enteros, a los cuales quedan reducidas en última instancia. Ambas operaciones han de satisfacer —primer paso para la supresión de la arbitrariedad aparente de las definiciones convencionales— las leyes de asociatividad, conmutatividad y distributividad, es decir, las mismas reglas que para los números enteros. Por otra parte ha de establecerse que constituyen, los racionales, una ampliación de los enteros, en el sentido de poseer alguna propiedad más —como la existencia de inverso para la multiplicación— y, a la vez, quedar los enteros incluidos como una parte de los racionales. Para lo cual se observa, con Poincaré, que basta multiplicar el racional por el entero que se encuentra en el denominador para hallar el entero que se encuentra en el numerador. O, en otras palabras, que puede establecerse una aplicación de los enteros sobre aquellos racionales cuyo denominador, o segunda componente del par, es 1. Esta aplicación se demuestra que es biyectiva y que conserva las operaciones de suma y producto —segundo paso para la supresión de la arbitrariedad en las convenciones definitorias elegidas—. Este isomorfismo permite asegurar que existe un subconjunto Q_1 de los racionales que puede identificarse con el de los enteros Z. De aquí que el total de los racionales Q se pueda considerar como una ampliación de los enteros, observándose la existencia de estructuras algebraicas idénticas entre Z y algunos subconjuntos de los racionales. «El espíritu matemático es quien nos ha enseñado a designar con el mismo nombre a seres que sólo difieren por la materia, por ejemplo. a designar con el mismo nombre la multiplicación de los cuaterniones y la de los números enteros» *(1897,* 143).

Hay que observar, sin embargo, que este tipo de designación, de definición por abstracción, no caracteriza a un individuo único, sino a todo un género al cual ese individuo pertenece. Se agrega, por tanto, a la nota de no ser creadora, el carácter de incompleta. A pesar de lo cual Poincaré indica «son legítimas e incluso son aquellas de las que se hace un uso más frecuente» *(1912 a,* 89). Naturalmente la legitimidad viene asegurada siempre que la definición pueda ser completada, es decir, siempre que se imponga la condición de que tal género o conjunto de individuos que satisfacen la definición pueda ser determinado en cualquier momento. Así, el número racional, caracterizado por ser un par de números enteros, como género, podrá ser particularizado, obtenido en cuanto *un* número racional determinado sin más que una sustitución conveniente y ello mediante un proceso de un número finito de operaciones.

El matemático francés muestra sus reservas ante la definición por abstracción, al igual que las mostrara frente al formalismo analítico del proceso que califica de constructivo. Las definiciones por abstracción entran «en el tipo de estas definiciones que se han hecho tan frecuentes en la matemática, desde que se tiende a 'aritmetizar' esta ciencia. Esas definiciones irreprochables, lo hemos dicho, desde el punto de vista matemático, no podrían satisfacer al filósofo. Reemplazan el objeto a definir y la noción intuitiva de este objeto por una construcción hecha con materiales más simples; se ve entonces que se puede hacer efectivamente esta construcción con esos materiales, pero al mismo tiempo se ve que se podrían hacer también muchas otras; lo que ella no deja ver, es la razón profunda por la cual se han reunido esos materiales de tal manera y no de otra. No quiero decir que esta 'aritmetización' de las matemáticas sea algo malo, digo que ella no es todo» *(1912 b,* 138). Basta observar que las definiciones establecidas en (1) y (2) muestran ese carácter arbitrario indicado por Poincaré y que su elección se debe al previo conocimiento y deseo de formalizar una estructura previamente conocida, pero que no se manifiesta en manera alguna en ambas definiciones tal como están formuladas.

2. *Definición por clasificación*

Responde a la definición en su sentido clásico lógico. Consiste en determinar el significado de un término en función de otros términos previamente definidos, mediante el género próximo y la diferencia específica. Al venir expresado por una equivalencia lógica, puede sustituirse lo definido por lo que se define sin que varíe la expresión. Al igual que a la anterior, la califica Poincaré de definición directa *(1912 a,* 89).

La definición por clasificación corresponde a la llamada definición nominal, ya que en último término consiste en establecer o dar un nombre que simplifique una expresión compleja previamente conocida en su integridad. Corresponde a una clasificación en el sentido de que mantiene que el objeto definido es diferente a otros objetos, obtenidos de reemplazar o sustituir otras expresiones igualmente complejas por un único término. A pesar de este aparente carácter tautológico, la definición nominal o por clasificación es imprescindible para el pensamiento. Y lo es porque equivale a una «economía del pensamiento» al ser una «economía del lenguaje». Supone una convención lingüística que ahorra esfuerzos y permite simplificar el lenguaje, simplificación que, a su vez, permite nuevas construcciones sin que tenga que comprobarse nuevamente toda la expresión compleja definida.

c) *Su carácter esencial*

Pretendiendo Poincaré remarcar el carácter analítico y tautológico de los procesos enumerados, elige en *1894* como modelo del mismo la pretendida demostración de Leibniz de la proposición '2 y 2 son 4' [21]. El razonamiento con el cual se obtiene, a partir de las definiciones, dicha proposición, se le muestra a Poincaré como puramente tautológico y ello porque Leibniz «se ha limitado a comparar entre sí dos definiciones puramente convencionales y se ha comprobado su identidad; no se ha aprendido nada nuevo» *(CH.*, 13). No es, por ello, una *auténtica* demostración sino meramente una verificación realizada, además, sobre números particulares, concretos, y no sobre números cualesquiera —hecho que el propio Leibniz reconoce, aunque parezca ignorarlo Poincaré—. Aun en este último caso, aun operando con números cualesquiera, la atribución de mera verificación sería la misma, no salvándose de la acusación de esterilidad.

Las palabras de Poincaré pretenden ser claras en dicha acusación: la verificación se apoya en la previa definición convencional de unas operaciones para después utilizar el razonamiento estrictamente lógico. Razonamiento no creador, estéril, aunque en ocasiones implique la consideración de novedad. Novedad puramente psicológica porque en el proceso no se hace más que reemplazar los primeros miembros de unas igualdades por los segundos miembros de las mismas. Novedad motivada —palabras realmente de Leibniz— por la longitud de las cadenas demostrativas que, en general, se requieren en este proceso y que ocultan las identidades a que finalmente se pueden reducir sin más que reemplazar sucesivamente las diversas expresiones por sus definiciones corres-

[21] Leibniz, *1715.* Libro IV, cap. VII, § 10. Poincaré no se detiene, como hicieran Bolzano y Frege, en un análisis de la demostración en cuanto a su falta de rigor por no postular la propiedad asociativa. Poincaré, además, no sigue fielmente el texto leibniziano.

pondientes. Novedad ficticia dado que todo el sistema se reduce a las identidades y, por consiguiente, a una inmensa tautología. Es conveniente citar las palabras textuales de Poincaré en este punto, aunque la cita sea amplia, y ello en función de que ha recibido como crítica precisamente el no distinguir la novedad psicológica de la novedad lógica en una deducción:

«Una demostración en verdad fundada sobre los principios de la lógica analítica se compondrá de una serie de proposiciones; las unas, que servirán de premisas, serán las identidades o las definiciones; otras se deducirán de las primeras paso a paso, pero por mucho que se vea inmediatamente el nexo entre la proposición y la siguiente, no se verá en seguida cómo ha podido pasar de la primera a la última, y se podrá estar tentado a mirarla como una verdad nueva. Pero si se reemplazan sucesivamente las diversas expresiones que figuran por su definición y si se prosigue esta operación lo más que sea posible, no quedarán al fin más que las identidades, de manera que todo se reducirá a una inmensa tautología» *(CM.,* 149) [22].

Esta es una de las claves para que las demostraciones que se apoyan en los razonamientos indicados en *a)* queden incluidos como tautológicos. Las reglas del cálculo algebraico, por ejemplo, son consideradas como transformaciones tautológicas ya que, establecidas las definiciones de las operaciones suma y producto, se sabe que '7+5' es lo mismo que '12', sin tener que invocar a otra cosa que a tales reglas de transformación y a las reglas que nos dan la representación de tales números en el sistema decimal posicional. Si en lugar de tener dos sumandos tan simples como '5' y '7' se dan sumandos de mayor número de cifras o un producto como '33·39', la expresión a la que sea equivalente no se verá de modo inmediato como en el caso anterior, que puede inducir a error creyendo que tal igualdad se apoya en alguna intuición especial, cuando su apoyo no es otro que la educación recibida en la infancia. Basta aplicar las reglas establecidas para el producto y ello de manera mecánica para obtener que '33·39' es lo mismo que '1287'. Tal aplicación es una simple verificación, no una demostración en el sentido que a este término se le da en la matemática, aunque se haga, como Leibniz, una detallada

[22] Escritas en 1906, para remarcar aún más su punto de vista, Poincaré agrega: «He aquí lo que he escrito otras veces», con clara referencia tanto a *1894* como a 1900. Texto de, una vez más, coincidencia —¿y desconocimiento?— con Leibniz para obtener conclusiones opuestas.

exposición de los distintos pasos que conducen al resultado final.

De modo totalmente análogo, el método llamado genético o constructivo se le muestra a Poincaré como analítico, porque no da verdaderas demostraciones generalizantes. En *1893* indica cómo a partir del número natural se llega a la construcción del continuo matemático. Establecido el mismo, hay que obtener una cierta estructura algebraica. «Eso no puede hacerse más que con la ayuda de una *convención* nueva y especial» *(CH.,* 41). Convención no enteramente arbitraria al someterla a las exigencias de que cumpla «las reglas de conmutatividad y asociatividad de la adición. Pero siempre que la definición elegida satisfaga a esas reglas, la elección es indiferente y es inútil precisarla» *(CH.,* 42) *(CM.,* 95).

En otras palabras, las demostraciones que se establecen por ambos métodos no son más que las consecuencias de una simple postulación de ciertas reglas de transformación que, una vez establecidas y comprobado que satisfacen ciertas leyes formales, hacen uso exclusivo de las mismas. De aquí su nota de analiticidad y tautología; en esencia, de esterilidad. De aquí que no sean auténticas demostraciones, sino meras verificaciones analíticas en sus primeras etapas. Y aunque necesarias para el desarrollo del hacer matemático estos tipos de demostración, de razonamiento, no caracterizan al mismo.

Ahora bien, es preciso matizar. En Matemática, establecidas las reglas, hay que seguirlas de manera estricta. Aunque, para ello, sea preciso la intuición que es quien únicamente puede fecundar tales reglas. Fecundación dada porque el matemático es el auténtico creador de las mismas, por lo cual debe conocer su manejo y, fundamentalmente, el fin que en cada cuestión particular en la que trabaje, debe llevar. Fin que no dan tales reglas una vez establecidas, creadas para el manejo convencional de ciertos símbolos. En este sentido cabe destacar las palabras: «en matemáticas, *cuando he establecido las definiciones y los postulados que son convenciones,* un teorema no puede ya ser más que verdadero o falso. Pero para responder a esta pregunta: ¿es verdadero este teorema?, ya no es al testimonio de mis sentidos a quien tendré que recurrir, sino al razonamiento» *(VC.,* 226). E igualmente las palabras de crítica, severa crítica, que dirige a una memoria de Gyldén, en carta a Mittag-Leffler de 5 de febrero de 1899, porque «en esos desarrollos, por lo que he podido comprender, los términos no se deducen unos de otros *por una regla inflexible.* A cada aproximación es necesario hacer intervenir su *jugeotte* (como se dice vulgarmente) para decidir en qué sentido se debe maniobrar la aguja (como se dice en ferrocarriles)» *(OC.,* XI, 69)[23]. Crítica que reitera en carta de 1 de marzo del mismo año, dando incluso un ejemplo de «esta intervención de la apreciación personal, de la jugeotte...» *(íd.,* 70). Apreciación personal que debe ser suprimida una vez establecidas convenientemente las reglas demostrativas. La intuición debe intervenir, tanto en el establecimiento de dichas reglas como en el dominio de su manejo así como en la posibilidad de aplicación de unas u otras a unos u otros problemas y cuestiones determinados; pero tal intuición, tal dominio en el manejo, no deben implicar, en modo alguno, la arbitrariedad en el mismo.

En otras palabras, el término 'analítico' atribuido a un razonamiento equivale, para Poincaré, a proceder mediante un análisis, división o disección bien de las proposiciones de partida, bien de cualquier otra que intervenga en el razonamiento; descomposición en constituyentes. En tal proceso hay una mera sustitución de unas partes por otras siempre que las mismas sean equivalentes entre sí. En el fondo, únicamente hay igualdad o equivalencia entre las proposiciones de partida y las proposiciones obtenidas al final del razonamiento.

Este mismo carácter de división interviene en el proceso silogístico, al cual pueden o no ser reducibles los anteriores, en el sentido de que al descomponer una proposición en sus componentes, lo que se obtiene en la conclusión no es más que lo contenido en las premisas de partida, siendo, además, tal conclusión una proposición más particular que las mismas. Es, pues, un proceso válido para obtener, de modo exclusivo, particularizaciones.

Aunque los procesos genético y de cálculo aritmético y algebraico no sean particularizadores, sino que, dinámicamente, permitan obtener proposiciones del mismo nivel, de todos ellos lo que no se podrá asegurar es que sean procesos que permitan la generalización, por actuar únicamente como reglas de carácter sustitutivo o divisorio, analítico.

Con la interpretación que Poincaré da al término 'analítico', la atribución que hace a los tres procesos de razonamiento señalados, y al silogismo, utilizados por el matemático en su labor, es clara: ser inocuos en cuanto a la generalización y, a la vez, tanto a la adquisición de conocimientos como al establecimiento de los

---

[23] Subrayados míos.

usos de manejo de símbolos. Las reglas anteriores permitirán, únicamente, controlar los procesos inferenciales, pero la esterilidad de los mismos quedará expresada rotundamente en la afirmación «es estéril porque la conclusión no es más que la traducción de las premisas en otro lenguaje» *(1894,* 13). Puede afirmarse, por consiguiente, que constituyen procesos o transformaciones tautológicos, en el sentido de apoyarse en el principio de identidad por modo exclusivo. No se encuentra en ellos virtud creadora alguna.

De modo análogo, las definiciones que Poincaré califica de directas se apoyan en el principio de sustitución. De aquí el carácter tautológico que encierran, dado que el principio de sustitución viene sustentado por el de identidad. «Si no hubiera más que definiciones directas, la impotencia de la lógica pura no podría ser discutida; se podría en una proposición cualquiera reemplazar cada uno de los términos por su definición; cuando hubiera terminado esta sustitución, o bien la proposición no se reduciría a una identidad y entonces no sería susceptible de una demostración lógica; o bien se reduciría a una identidad y entonces no sería más que una tautología más o menos hábilmente disfrazada» *(1912 a,* 104).

Podría pensarse que en el caso de las definiciones por abstracción o por clasificación se tendría un posible matiz creador. Pero ello queda desterrado radicalmente al observar que las mismas únicamente pueden aplicarse cuando previamente se encuentra dado el conjunto en el cual establecer la relación de equivalencia para obtener los nuevos objetos. Además, es proceso a posteriori, en el sentido de que pretende dar una justificación a un proceso genético previamente establecido y mediante el cual se han logrado obtener los elementos a los que se pretende fundamentar en el cuadro previo de una epistemología dada con anterioridad.

Aunque imprescindibles este tipo de definiciones para la Matemática, al igual que los razonamientos señalados, no caracterizan el hacer de esta disciplina; tampoco satisfacen al 'filósofo' como para considerarlas como el fundamento último de tal hacer matemático, por su artificiosidad y su analiticidad. No se encuentra, en ellos, virtud creadora alguna.

§ 2. La recurrencia

1. *Autolimitación a la Aritmética*

Si el matemático utiliza, junto a las reglas lógicas estrictamente deductivas, por particularizadoras, procedimientos como los anteriores, todos ellos analíticos, cabe preguntarse si los mismos agotan los razonamientos y definiciones que el matemático emplea en su hacer. De agotarlos, la esterilidad del matemático sería total y la acusación de ser una disciplina tautológica, una disciplina cuyas proposiciones no fueran más que formas disfrazadas de la proposición 'a=a' estaría acertada desde un punto de vista lógico, mientras que desde un punto de vista epistomológico estaría acertada la tesis de que dichas proposiciones no son otra cosa que traducciones de hechos empíricos; en otras palabras, que la ciencia matemática es una disciplina científico-natural más, radicalmente empírica.

Ya he indicado que la enumeración anterior no pretendía ser exhaustiva y que en ella Poincaré no se detiene a probar la proposición de si los procesos de razonamiento señalados son o no reducibles al silogismo, aunque dé a entender que los considera como irreducibles. Poincaré pasa, de modo inmediato, a un plano epistemológico crítico, a prescribir otro tipo de razonamientos y definiciones. Para ello se autolimita a la Aritmética, en búsqueda del proceso efectivo que se va a tomar como modelo.

Tal autolimitación la justifica revistiéndola de una actitud metodológica que pretende ser científica: observar, con espíritu crítico, los procesos demostrativos matemáticos allí donde se dan con toda su pureza, para lo cual debe elegir, debe pasar revista a las distintas partes de la Matemática. (Con mayor precisión, debe observar el trabajo del matemático o geómetra, no de la Matemática). «Veamos pues al geómetra en acción y tratemos de sorprender sus procesos» *(1894,* 13).

En las demostraciones geométricas el razonamiento no se muestra puro ya que «se complica con los arduos problemas relativos al papel de los postulados, a la naturaleza y origen de la noción de espacio» *(íd.,* 14). Algo parecido ocurre en el Análisis, en el Cálculo. Por el contrario, la Teoría de números, la Aritmética elemental, en sus primeras partes, en aquellas que pudieran calificarse de básica, todavía parece conservarse la pureza del razonamiento matemático, pureza que permita aprehender su auténtica naturaleza. A pesar de lo cual tales zonas han sido ampliamente descuidadas, quizá por la dificultad que, a pesar de su elementalidad, ofrece su verdadero estudio. «Es en la demostración de los teoremas más elementales donde los autores de los tratados clásicos han desplegado menos precisión y rigor. No es preciso acusarles de haber cometido un crimen; han obedecido a una necesidad; los principiantes no están preparados para el verdadero rigor matemático» *(1894,* 14). Lo cual repetirá, casi textualmente, en *1904* (por ejemplo, pp. 102, 103).

Paso a paso observa Poincaré las definiciones de las operaciones fundamentales de la Aritmética. Comprueba que la adición y sus propiedades asociativa y conmutativa, la multiplicación y sus propiedades conmutativa y distributiva *(sic)*, encierran en sí un doble proceso: definición, convencional, de tales operaciones; demostración, rigurosa, de sus propiedades. Pero el proceso, en ambos casos, el mismo: la recurrencia. Recurrencia que se presenta como un proceso sintético en el sentido de que en él se forma, se construye el objeto a definir o la proposición a demostrar, no dando un análisis o descomposición de los mismos ni limitándose a una mera explicación de tal objeto o proposición, como si ya estuvieran dados de antemano y hubiera que distinguirlos, meramente, de los restantes por un mecanismo simplemente delimitador. En ambos casos el objeto general, la proposición universal, se apoyan en la previa formulación de objetos concretos, de proposiciones particulares; apoyo no de análisis, sino de síntesis de los mismos para alcanzar bien ese objeto, bien esa proposición generales, universales, que se muestran, así, como construidos. La recurrencia se muestra como un proceso creador, constructivo y, por consiguiente, sintético.

2. *Definición y demostración inductivas. Su carácter sintético-creador*

En la definición de adición aritmética, por ejemplo, se observan dos pasos como constitutivos de su mecanismo sintético o formador: 1. Suponer conocida la operación '$+1$', «que consiste en agregar el número 1 a un número dado x» *(1894,* 15). 2. Supuesta conocida la operación '$x+(a-1)$', para un *a* cualquiera, la operación '$x+a$' se define mediante la expresión '$x+a=[x+(a-1)]+1$'. En otros términos, y designando con «'» el operador 'sucesor', es decir, el operador que transforma 'a' en 'a'=a+1', la definición inductiva o recurrente de la adición adoptaría la expresión

$$1.\quad x+1=x'$$
$$2.\quad x+a'=(x+a)'$$

De modo análogo, la multiplicación quedará definida por dos pasos iguales a los de la suma: 1. Suponer conocida la multiplicación por la unidad '1', de un elemento cualquiera '$a \cdot 1=a$'; 2. Supuesta conocida la operación '$a \cdot (b-1)$' para un *b* cualquiera, la operación '$a \cdot b$' se define entonces como '$a \cdot b=[a \cdot (b-1)]+a$'.

Al igual que en el caso de la suma, la definición inductiva de la multiplicación quedaría:

$$1.\quad x \cdot 1=x$$
$$2.\quad x \cdot y'=x \cdot y+x$$

En ambos casos cabe observar que la segunda igualdad, la 2, «contiene una infinidad de definiciones distintas, no teniendo cada una de ellas sentido más que cuando se conoce la que la precede» *(1894,* 16, 18). Se ligan ambas definiciones, por consiguiente, con la sucesión de los números naturales como sustrato, como apoyatura en la cual darse y en la cual tenga sentido dar ambas definiciones, ambas operaciones, en el fondo, y ello porque esa infinidad ha de encontrarse ordenada, pues de lo contrario no tendría sentido la afirmación de que cada una de las definiciones incluidas sólo tiene sentido cuando se conoce la precedente.

Cabe observar, aunque no lo haga de modo explícito Poincaré, que las dos definiciones dadas muestran el mismo mecanismo, por lo que pueden unificarse en una sola expresión, prototipo de las definiciones inductivas, y en la cual la operación a definir quede como variable *f*, particularizándose la misma, bien como adición u operador aditivo, bien como multiplicación. La definición inductiva aceptada por Poincaré adoptaría, en este caso, la forma:

$$1.\quad f(1)=a$$
$$2.\quad f(n+1)=g[f(n)]$$

donde *a* es una constante no especificada, mientras que $g(x)$ es una función especificada y *f* es la función unívocamente definida por las condiciones 1 y 2. Esta última frase constituye, realmente, la tercera premisa, el cierre, de la definición inductiva.

En cuanto a las demostraciones, en las cuales la definición dada previamente de la operación no desempeña papel alguno *(1894,* 15), se observa la existencia, como proceso operatorio, de unos pasos análogos a los que construyen la definición: 1. Verificación analítica de una proposición para '1'; 2. Verificación analítica de que si tal proposición o teorema es válido para un número cualquiera, entonces es válido para el siguiente; 3. Conclusión de ser cierta la proposición o teorema para todos los números.

En este proceso, las dos primeras componentes —que pueden calificarse, respectivamente, de *paso básico* y *paso inductivo* o simplemente base y paso de la inducción— son verificaciones analíticas y, sin embargo, en su totalidad, encierra la virtud creadora que Poincaré estaba buscando, dado que en ella se obtiene, en la tercera componente —o cierre— algo más general que en las premisas de partida. Lo que se obtiene no es por mera descomposición o análisis de los dos primeros pasos o premisas, sino mediante una síntesis de las mismas, mediante una construcción que caracteriza a un proceso entera y auténticamente creador.

Si en la demostración aparece la conclusión como componente 3 del proceso también la definición por inducción exige esa misma tercera componente, que suele ir implícita y que podría ser formulada, al igual que la condición de cierre conclusiva, como cierre en el sentido de afirmar que no hay otros elementos más que los formados mediante las condiciones 1 y 2.

Es la unión, la síntesis constructiva de esas tres componentes, lo que caracteriza la inducción matemática. «Este es, pues, realmente, el razonamiento matemático por excelencia» *(1894,* 19).

No es el único proceso. Poincaré ha generalizado inmediatamente. Ha pasado de la observación del proceso en la Aritmética elemental a atribuir lo observado a todo el hacer matemático. Esta extrapolación se hace aún más notable cuando afirma: «A cada paso, si se observa bien, se vuelve a hallar este modo de razonamiento, sea en la forma simple que acabamos de darle, sea en una forma más o menos modificada» *(1894,* 19).

Pero ello no significa, sin embargo, que sea el único modo de razonamiento que utiliza el matemático, ni el único tipo de definición. Debo insistir en este punto porque la atribución de unicidad como expresada por Poincaré se ha mantenido de modo constante. Para matizarla, basta observar el método empleado por el matemático francés para obtener su conclusión: Estudio de otros tipos de razonamientos, explícito, como los tres dados anteriormente; de otro tipo de definiciones, explícito, como las indicadas antes; autolimitación a la Aritmética, y ello en sus partes elementales. Es, en éstas, donde aparece tal forma de razonamiento, ya que en las demás, incluso en la Aritmética no elemental, en la Teoría de números, aparece el razonamiento mezclado, mixtificado con otros tipos de razonamiento y otro tipo de cuestiones, que también pueden ser o encerrar la virtud creadora del razonar matemático. Lo que sí puede afirmarse es que gracias a este modo, a este proceso inductivo, que se manifestará igualmente en otras formas según la materia tratada, la Matemática no es estéril, aunque se combine con los demás. Y no es estéril, ni se limita al estudio de proposiciones particulares, porque tal forma de razonamiento es una verdadera inducción, creadora a la vez por formadora de sus objetos en cuanto a definición, de sus proposiciones en cuanto a demostración, y no un mero proceso delimitador o analítico, bien en su sentido de mera sustitución por igualdades equivalentes, bien en su sentido de particularización lógico.

§ 3. Otro tipo de definiciones

Que no sea proceso único, el inductivo, el empleado por el matemático, viene confirmado por el hecho de que Poincaré, respecto a la definición, incluya en el término de «definición por construcción» no sólo a la definición inductiva sino también a la definición implícita o por postulados.

Definición implícita. Bajo este título caben dos modalidades no separadas nítidamente por el matemático francés y que pueden esbozarse, sin embargo, como sigue:

a) *Definición contextual.*—Es la que permite dar, si no el significado preciso de un término, al menos su valor, al venir tal término incluido en una proposición en la cual todos los restantes términos tienen significación conocida. Además de ser una definición indirecta, presenta un carácter de definición incompleta, al igual que la definición por abstracción, justificando su legitimidad el mismo argumento allí citado. De aquí que, si únicamente se considerara la definición como el establecimiento de una equivalencia entre el término a definir y otros términos previamente definidos o conocidos, este tipo de generalización sígnica no sería una definición. Pero si se tiene en cuenta que el objetivo fundamental de la definición estriba en fijar la significación de un término nuevo, entonces sí cabe admitir como proceso legítimo a este tipo de caracterización.

b) *Definición por postulado.*—Dado un cierto término, el mismo sólo queda caracterizado mediante el cumplimiento de una condición, establecida mediante la aceptación de un postulado o axioma. «Generalmente sabremos que el objeto a definir pertenece a un género, pero cuando se trata de enunciar la diferencia específica, no se la enunciará directamente, sino con la ayuda de un 'postulado' al cual deberá satisfacer el objeto definido» *(1912 a,* 90). Poincaré agrega que es por este procedimiento por el cual se puede definir una cantidad *x,* bien mediante una ecuación explícita, 'f(x)=y', bien mediante una ecuación implícita, 'F(x, y)=0'. Sin embargo, hay que indicar que la primera sería la forma adoptada en la definición contextual, mientras que la segunda sería la expresión simbólica de la auténtica definición por postulado o implícita, aunque este hecho no lo explicite Poincaré.

Naturalmente, este tipo de definición puede exigir el empleo no ya de un único postulado, de una única ecuación implícita, sino de todo un sistema de ellos, un sistema de ecuaciones. Así, dados los cuatro primeros postulados establecidos en los *Elementos* de Euclides, la noción de 'distancia' no queda unívocamente caracterizada, pudiéndose desarrollar distintos sistemas geométricos con métricas diferentes. Al agregar el postulado V euclídeo, entonces el término 'distancia' queda caracterizado sin ambigüedad alguna, obteniéndose la geometría métrica euclídea; pero si en lugar suyo se adopta el postulado de Lobatchevski o el de Riemann, las métricas obtenidas serían distintas, dado que la 'distancia' habrá quedado caracterizada en forma distinta en cada sistema, aunque sin ambigüedad alguna en el interior de los mismos. El término 'distancia' aparece así definido de una manera implícita mediante una serie de postulados. (Ver, especialmente, *1887,* así como *1906 b).*

Ahora bien, Poincaré es radical en este punto: este tipo de definición, bajo sus dos modalidades, no es de carácter descriptivo, sino constructivo, creador. Y ello porque el género no se supone dado de una vez por todas, sino que hay que irlo construyendo elemento a elemento, individuo a individuo. De aquí que, a diferencia de la definición inductiva, que supone tal creación apoyándose en la intuición del número natural con un origen genético, «la definición por postulado no tiene valor más que cuando se ha demostrado la existencia del objeto definido; en el lenguaje matemático, ello quiere decir que el postulado no implica contradicción» *(1912 b,* 90).

A semejanza de la definición por abstracción, directa, este tipo de definición puede ser incompleto, como ya he indicado. Y ello en el sentido de que el postulado no caracterice al individuo, sino al género en el cual se encuentre. Para su validez se requiere que la misma pueda ser completada, es decir, que cada individuo pueda ser, de modo efectivo, delimitado, de un modo constructivo.

A diferencia de las definiciones directas, las definiciones por postulado se apoyan no ya en el proceso de sustitución sino en el proceso de eliminación. «Ya no podemos, estando dada una proposición, reemplazar en ella un término por su definición; todo lo que podemos hacer es *eliminar* este término entre la proposición y el postulado que le sirve de definición» *(1912 b,* 90). Si en esta eliminación, mediante las reglas de la eliminación lógica, se obtiene una identidad, entonces la proposición no es más que una tautología, en cuyo caso se podrá afirmar que no se ha creado o construido objeto alguno nuevo; pero si en la misma no se obtiene una identidad, lo único que podrá afirmarse es que la proposición es indemostrable por las reglas de la lógica pura, o, en otras palabras, que mediante este proceso se ha obtenido un objeto nuevo. Objeto obtenido, entonces, no por la lógica, que permanece estéril, sino por un proceso que no cae bajo su ámbito y sí bajo el ámbito del hacer matemático.

Este tipo de definición exige, para su aceptación, la demostración efectiva del objeto definido, y ello mediante un proceso finito, dado su carácter de indirecta. Es la diferencia quizá central de esta definición respecto a la definición inductiva, que produce, por sí, sin necesidad de esta segunda etapa demostrativa, el objeto definido. De aquí que, conceptualmente, se muestre como menos simple y, a la vez, como menos intuitiva. Por otro lado, en tal etapa demostrativa Poincaré sostiene que este tipo de definición ha de recurrir, bien al modelo, bien a la inducción completa, es decir, a la demostración por recurrencia. Por todo ello, aunque creadora, y utilizada por el matemático, deba encontrarse subordinada a la recurrente.

§ 4. La inducción completa

El proceso demostrativo sintético, en Aritmética, se denomina inducción completa o también inducción matemática. Y aunque clave para la Aritmética, tal mecanismo demostrativo recurrente o definitorio —que puede incluirse en el mismo dado su carácter creador— lo es también para las restantes zonas del hacer matemático, como lo muestran las innumerables aplicaciones que tiene, tanto para la demostración lógica en su versión de *inducción deductiva,* como para la definición inductiva de, por ejemplo, el continuo de n dimensiones, definido en función del continuo de $n-1$ dimensiones, lo que «es una definición por recurrencia» *(1912 b,* 134). Y ello por sólo poner un caso. Sin embargo, en Aritmética, constituye el modelo más simple del auténtico razonar matemático, por lo que Poincaré se detendrá a estudiarlo, mostrando a la vez su especificidad e irreducibilidad respecto al empirismo o a la Lógica, lo cual entraña intentar demostrar la especificidad de este hacer respecto a ambas tendencias. El principio de inducción completa se convertirá, por ello, en el proceso clave para la demostración de tal independencia, aunque no constituye más que la manifestación más simple de entre todas las posibles de la virtud creadora matemática. Y aunque sea principio único e indescomponible, en su justificación epistemológica crítica, Poincaré observará que, en el fondo, resulta de la unidad sintética, constructiva, de unas determinadas componentes que cabe estudiar, aunque el matemático francés no lo realice de modo explícito.

Poincaré, para formular el principio de inducción completa, utiliza en su estudio el mismo mecanismo o perspectiva con el cual se autolimita a la Aritmética: ver el funcionamiento del principio en su terreno propio, en la demostración de proposiciones matemáticas, perspectiva en la cual no le voy a seguir, pasando directamente a su formulación y a las componentes posibles.

Formulación

La proposición en la cual se manifiesta el principio de inducción completa, primera manifestación de la virtud creadora del razonamiento matemático en virtud de su simplicidad conceptual es, con palabras de Poincaré:

1. Se establece un teorema para $n=1$.
2. Se demuestra después que si es cierto para $k-1$, es cierto para k.
3. De ello se concluye que es cierto para todos los números naturales.

Expresado simbólicamente, para una propiedad *f* cualquiera, el principio adopta la formulación

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & f(1) \\ 2. & f(k-1) \Longrightarrow f(k) \\ 3. & \forall n\ f(n). \end{array}\right\} \quad (1)$$

La formulación dada lo es de un proceso demostrativo, no inventivo. Y lo es de un proceso como regla deductiva, no meramente como principio o proposición, en cuyo caso se formularía:

$$f(1) \wedge [f(k-1) \Longrightarrow f(k)] \Longrightarrow \forall n\ f(n).$$

Ante un problema cabe obtener, por el proceso inventivo que a cada matemático se le ocurra, la llamada *hipótesis de recurrencia,* 'f(k)'. Tal hipótesis, por muy plausible que se muestre, requiere, para ser aceptada, para ser considerada como solución de dicho problema o cuestión, como propiedad o teorema válido, la demostración dada por el esquema (1). A esta fase demostrativa, como proceso de razonamiento, no puede atribuírsele carácter o matiz psicológico alguno más o menos subjetivo. Matiz que posee, por el contrario, la fase de búsqueda de la hipótesis de recurrencia, marcada por el ensayo y error, analogía, idea feliz...

Poincaré admite que la formulación (1) no es más que la manifestación expositiva de la virtud creadora característica del razonamiento matemático. Manifestación lingüística particular que puede adoptar otras formulaciones lingüísticas distintas. Así, puede manifestarse, igualmente, mediante una proposición como

(2) «en una colección infinita de números enteros diferentes, hay siempre uno que es menor que todos los demás» *(1894,* 22).

Tanto la formulación (1) como la (2) son equivalentes entre sí, pudiéndose adoptar una u otra como primitiva. «Se podrá pasar fácilmente de un enunciado a otro y darse así la ilusión de que se ha demostrado la legitimidad del razonamiento por recurrencia» *(id.)*. Pero ello no es más que una ilusión, porque tal equivalencia lo que muestra es la misma virtud creadora en lenguajes diferentes, por lo que siempre en el intento de dar la fundamentación del razonamiento por recurrencia, se tendrá que llegar a una proposición indemostrable, expresión lingüística última del razonamiento matemático. La elección de uno u otro principio no va a ser cuestión, pues, de otra cosa, sino de simplicidad y elegancia, o bien de una manifestación más acorde con la génesis del mismo. Poincaré opta, de manera decidida, por la formulación (1), dado el carácter eminentemente constructivo que la misma encierra, frente a la formulación (2) o principio de buena ordenación, para enteros, también calificado de principio minimal.

El principio de inducción completa, para Poincaré, se muestra como originado en la unidad sintética de la intuición del número puro. «Tenemos la intuición del número puro, aquella de donde ha salido el segundo de los axiomas que acabo de enunciar (el de inducción completa) y que puede engendrar el verdadero razonamiento matemático» *(1900,* 22). Puede plantearse la cuestión de si, en este sentido, cabría admitir el principio de inducción completa como una definición del número natural, del tipo indirecto constructivo, una definición por postulado o implícita, y ello por proceder de dicha intuición y por ser, a la vez, una característica básica de tales números. Pero, para Poincaré, todas las definiciones, sean del tipo que sean, gozan de un carácter de convencionalidad, aunque no llegue a ser arbitrariedad, bastante elevado. Convencionalidad que, en el caso presente, no se le muestra como existente. Llega a escribir: «Nuestra conclusión es, primero, que *el principio de inducción completa no puede ser considerado como la definición disfrazada del número entero.* / He aquí tres verdades: / El principio de inducción completa. / El postulado de Euclides. / La ley física según la cual el fósforo funde a los 44° (...) / Se dice: Estas son tres definiciones disfrazadas, la primera, la del número entero; la segunda, la de la línea recta; la tercera, la del fósforo. Lo admito para la segunda, pero no para las otras dos» *(CM.,* 132-3). Si fuera una definición implícita habría que dar la demostración de la existencia de lo definido, es decir, del número natural, y ello sólo puede significar que habría que demostrar la no-contradicción del principio de inducción completa. Lo cual se le muestra a Poincaré imposible salvo si se comete un círculo vicioso, es decir, si se utiliza dicho principio o alguno de sus equivalentes. Por otro lado, la pretendida demostración, al igual que el principio, proceden de la intuición del número puro, anterior al propio proceso de razonamiento por inducción completa; es decir, suponen dado previamente el número natural que habría que llegar a definir. Para Poincaré, tal número es anterior a la posible aplicación de un proceso demostrativo que ha de apoyarse en el 'número de sus etapas demostrativas', número que ha de ser natural. De aquí que el mecanismo de recurrencia se le muestre como anterior e irreducible a la Lógica.

Puede ponerse aún más de manifiesto este hecho observando que es precisamente mediante un proceso recurrente como únicamente cabría definir el número natural, aceptando con Poincaré que «número entero finito es el que puede ser obtenido por adiciones sucesivas y es tal que n no es igual a $n-1$» *(CM.,* 134). En otras palabras, la definición de número natural responde al esquema de la definición inductiva y se establece mediante las premisas:

1. 1 es un número natural.
2. Si n es un número, n+1 es un número.

Definición inductiva que supone conocido '1' y la operación 'sucesor' manifestada en el conocimiento de '+1'. Una vez establecida esta definición, reflejo de la posibilidad reiterativa de una acción, con base genética y fisiológica, puede establecerse que sobre tales números puede razonarse por recurrencia, es decir, puede establecerse otra definición del número natural en la forma «número entero es aquel sobre el cual se puede razonar por recurrencia» *(CM.,* 134). Pero ello incluye una falacia, porque la aparente equivalencia se apoya en que, al hacer proposiciones de la forma 'todos los números tienen la propiedad f', lo que se hace realmente es afirmar: ''1' tiene la propiedad f', '2 tiene la propiedad f', y 'si n tiene la propiedad f, entonces n+1 también la tendrá' ', o, en palabras de Poincaré, centrada la propiedad *f* en ser la no contradicción, el número natural «es aquel del que se puede decir que, si la ausencia de contradicción en el momento del silogismo cuyo número es entero trae la ausencia de contradicción en el momento del silogismo cuyo número es entero siguiente, no habrá temor de contradicción para ninguno de los silogismos cuyo número es entero» *(CM.,* 134). Las dos definiciones no son, para Poincaré, iguales, sino equivalentes. Equivalencia apoyada no en demostración lógica alguna, sino en virtud de un verdadero juicio sintético *a priori*. Juicio sintético cuya formulación es, precisamente, el principio de inducción completa.

Componentes

A pesar del carácter primario e irreducible que Poincaré atribuye al principio de inducción completa, cabe observar que sintetiza en sí una serie de componentes. Las mismas son:

1. *El número cualquiera.*—Tanto en las definiciones como en el proceso demostrativo recurrente hay que resaltar el hecho de que su formulación se expresa no para números determinados, particulares, sino para elementos cualesquiera. En el manejo de tales objetos cualesquiera se encuentra, precisamente, una de las claves de la generalización característica del hacer matemático. Así, demostrada la igualdad '$a+1=1+a$', para un valor 'a' constante, el matemático pasa a demostrar la igualdad '$a+2=2+a$' y, de ella, la igualdad '$a+b=b+a$', para un 'b' cualquiera, lo «que es manifiestamente más general» *(1894,* 25). Pero tanto en una como en otra igualdad —y a pesar de que se elige un ejemplo de un proceso calificado de analítico preferentemente— hay que observar que interviene ya un objeto 'a' no especificado, un *número cualquiera,* aunque se indique que está dado. En la proposición manifiestamente más general aparece un 'b' que se toma como variable, es decir, que puede adoptar todos los valores de la sucesión de los naturales. Tanto en el primer caso, el ejemplificado por 'a', como en el segundo, por 'b', se tiene una posibilidad de infinitas expresiones. Es una de las claves de la generalización de las expresiones matemáticas.

En el principio de inducción completa aparece, en su formulación (1), tal número cualquiera en su segunda premisa, en el paso inductivo '$f(k-1) \Rightarrow f(k)$'. En ella es 'k' un elemento dado, pero cualquiera, de la sucesión de los números naturales. Por ello, al igual que en las definiciones de adición y multiplicación, en la expresión general de la definición inductiva, el proceso recurrente contendrá «una infinidad de definiciones distintas», de premisas distintas.

Ello equivale a afirmar que, para Poincaré, la clave se encuentra en el empleo no ya de signos concretos, particulares, como en el ejemplo de cálculo aritmético y algebraico, sino en el empleo de expresiones indeterminadas que engloben tales casos como meras verificaciones.

2. *El infinito.*—La infinidad a que se ha hecho referencia hace que el infinito se ligue ya con el número cualquiera, consti-

tuyendo otra de las componentes esenciales del principio de inducción completa, de los procesos recurrentes.

Cabe observar que este infinito no sólo interviene a través del número cualquiera. Analizando la formulación del principio se observa que el mismo «contiene condensados, por decirlo así, en una fórmula única, infinidad de silogismos» *(1894,* 20). Basta considerar cómo se podría intentar una justificación de la elaboración del principio:

$$
(3) \qquad
\begin{array}{ll}
1. & f(1) \\
2. & f(1) \Longrightarrow f(2) \\
\hline
 & f(2) \\
3. & f(2) \Longrightarrow f(3) \\
\hline
 & f(3) \\
4. & f(3) \Longrightarrow f(4) \\
\hline
 & f(4) \\
5. & f(4) \Longrightarrow f(5) \\
\hline
 & f(5) \\
6. & f(5) \Longrightarrow f(6) \\
\hline
 & f(6) \\
\multicolumn{2}{l}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}
\end{array}
$$

La conclusión de cada silogismo hipotético es la menor del silogismo siguiente, mientras que todas las mayores se reducen a la expresión '$f(k-1) \Longrightarrow f(k)$'. Si nos limitamos a un número finito n, entonces el principio no es más que una simplificación, siempre útil, de una serie de verificaciones, concretamente n, enlazadas en $n-1$ silogismos. En este caso, que pudiera calificarse de inducción no-completa o inducción simple, todo el proceso no es más que una verificación analítica a la que no puede reducirse el principio de inducción completa, ya que en él se obtiene una conclusión válida no ya para el número finito n, sino para todos los elementos de la sucesión de los naturales.

El principio de inducción completa, al condensar una infinidad de silogismos en fórmula única y finita, se hace «un instrumento que permite pasar de lo finito a lo infinito» *(1894,* 22). De aquí que este razonamiento sea uno de los que convierten a la Matemática en ciencia, al permitir el manejo de teoremas generales y no particulares, teoremas generales que son imposibles de alcanzar por el mero proceso silogístico o por la simple marcha lógica analítica, procesos válidos únicamente, al igual que el principio de no-contradicción, para desarrollar tantos silogismos como se quiera, desarrollo que nunca lograría «encerrar una infinidad de ellos en una sola fórmula» *(1894,* 20) finita.

El principio de inducción completa es imprescindible para el manejo del infinito y, a pesar de lo dicho, también se muestra útil cuando se trata de teoremas que versen sobre lo finito, ya que siempre «nos evita verificaciones largas, fastidiosas y monótonas que resultarían rápidamente impracticables» *(íd.,* 22).

Carácter esencial es, por consiguiente, la posibilidad de manejar el infinito; en otras palabras, permitir pasar de la verificación particular —acción a realizar en los pasos 1 y 2— a la propiedad general, contenida en la conclusión. En este paso, auténtica inducción, es donde se encuentra la posibilidad de enriquecimiento del hacer matemático, su fecundidad constante. «En este dominio de la Aritmética, uno puede creerse muy alejado del análisis infinitesimal y, sin embargo, acabamos de verlo, la idea del infinito matemático desempeña ya un papel preponderante; y sin ella no habría ciencia porque no habría nada de general» *(íd.,* 22).

Conviene destacar, aquí, que a pesar de que las palabras anteriores pudieran indicar que el infinito aceptado por Poincaré es el infinito actual, ello es un error. Para el matemático francés el infinito del que trata el hacer matemático no es, no puede ser, nunca, el infinito actual. Las citas podrían multiplicarse, de *1906, 1908 b, 1909 c, 1912 a.* En *1909 a,* retomando expresiones análogas a las de textos anteriores, Poincaré escribe: «No hay infinito actual; lo que llamamos el infinito, es únicamente la posibilidad de crear nuevos objetos sin cesar, por numerosos que sean los objetos ya creados. Unicamente estos nuevos objetos no son concebibles en sí mismos más que si son susceptibles de ser definidos en un número finito de palabras. Resulta que un conjunto del que cada elemento no puede ser definido en un número finito de palabras es un puro nada; no se puede decir nada ni pensar nada» *(1909 a,* 115). En lo cual insiste el mismo año *(1909 b,* 124) y trata de precisar cuando afirma: «Cuando hablo de todos los números enteros, quiero decir todos los números enteros que se han inventado y todos los que se podrá inventar un día. (...) Y es ese 'se podrá' lo que es el infinito» *(1909 c,* 25-6).

En 1912 matiza en cuanto a que una proposición encierre el infinito: «Un teorema debe poder ser verificado, pero como somos finitos, no podemos operar más que sobre objetos finitos» *(1912 a,* 85), indicando: «el infinito deriva de lo finito; hay un infinito porque hay una infinidad de cosas finitas posibles» *(íd.)*. De aquí que al afirmar de un teorema que participa del infinito o que lo encierra, lo que quiera decirse no es que una de sus posibles verificaciones particulares participe del infinito, «sino que las verificaciones posibles son en número infinito» *(íd.)*. Verificaciones que la formulación del teorema nos exime de llevar a cabo, al condensarlas en una expresión única, finita.

3. *La acción.*—Refuerza Poincaré la consideración del infinito potencial como elemento constitutivo del principio de inducción completa al señalar que «esta inducción sólo es posible si una misma operación puede repetirse indefinidamente» *(1894,* 28). Palabras que se muestran fundamentales, porque cabe plantearse la pregunta de en qué parte del enunciado, en cuál de las líneas de la formulación (1) se capta o encierra el infinito o, con mayor precisión, en cuál se encierra el paso de lo finito a lo infinito y, con él, la generalización, teniendo presente, además, que la misma puede considerarse incluida ya en el número cualquiera. Desde luego en la premisa 1 no se hace más que una verificación: es línea que indica la acción a cumplir para '$n = 1$'. Pero en la premisa 2 también se tiene una mera verificación analítica, indica una acción a cumplir igualmente: la demostración, a partir de la hipótesis '$f(k-1)$' de la tesis '$f(k)$'. Aunque Poincaré señala que el condicional '$f(k-1) \Rightarrow f(k)$' es «la fórmula general que contiene como casos particulares a todos los mayores» (de los silogismos hipotéticos) *(1894,* 20), los contiene por la proposición cualquiera, pero sigue sin ser la clave del razonamiento. Esta se encuentra no en línea determinada alguna, sino en la unidad sintética, global, de las tres, unidad dada precisamente por la posibilidad de repetir una acción de modo indefinido a la vez que por la simultánea posibilidad de conservación de esa misma acción. Acción de repetición indefinida reflejada o plasmada en las verificaciones particulares 1 y 2, mediante una acción finita, única que puede efectuar el individuo humano, el matemático.

Esta acción no se reduce a una repetición, en cuyo caso se convertiría en el cálculo fastidioso y monótono antes mencionado. Es una acción en la cual se obtiene, a partir de dos acciones, una conclusión que se formula en la línea 3, con la condición del cuantificador universal «para todo natural».

Ello conduce a señalar como otro carácter constitutivo del razonamiento por recurrencia, apoyatura de los demás, precisamente el que indica una *acción,* un *proceso* operatorio de repetición indefinida, que se conserva en cada acto, pero que conduce a una generalización sobre el mismo conjunto del que se parte y en el que se actúa. Simultáneamente, este carácter indica que el infinito que se maneja es el abierto o potencial y no el actual, a la vez que es un proceso sintético, constructivo y no meramente analítico.

4. *La sucesión.*—El soporte tanto de la acción operatoria como de la conservación correspondiente es la sucesión de los números naturales. Sucesión dada simultáneamente con el principio, ya que éste supone de modo claro la previa elaboración de un *orden* operatorio. Es en la sucesión de números naturales, como sucesión ordenada —bien ordenada, además—, donde se encierra la captación del elemento '$k+1$', del siguiente o sucesor del número natural cualquiera 'k', pero como miembro del mismo conjunto. Miembros del mismo conjunto, dado por la condición de cierre de la definición inductiva, creadora de dicha sucesión.

De modo explícito, al hablar de la construcción del continuo de primer orden, es decir, de la construcción de los números racionales, Poincaré observa: «Todo ocurre como para la sucesión de los números naturales. Tenemos la facultad de concebir que una unidad puede ser agregada a una colección de unidades; gracias a la experiencia, tenemos oportunidad de ejercer esta facultad y de tomar conciencia de ella; pero desde ese momento sentimos que nuestro poder no tiene límite y que podríamos contar indefinidamente, aunque jamás hayamos llegado a contar sino un número finito de objetos» *(CH.,* 37).

Palabras que indican que la propia sucesión de números naturales no se encuentra dada actualmente, sino que hay que irla construyendo en un proceso operatorio mediante la acción del operador 'sucesor', que consiste en agregar una unidad a cada número natural. La sucesión de los naturales se muestra como construcción posibilitada por la intuición sintética de la reiteración, de una propiedad del espíritu mismo y no como una sucesión clausurada, reflejo del infinito actual. Propiedad del espíritu que es la que permite obtener la premisa 1 de la definición inductiva y que, gracias a la experiencia, se tiene oportunidad de establecer la premisa 2 de tal definición. Plano puramente operatorio, constructivo, el marcado reiteradamente por Poincaré frente al estaticismo que supondría aceptar el infinito actual. Infinito actual que parecería reflejarse en la formulación minimal de la virtud creadora, en la formulación (2), pero que tras las precisiones anteriores tampoco puede sostenerse, interpretando entonces tal formulación en el sentido de posibilidad reiterativa, nuevamente, de elección, ahora de primer elemento en cada subconjunto de los naturales elegido.

La cuarta característica o componente esencial se podría reformular, entonces, afirmando que la sucesión de números naturales se liga de modo indisoluble con la recurrencia, entre otras cuestiones porque es por recurrencia como puede obtenerse la misma. De aquí que se ligue tanto con cada uno de sus elementos considerados en su individualidad concreta —pero como colecciones de unidades—, como con la inducción completa enfocada como una forma específica del razonamiento. Hay que insistir en que el principio de inducción completa se liga no ya con el número natural aislado, individual, sino con la sucesión de los mismos, con el conjunto bien ordenado que constituyen, subrayando la característica de buena ordenación que es esencial en la serie de los números naturales. Buena ordenación producida por la construcción, elemento a elemento, de la misma mediante un proceso recurrente.

Alguna diferencia con los procesos analítico-tautológicos

El principio de inducción completa, como mecanismo demostrativo, conduce de verificaciones particulares a una conclusión general. Es un método demostrativo que permite superar tales verificaciones particulares, ahorrarlas del hacer matemático, operando directamente con expresiones generales. Que la conclusión sea más general se debe a que contiene condensados todos los casos particulares, habiéndose obtenido de ellos mediante una síntesis, mediante una auténtica inducción generalizante. En este punto se observa ya alguna diferencia, alguna contraposición respecto a los métodos calificados como analítico-tautológicos. En particular, con el cálculo aritmético y algebraico, en el cual se opera con expresiones concretas, particulares, limitado el matemático a un manejo casi estrictamente sígnico material. Y aunque pueda, en tal manejo, reiterar sus acciones, sus operaciones, al igual que puede hacerlo en un juego de fichas, esta reiteración o permanece en el plano de ese juego o ha de pasar a una posible generalización. Generalización que estará apoyada, entonces, en el principio de inducción completa, único que podrá enunciar proposiciones generales acerca de las construcciones concretas, de las manipulaciones con las configuraciones materiales sígnicas.

2. LA VIRTUD CREADORA

§ 5. La reiteración

El análisis efectuado respecto a las componentes que se sintetizan de manera constructiva en la unidad alcanzada por el principio de inducción completa permite obtener una conclusión clara: la inducción completa se muestra como un proceso operatorio ligado a la sucesión bien ordenada de los números naturales que, a su vez, se liga a la recurrencia para ser obtenida. Con lo cual, como base y apoyatura de tal proceso doble, se observa que lo que realmente se encuentra es la posibilidad reiterativa uniforme ilimitada de una operación, de una acción, que es la creadora tanto del soporte —la sucesión de los números naturales— como de la posibilidad demostrativa apoyada en el mismo con su faceta de rigor total —la inducción completa como método demostrativo.

Puede concluirse que es, pues, la reiteración la esencia de la virtud creadora, que se manifiesta en la Aritmética mediante el razonamiento y la definición inductivas. Que ello sea así para Poincaré se pone de relieve al indicar el matemático francés que dicho proceso operatorio se impone al espíritu humano, a la razón del matemático con radical necesidad «porque no es más que la afirmación de una propiedad del espíritu mismo (...) no es más que la afirmación de la potencia del espíritu que se sabe capaz de concebir la repetición indefinida de un mismo acto, desde que ese acto es posible una vez» (*1894,* 23-4). En otras palabras, se impone al espíritu de un modo necesario porque se encuentra fundamentada en ese mismo espíritu, del cual no es sino una de sus manifestaciones.

Poincaré afirma, además, «El espíritu tiene, de esa potencia, una intuición directa» *(1894,* 24). Es decir, el individuo adquiere conciencia de la virtud creadora del razonamiento matemático, de la inducción completa como una de sus manifestaciones, por intuición directa. Pero hay que destacar que la intuición lo es no ya del principio de inducción completa en sí o de cualquiera de sus equivalentes, sino de aquello por lo cual tal principio se construye y elabora: la posibilidad de repetición de una acción desde que la misma es posible. Posibilidad en la cual se apoya el concepto de número natural, su construcción. La intuición lo es, por consiguiente, de un proceso constructivo, de un proceso sintético. La intuición es la que, realmente, posibilita tal construcción, tal proceso, del que el matemático no puede alejarse nunca, bajo pena de detenerse en su capacidad creadora.

La posibilidad reiterativa de una acción, desde que es posible, constituye por consiguiente la clave de la virtud creadora del razonamiento matemático. Es la que permite, desde la acción, la creación del número y, con ella, de la Aritmética. Y lo es desde la acción porque requiere «una operación activa del espíritu» *(1912 b,* 141).

§ 6. Manifestaciones primarias

Es claro que la manifestación primaria más clara de la virtud creadora la constituye la sucesión de los números naturales, con su secuela del principio de inducción completa para razonar sobre la misma. Pero la operación activa del espíritu es creadora también del espacio, es decir, de uno de los marcos que el matemático elabora tanto en función intrínseca como en función extrínseca, instrumental, como elemento de uso para las restantes disciplinas científicas. Cuando Poincaré se pregunta por el carácter cuantitativo atribuido al espacio, por el origen de ese carácter, responde en 1903: «Del papel que desempeñan en su génesis las series de sensaciones musculares. Son series que pueden *repetirse, y es de su repetición de la que proviene el número;* porque pueden repetirse indefinidamente el espacio es infinito. Y en fin hemos visto al final del parágrafo 3 que también por eso el espacio es relativo [24]. Así, *es la repetición la que ha dado al espacio sus caracteres esenciales» (1903,* 133).

[24] Porque las sensaciones musculares indican los movimientos para alcanzar una posición final a partir de una inicial, «pero nada nos hace

Años antes, 1895, el matemático francés indicaba que el espacio es uno de los marcos que el matemático construye en función del físico. A tal construcción se ligaba, igualmente, la geometría. Y se observa que una de las leyes de los fenómenos (desplazamientos) que constituyen la geometría es, precisamente, la homogeneidad, mientras que otra de esas leyes es la de isotropía. Leyes que verifican los sólidos indeformables construidos por el matemático, no los sólidos de la naturaleza. Las leyes mencionadas vienen dadas, en términos matemáticos, precisamente por la posibilidad reiterativa: «Se puede decir también que un movimiento que se ha producido una vez puede repetirse una segunda vez, una tercera, y así sucesivamente, sin que sus propiedades varíen» *(1895,* 83). A las leyes mencionadas habría que agregar otras análogas «que los matemáticos resumen en una palabra diciendo que los desplazamientos forman un 'grupo'» *(íd.)*. El origen genético del grupo —y con él, el origen tanto de la Geometría como del Algebra— se encuentra, por ello, en dicha posibilidad reiterativa, en la cual insiste Poincaré: «Hemos visto la importancia que se debe atribuir a la posibilidad de repetir indefinidamente una misma operación. / Es *de esta repetición* que *el razonamiento matemático obtiene su virtud;* es pues gracias a la ley de homogeneidad que se lo ha aplicado a los hechos geométricos» *(CH.,* 83).

Si el carácter cuantitativo atribuido al espacio procede de la repetición de las sensaciones musculares, Poincaré insistirá en que el origen de las propiedades de ese mismo espacio, enfocado en su aspecto amorfo —es decir, no métrico o proyectivo, sino puramente topológico— es el mismo. La propiedad central de este espacio amorfo, independiente de las propiedades geométricas, consiste en afirmar que constituye un continuo de tres dimensiones. El espacio amorfo se ha obtenido no de una mera abstracción de las diferencias entre dos estados consecutivos o simultáneos, sino como una construcción cuyo origen genético se encuentra en las «sucesiones de sensaciones» *(1912 b,* 145), enfocadas en unidad dada por el orden. En él «yo poseo 'la convención fundamental' que me enseña en qué casos dos de esos elementos [del continuo] deben ser considerados como idénticos y ella es que ese continuo es quien tiene tres dimensiones» *(1912 b,* 147). Pero hay que ob-

---

conocer la posición inicial; nada puede hacérnosla distinguir de todas las otras posiciones posibles» *(1895,* 118). De aquí la relatividad esencial del espacio. Salvo el subrayado del término 'repetirse', los demás son míos.

servar que las sucesiones de sensaciones no se encuentran —a pesar de ser ya sucesiones— aisladas, sino que forman parte de una categoría de otras series semejantes que encuadran por un orden «en el cual se ordenan naturalmente nuestras categorías, que corresponden a los puntos del espacio; la experiencia nos enseña que este orden se presenta en la forma de un cuadro de triple entrada y es por esta razón por la que el espacio tiene tres dimensiones» *(1907,* 88). La convención fundamental no es arbitraria como podrían serlo las convenciones o definiciones utilizadas en las restantes partes del hacer matemático. Es convención justificada, al igual que la estructura de grupo, la inducción completa, el continuo, los axiomas de orden. La justificación que Poincaré establece de dichas convenciones fundamentales la refleja en las palabras que particulariza para la convención de las tres dimensiones del espacio amorfo: «Tenemos la intuición del continuo de un número cualquiera de dimensiones, porque tenemos la facultad de construir un continuo físico y matemático; que esta facultad preexiste en nosotros a toda experiencia porque sin ella, la experiencia propiamente dicha sería imposible y se reduciría a las sensaciones brutas, impropias a toda organización; que esta intuición no es más que la conciencia que tenemos de esta facultad» *(1912 b,* 157).

§ 7. Manifestaciones secundarias

Las manifestaciones anteriores de la virtud creadora pueden estimarse como centrales o básicas para el hacer matemático. Pero lo son en cuanto al haber permitido la elaboración de los cuadros fundamentales, de las estructuras o moldes a partir de los cuales construir nuevos modelos. Cuadros fundamentales como son la sucesión de los números naturales, el espacio con sus caracteres cualitativo y cuantitativo, la geometría, el álgebra. Construcciones que pertenecen, ya, a la especie humana y que, por ello mismo, llegan a considerarse como datos constitutivos del individuo. Pero la virtud creadora no se ha agotado en la elaboración de las mismas. En realidad esa virtud creadora continúa manifestándose en cada momento, aplicada a cada problema particular, a cada nueva teoría. La diferencia con las manifestaciones primarias estriba en que en las secundarias hay mayor sofisticación y menor pureza e, incluso, puede ocurrir que se mezclen otros elementos en ella que enmascaren su carácter. Cabe observar estos hechos en dos terrenos: el Análisis y la Demostración, elegidos como ejemplos.

1. *El Análisis*

Son problemas centrales del Análisis matemático los de aproximación, limitaciones superior e inferior, crecimiento... [25]; los teoremas de existencia en ecuaciones diferenciales presentan un mismo mecanismo de aproximación manifestado en los métodos de Lipschitz y Picard. Ha podido sostenerse, años después de las manifestaciones de Poincaré que, en esencia, el análisis clásico trata de «mayorar, minorar, aproximar» (Dieudonné, *1968,* 9). Es decir, reemplazar las igualdades por desigualdades, lo que supone no poder utilizar en Análisis razonamientos que se apoyen en la lógica clásica cuyo fundamento es el principio de identidad, sino en métodos recurrentes. Lo cual se pone de manifiesto en Poincaré cuando señala que uno de los motores de la invención matemática, y de su fecundidad por consiguiente, «es el fundado en el empleo de las funciones mayorantes» *(1900,* 31). Empleo que se apoya en la previa advertencia de analogías y diferencias con cuestiones previamente resueltas y «de ahí que deduzca las modificaciones que es necesario introducir en el método» *(íd.)*. Analogía que se apoya, a su vez, en la intuición «de lo que constituye la unidad de su razonamiento, lo que constituye, por así decir, su alma y su vida» *(íd.,* 32). Analogía que da paso a la acción reiterativa de una operación constructiva.

Que sea éste el método creador, el verdadero razonamiento matemático en los terrenos del Análisis, se observa directamente en la obra del matemático francés. Así, uno de sus primeros trabajos, en los que se reveló como creador genial, consistió en la construcción de las funciones trascendentes —hoy denominadas automorfas— que permiten integrar las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes algebraicos. Al igual que Abel, Poincaré comenzó invirtiendo el problema planteado por Fuchs y halló un auxiliar inapreciable en los terrenos de la geometría no euclídea. Invirtiendo, buscó las condiciones a que debían someterse las posibles funciones solución de las ecuaciones diferenciales. Señaló que tales

[25] Ver, por ejemplo, Chevalley, *1935.*

funciones uniformes «$F(\zeta)$ no cambian cuando se aplica a ζ una de las sustituciones lineales en número infinito $S_i = (\zeta_i, \frac{\alpha_i\zeta + \beta_i}{\gamma_i\zeta + \delta_i})$. Yo supongo que el índice i toma todos los valores, 0, 1, 2..., *ad infinitum*» *(1881,* 92). En otras palabras, dado un conjunto numerable de aplicaciones lineales $\frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}$, Poincaré busca la existencia de una función $F(z)$ uniforme, tal que $F(z) = F\left(\frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}\right)$. «Está claro que las sustituciones S_i deberán formar un grupo y un grupo discontinuo» *(íd.,* 93). Como el conjunto de las S_i es numerable, el que formen grupo equivale al hecho siguiente: la composición de dos cualesquiera de tales sustituciones es otra sustitución del mismo conjunto. Pero lo es igualmente la composición de tres, cuatro, etc., sustituciones. En este *etc.* se incluye la posibilidad de reiterar indefinidamente la misma operación de composición de sustituciones [26], [27]. Con lo cual se tendría, llamando $f_i(z) = \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}$, que $F(z) = F[f_1(z)] = \ldots = F[f_i(z)] = \ldots$

Lo que interesa destacar aquí es el hecho de que la composición de sustituciones, o reiteración de una misma operación binaria, necesite de la ley asociativa para la constitución de la estructura de grupo. Y es la ley asociativa la que permite generalizar la operación binaria a un número cualquiera de elementos, generalización apoyada en la reiteración de la operación. Con ello Poincaré ha construido, por un método directo, lo que se denomina el

[26] Puede compararse con Bell, *1937,* 625-627.

[27] En Poincaré, *1882,* puede leerse: «Si las sustituciones de un grupo son en número finito, se pueden hacer dos hipótesis diferentes: / Se puede suponer que es posible elegir en el grupo una sustitución $(z, f_i(z))$ tal que $f_i(z)$ difiere infinitamente poco de z (y ello cualquiera que sea z), es decir, que el grupo contiene una sustitución infinitesimal. / O se puede suponer también que el grupo no contenga parecida sustitución. / Los grupos de la primera especie serán *continuos,* los de la segunda *discontinuos.* / No puede existir función uniforme analítica de z que permanezca inalterada por las sustituciones de un grupo continuo, porque esta función debería tomar el mismo valor en puntos infinitamente próximos unos de otros y, por consiguiente, tener un valor constante» *(1882,* 117).

De ello se desprende que: Una función continua definida en un espacio conexo es constante si, para cada punto, hay un entorno en que la función es constante. Este enunciado, topológico, es equivalente al de recurrencia, según Papert, *1960 b,* 144-46.

dominio fundamental de las funciones fuchsianas o automorfas, dominio que se presenta como un grupo discontinuo [28], grupo cuya representación geométrica más clara la constituye la geometría no-euclídea de Lobatchevski.

Los ejemplos podrían multiplicarse, y no sólo en la obra de Poincaré, sino en la de cualquier matemático, como ocurre con la curva de 1890 de Peano, basada en la posibilidad de reiterar un mismo proceso indefinidamente, o en el ejemplo de Brouwer de la división de un mapa en tres regiones en el que en cada punto fronterizo los tres países se toquen entre sí, apoyado en el mismo proceso de reiteración indefinida, aunque en los dos casos citados la intuición falle al cabo de unas cuantas repeticiones, a pesar de lo cual es dicha intuición la que se encuentra en el origen, tanto del problema en sí como de la puesta en marcha de la posible operación a realizar, operación que la desborda posteriormente, superándola.

2. *La Demostración*

He comenzado este capítulo señalando los procesos demostrativos que Poincaré admite que se emplean en el hacer matemático. Procesos que se le muestran tautológicos y analíticos, es decir, no dan cuenta del verdadero proceso creador demostrativo matemático, que se muestra, por el contrario, en la inducción completa en los terrenos aritméticos. Cabe proseguir e indagar qué es una verdadera demostración para Poincaré, en terrenos no estrictamente aritméticos. El matemático francés distingue dos aspectos:

a) Pedagógico-psicológico. En él, una demostración es lo que el alumno comprende o aquello por lo cual el matemático obtiene un resultado a partir de otras proposiciones ya conocidas. El primer caso, indica que algún alumno admitirá que «comprender una demostración de un teorema es examinar sucesivamente cada uno

---

[28] Ver Freundenthal, *1954*, para una narración crítica de la creación de las funciones automorfas. Se puede leer, como una de las grandes consecuencias: «La construcción del dominio fundamental de un grupo discontinuo, calificada de atrevida por Klein, y extraordinaria en una época en la cual no se estaba acostumbrado a los métodos directos y no analíticos» *(1954,* 219). Igualmente, Hadamard, 1921, especialmente 156-167, donde se pone de relieve la imagen intuitiva «sensible» como motor en la creación analítica de Poincaré.

de los silogismos de que se compone y constatar que es correcto, según las reglas del juego» *(CM.,* 93). Pero ello no es, auténticamente, comprender una demostración. El alumno exigente pedirá, además, el por qué tales silogismos se encadenan en un orden determinado y no en otro, el por qué se realiza una determinada elección y no otra. Pedirá, en una palabra, la unidad subyacente. La idea que se encuentra por debajo de esa estructura lingüística o meramente sígnica en la cual toma forma.

b) El que pudiera denominarse deductivo. Es el que aquí interesa de modo fundamental. Aunque Poincaré no realice una clara delimitación, cabe distinguir en él dos planos:

b₁) Aspecto material o semántico, referido a lo que es factible calificar de 'contenido' de la demostración. En este sentido, la idea subyacente al concepto de demostración auténticamente matemática se encuentra en que «la demostración verdadera es fecunda porque su conclusión tiene un sentido más general que las premisas» *(1894,* 13). Modelo de tal tipo demostrativo es, naturalmente, la inducción completa. Esta es la que obtiene conclusiones más generales, siempre, que las premisas de las que parte, por su carácter sintético-constructivo.

b₂) Existe un segundo aspecto, calificable de sintáctico: el de ordenación de las proposiciones en la inferencia, en toda demostración. En este sentido «una demostración matemática no es una simple yuxtaposición de silogismos; son *silogismos colocados en un cierto orden,* y el orden en el cual están colocados estos elementos es mucho más importante que ellos mismos» *(1908 a,* 41; *1900,* 26). Ahora bien, decir que lo importante en una yuxtaposición de silogismos es el orden en el cual se sitúan viene a establecer una cierta relación de la demostración con la recurrencia, con la reiteración, dado que cada línea de la demostración se mostrará como un elemento que se puede hacer corresponder con un cierto elemento de la sucesión de los números naturales. La síntesis de ese orden de colocación de los silogismos es lo que dará la verdadera esencia de la demostración matemática, síntesis inductiva que exige la previa intuición de la sucesión numérica en la que tales silogismos se encadenan.

Las palabras anteriores muestran la motivación de que Poincaré hable de que una de las «innumerables aplicaciones» *(CM.,* 133) de la inducción completa se encuentre en el enlace entre 'demostración-sucesión de números naturales'. Ya que una demostración significa «una serie de silogismos, pudiendo proseguir partiendo de axiomas como premisas. Cuando se ha acabado el *n*-simo silogismo, se ve que se puede hacer aún otro, y es el $n+1$; así, el número n sirve para contar una serie de operaciones sucesivas» *(CM.,* 133). En otras palabras, la demostración supone la reiteración de una serie de operaciones —las reglas de transformación de una proposición en otra—, y exige lo que puede calificarse de 'número de etapas de la demostración': es decir, exige una primera, una segunda, una *n*-sima proposición a la vez que un proceso recurrente apoyado en la reiteración de una transformación a una primera proposición, a la transformada de ésta, etc.

Puede concluirse, entonces, que en una demostración el número se ha incluido ya, porque lo que en ella se realiza es un acto de reiteración indefinida que permite pasar de una proposición a la siguiente, del número n al $n+1$, permitiendo crear una sucesión bien ordenada de proposiciones, que exige que '$n \neq n-1$', sucesión bien ordenada a la que se denomina 'demostración'. En otras palabras, una demostración en su aspecto sintáctico no es más que una manifestación de la capacidad reiterativa del espíritu matemático, manejando unas reglas de transformación que previamente ha construido. Es una manifestación, sin embargo, no primaria, ya que en ella se introducen elementos que enmascaran su auténtica naturaleza, a pesar de lo cual puede admitirse que el concepto demostración es puramente matemático. El enmascaramiento, sin embargo, se produce cuando en la presentación ordinaria de una demostración formal se realiza simplemente como una sucesión material de proposiciones, a lo que se suele agregar que cada línea se ha obtenido de la o las anteriores aplicando únicamente las reglas de transformación. Es presentación que, así formulada, olvida su enlace con la sucesión bien ordenada de los números naturales y, por consiguiente, olvida su enlace con la síntesis inductiva, constructiva, que en el fondo fundamenta y posibilita el concepto de demostración. Síntesis inductiva que se manifiesta en «la marcha general del razonamiento» *(1900,* 26), obtenida mediante una cierta intuición que permita la aplicación reiterativa acertada de las reglas de transformación, a la vez que se apoya en el previo conocimiento de tales reglas, conocimiento que exige el saber manejarlas y, por consiguiente, comprenderlas, y que hoy se calificaría de plano semántico, aunque Poincaré lo califique de intuitivo.

De esta forma, para Poincaré, la demostración matemática se presenta como la unidad sintética de la sucesión de proposiciones que la componen materialmente y de la finalidad que las hace encadenarlas en dicha sucesión.

En llamada a convicción del lector en favor de la anterior tesis —llamada que no es otra cosa que una argumentación psicologista, por consiguiente, pero de la que no puede prescindir ningún tratado de lógica pura, aunque no explicite su autor esta clara finalidad de su y de toda su obra— basta que dicho lector haya realizado o simplemente observado una derivación formal sintáctica estricta. A partir de unas premisas se van obteniendo distintas proposiciones aplicando, bien el *modus ponens,* bien cualquier otra regla de derivación previamente justificada, bien de la regla de sustitución, primitiva. En cada paso las reglas pueden aplicarse de muchas maneras. «¿Quién nos dirá cuál es preciso elegir?» *(1900,* 27). ¿Quién dirá el por qué se elige el empleo de una u otra de las reglas en una u otra proposición determinada? Ciertamente el resultado obtenido, la sucesión material de proposiciones constituye la formulación de la demostración, pero Poincaré realiza una inmediata comparación: «Habéis visto, sin duda, esos delicados encajes de agujas silíceas que forman el esqueleto de algunas esponjas. Cuando la materia orgánica ha desaparecido no queda más que un frágil y elegante encaje. No hay allí más que sílice, es cierto, pero lo interesante es la forma que ha tomado esta sílice, y no podemos comprenderla si no conocemos a la esponja viviente que le ha impuesto justamente esa forma» *(1900,* 27). Reiterará Poincaré otras metáforas: la comprobación de que línea tras línea se han utilizado correctamente las reglas de transformación equivale a la observación de un elefante mediante un microscopio, paso a paso. «Un naturalista que no hubiera estudiado jamás un elefante más que con el microscopio, ¿creería conocer lo suficiente a este animal?» *(íd.,* 26; *CM.,* 98). También la idea de que la unidad de una obra arquitectónica no viene dada por la colocación de cada uno de los ladrillos que la componen y sustentan *(CM.,* 99)...

Es necesario unir, pues, a ese encadenamiento de proposiciones la finalidad del mismo. Y esta finalidad es la que dará, realmente, la esencia de la demostración, la verdadera «realidad completa, ese no sé qué que hace la unidad de la demostración» *(1900,* 26). Unidad que permite reemplazar tales derivaciones formales, tales esqueletos proposicionales por otros razonamientos más breves, resumidos en algunas líneas, que posibiliten economizar pensamiento reemplazando por auténticos métodos constructivos esas engorrosas sucesiones. Resumen que sólo podrá obtenerse mediante la visión de la unidad demostrativa, «del conjunto del razonamiento» *(CM.,* 41). Resumen en el cual Poincaré ve, además, uno de los motores para el avance del hacer matemático al no tener que repetir tales cadenas demostrativas que, necesarias en un primer momento, pueden ser entorpecedoras a largo plazo, ya que «no es suficiente dar modelo a imitar» *(CM.,* 29). Así, explicita: «Es preciso que se pueda después de nosotros abandonar esos modelos y en lugar de repetir un razonamiento ya hecho, resumirlo en algunas líneas. Y es en esto en lo que se ha logrado el éxito varias veces: por ejemplo, existía una clase de razonamientos que se parecían y que se encontraban en todas partes; eran perfectamente rigurosos, pero eran largos. Un día se imaginó la palabra uniformidad de la convergencia, y esta sola frase los ha tornado inútiles; ya no hay más necesidad de repetirlos, puesto que se sobreentienden» *(CM.,* 29).

Lógica-intuición.—Ello no supone que la mera transformación de una a otra proposición, la mera estructura lógica formal sea inútil, sino que no es todo. El aspecto puramente lógico en su engranaje material de proposiciones permite suprimir los errores que muy frecuentemente cometen los matemáticos en su labor. Y aún más, el engranaje material constituye, realmente, el esqueleto de la prueba matemática ya que, sin él, tal prueba no podría existir: «en matemáticas, la certeza no es todo, mas sin ella no hay nada; una demostración que no sea rigurosa, es nada» *(CM.,* 28).

Pero, no es todo. Y esto supone diferenciar el hacer matemático de un mero juego diversionista como puede ser el ajedrez, a cuyo ejemplo también acude reiteradamente. «La lógica y la intuición tienen cada una un papel necesario. *Ambas son indispensables.* La lógica que puede por sí misma dar la certeza, es el instrumento de la demostración, la intuición es el instrumento de la invención» *(VC.,* 29). Gracias al análisis, a la lógica, se indican las combinaciones proposicionales correctas; lo que no hace tal análisis es indicar qué caminos, qué combinaciones deben elegirse *(CM.,* 101 y 115). Elección que no pertenece a los terrenos de la lógica, de aquí que quien pretenda resolver un problema o demostrar una proposición no pueda apoyarse de modo exclusivo en métodos lógicos o mecánicos, porque los mismos no le dirán nunca por qué procedimientos llegar, a partir de unas premisas, hasta una proposición dada. No hay, no puede haber, proceso de decisión mecánico alguno que reemplace la intuición sintética individual del matemático.

Incluso en terrenos como los geométricos, donde aparentemente se ha logrado alcanzar una cierta mecánica demostrativa que ha permitido exposiciones de carácter formal, ello es ficticio. Y lo es porque ha existido, entre otras cosas, una previa finalidad en la creación de tal procedimiento, porque se ha realizado con una materia que puede considerarse clausurada como la Geometría. Con aplauso sincero por la obra de Hilbert respecto a los Fundamentos de la Geometría, Poincaré afirma: «No le reprocho a Hilbert este carácter formal de su geometría, pues *a eso debía tender, dados los términos del problema planteado.* Hilbert quería reducir al mínimo el número de axiomas fundamentales de la Geometría y hacer la enumeración completa de ellos; pues bien, en los razonamientos en que nuestro espíritu permanece activo, en aquellos razonamientos vivos, por decirlo así, en que la intuición representa también un papel, no es difícil introducir un axioma o postulado que pase inadvertido, y por consiguiente, sólo después de haber referido los razonamientos a una forma puramente mecánica es cuando ha podido estar seguro de haber logrado su intento y completar su obra» *(CM.,* 114-5) [29].

Aún más, tal carácter mecánico enmascara un hecho esencial, el de que es posible la aparente mecanización formalista porque previamente se ha demostrado el teorema fundamental de la geometría: «Que los axiomas de la geometría no implican contradicción, y esto no puede demostrarse sin el principio de inducción» *(CM.,* 132).

En otras palabras, la lógica formal se aplica «para estudiar la ciencia una vez creada» *(CM.,* 115). Como ciencia viva, en permanente expansión y renovación creadora, el hacer matemático constituye una ciencia independiente de normas fijadas apriorísticamente aunque, en movimiento dialéctico, tal hacer se someta posteriormente a las reglas que el propio matemático ha creado. La distinción que Poincaré realiza es tajante: la Lógica es válida única y exclusivamente para la ciencia hecha, para su ordenación y, como tal, es el instrumento indispensable para clarificar y sancionar, para indicar los supuestos tácitamente aceptados, los errores cometidos, los saltos inadecuados. Naturalmente, la corrección que

---

29 Subrayados míos.

el instrumento lógico indica debe hacerse escapar a dichos medios lógicos; la corrección debe realizarse por el individuo, nuevamente, con su capacidad inventiva, su intuición. Frente a esta consideración de la Lógica, Poincaré contrapone el hacer matemático como algo que se hace, ciencia viva que no puede aceptar más moldes que los que le imponga quien la construye; ha de requerir, por ello, algo más que la lógica pura. A ese algo más lo denomina Poincaré 'intuición', siguiendo la tradición. Es un algo que no sólo juega un papel esencial en la invención, sino que caracteriza, igualmente, a la demostración matemática, auténtica unidad sintética de la sucesión de números naturales, de la sucesión de proposiciones, de la sucesión de silogismos o razonamientos formales, de la finalidad que se ha tenido al realizarla.

Unidad sintética la que se esconde bajo el término 'demostración' y que enmascara su fundamento, su ser reflejo de la virtud creadora del razonamiento matemático. Enmascaramiento que hace que se tome sólo alguna de las componentes que intervienen en tal unidad como el total de la misma, en cuyo caso se pierde la nota de dicho reflejo de la virtud creadora, virtud que se manifiesta en la posibilidad reiterativa, en la aplicación reiterada de unas reglas de transformación adoptadas como primitivas. Es la misma virtud que se encierra en la inducción completa, aunque en ésta aparezca con toda su pureza. Es la misma virtud que volverá a manifestarse en las demostraciones de consistencia de los sistemas formales, que han de utilizar los recursos recurrentes puros, único medio para ser establecidas, y que indican su independencia, su mayor complejidad respecto a las reglas admitidas como lógicas puras y, con ello, la especificidad propia del razonamiento matemático y su anterioridad respecto al lógico.

§ 8. Adquisición de la virtud creadora: Papel de la experiencia

Si la facultad creadora es una potencia del espíritu que devela la intuición, tal proceso intuitivo no se tiene de manera gratuita. Necesita, para ponerse en marcha, para determinar en qué sentido debe o puede realizarse una construcción determinada, de la experiencia, tanto del mundo exterior como de la experiencia interior. Hay aquí, en Poincaré, la admisión de un muy claro movimiento dialéctico. La experiencia, sola, sin una previa organización estructural del pensamiento, es nada; no es experiencia. El pensamiento solo, sin la experiencia, ni se pondría en marcha ni sabría alcanzar la finalidad y el sentido en el cual moverse; ni siquiera sería pensamiento, dado que no podría estructurarse para organizar, para dar nacimiento a la experiencia. Pensamiento creador-Experiencia son dos polos entre los cuales se mueve la creación matemática —como, por lo demás, cualquier otra creación científica—. Si lo primero pueden considerarse las sensaciones musculares, la convicción de intercalar un término entre otros dos, la observación de los desplazamientos de los cuerpos rígidos, la posibilidad de obtener un sucesor de un natural dado,... es decir, si lo primero consiste en la captación de la operación a realizar, sólo la experiencia mediante la intuición permitirá obtener esa operación y, con ella, la captación de la facultad creadora; y no en abstracto, sino que tal facultad se sentirá en funcionamiento, es decir, se sentirá nuevamente mediante la experiencia de la capacidad reiterativa indefinida. La capacidad reiterativa es anterior a cualquier razón lógica, que ha de requerir, en el fondo, de dicha facultad para poder ejercerse. De aquí el carácter primario del razonamiento matemático frente al lógico.

Es la experiencia quien permite tal toma de conciencia, como ocurre por ejemplo en la sucesión de los pasos al andar. Sucesión de pasos, que es acción con su secuela de sensaciones musculares obtenidas en serie y, a la vez, indicadoras de que cada paso se obtiene del anterior en marcha que puede proseguirse de manera indefinida. Con ello, esta experiencia permite develar el concepto de sucesión, que sin embargo, preexiste en el espíritu.

De modo análogo ocurre en la Geometría: «Lo que es el objeto de la geometría, es el estudio de un 'grupo' particular; pero el concepto general de grupo preexiste en nuestro espíritu al menos en potencia. Se impone a nosotros, no como forma de nuestra sensibilidad, sino como forma de nuestro entendimiento» *(CH.,* 90). A pesar de lo cual es la experiencia quien da la ocasión para que tal grupo se manifieste y es la que guía, además, en la elección de un sistema geométrico u otro, guía dada no sólo por la comodidad en la adaptación a la naturaleza de esa geometría sino por la propia elaboración de los cuadros de distribución fisiológicos que la especie ha ido modelando en cada individuo para adaptarlo a las condiciones materiales y, de esa manera, llegar a dominarlas y transformarlas.

Lo mismo puede decirse en cuanto a la elaboración del Espacio, lograda a partir de la acción operatoria. Si se adopta la convención de que el espacio tiene tres dimensiones, es porque tal número «procede de nuestra conformación» *(1907*, 88), en el sentido de lo que se ha dicho en el último párrafo. «Nuestro cuadro de distribución no es más que la traducción de un conjunto de hechos exteriores; si tiene tres dimensiones es porque se ha adaptado a un mundo que tenía ciertas propiedades (...) Si entonces la lengua de tres dimensiones es la que nos permite describir más fácilmente nuestro mundo, no debemos sorprendernos: esta lengua está calcada sobre nuestro cuadro de distribución; y es a fin de poder vivir en este mundo para lo que este cuadro ha sido establecido» *(íd.*, 89). Enlazando tanto la creación de la geometría como la del espacio en la cual se ha elaborado, Poincaré insiste: «Hemos visto que la geometría no es una ciencia experimental, sino una ciencia nacida con motivo de la experiencia, que hemos creado el espacio que ella estudia, pero adaptándola al mundo en que vivimos. Hemos escogido el espacio más cómodo, mas es la experiencia quien ha guiado nuestra elección. Como esta elección ha sido inconsciente, nos parece que nos ha sido impuesta» *(íd.*, 90). En la posición de Poincaré se eliminan las ideas de quienes sostienen que ha sido la experiencia quien nos impone uno u otro tipo de geometría y la propia noción de geometría; pero también de quienes sostienen que el individuo nace ya con la noción de espacio enteramente dada. Ambas posiciones se le muestran extremosas y, por ello mismo, equivocadas. «La experiencia no ha jugado pues más que un papel único, ha servido de ocasión. Pero este papel no dejaba de ser muy importante, y he creído necesario hacerlo resaltar. Este papel habría sido inútil si existiera una forma *a priori* imponiéndose a nuestra sensibilidad y que sería el espacio de tres dimensiones» *(1903*, 127).

Ahora bien, en el proceso constructivo interviene algo más que la propia experiencia interior fisiológica, que las sensaciones musculares, por ejemplo. Intervienen construcciones y principios previamente realizados o admitidos. Ello lo pone de relieve Poincaré en un caso especialmente delicado: el continuo matemático. A este ejemplo, dada su importancia para comprender el pensamiento de Poincaré en cuanto al mecanismo de la creación del hacer matemático, mecanismo que permite indicar cuál es el fundamento de este hacer para el matemático francés, dedico algo de extensión.

El continuo matemático

La definición de los números irracionales o inconmensurables por el mecanismo de Cantor, Weiertrass y Méray, como límites de dos sucesiones monótonas convergentes de números racionales, nada indica acerca de la existencia de los números que tales sucesiones pretenden definir. Y ello a pesar de que este mecanismo es de carácter puramente genético y reduce el continuo y los teoremas o propiedades con él ligados a desigualdades entre números naturales, por el proceso de 'aritmetización del análisis' iniciado por Cauchy y culminado por Weiertrass y su escuela. Pero lo que tal proceso indica es que puede hallarse un número mayor que cualquiera previamente dado en el desarrollo de una sucesión. No indica que la misma no pueda ser proseguida hasta alcanzar un período en las cifras decimales, en cuyo caso el número definido sería racional, ni indica si en esa continuación tal período no puede aparecer. En otras palabras, no asegura ni dice nada acerca de la existencia de un número tras calcular el límite. Frente a este procedimiento, Dedekind parte de una clasificación de los números racionales como un conjunto previamente dado en tres clases: mayores, menores o iguales a un punto de corte. Punto de corte que designa o representa el número real correspondiente a una clasificación determinada. A cada clasificación se le asigna, de esta forma, un número real. Sin embargo, tampoco este procedimiento resuelve el problema de la existencia, sino que lo da por resuelto de modo implícito. En el fondo, el procedimiento de Dedekind entraña como hipótesis implícita la existencia de lo que define. Lo cual no es muy satisfactorio porque podría argumentarse que el signo del punto de corte, por ejemplo '$\sqrt{2}$', no es más que un símbolo como lo puede ser el agregado de signos 'el emperador actual de España'. De aquí que Poincaré se ligue a este problema en su ensayo de 1893, en el cual se encierra un ataque a Kronecker como representante del formalismo inscripcionista que da lugar a una teoría como la anterior, que se queda en el mero signo sin asegurar la existencia de aquello que define. Poincaré comete un error de atribución al mencionar a Kronecker como creador del método de cortaduras, debido a Dedekind. A este respecto, al incorporar el ensayo a *La Ciencia y la Hipótesis,* rectifica dicha atribución pero, aunque menciona ahora a Dedekind, sigue insistiendo en los matemáticos de la Escuela de Berlín, de la cual Dedekind aparecería como representante, aun cuando Dedekind permaneció como profesor desde 1862 de la Escuela Técnica Superior de Brunswick, su ciudad natal.

Según Poincaré, para Dedekind un número inconmensurable como $\sqrt{2}$ no es más que un símbolo que expresa una cierta repartición de los números racionales. A cada forma de repartición se le asocia un número, inconmensurable o no, que le sirve de símbolo. «Pero contentarse con ello, sería olvidar demasiado el origen de esos símbolos; queda por explicar cómo se ha estado conducido a atribuirles una especie de existencia concreta y, por otra parte, ¿no comienza la dificultad para los números fraccionarios mismos? ¿Tendríamos la noción de esos números, si no conociéramos de antemano una materia que concebimos como divisible hasta el infinito, es decir como un continuo?» *(CH.,* 34). Basta el enunciado de estas preguntas para indicar cómo Poincaré se sitúa en plano de epistemología genética, contrapuesto al plano del formalismo axiomatizador de Dedekind y las corrientes que éste representa.

Poincaré parte de la previa construcción de un continuo físico, a partir de la existencia de unas sensaciones fisiológicas. Estas, para poder organizarse, requieren de la estructuración fisiológica en cuadros de distribución de dichas sensaciones. Organización estructural que se apoya en la posibilidad reiterativa que permite el cumplimiento de leyes como las mencionadas de homogeneidad e isotropía en el espacio matemático, que no en los espacios representativo, táctil, visual... Los distintos continuos físicos, creados por el espíritu tras la organización anterior, pueden reflejarse por la expresión

$$(1) \qquad a=b \wedge b=c \wedge a<c$$

que no es más que la ley de Fechner *(CH.,* 35; *1912 b,* 140). Establecida la ley (1), «podemos imaginar una cadena continua de conjuntos de sensaciones de tal suerte que cada uno de ellos no se distinga del siguiente, aunque los dos extremos de la cadena se distingan fácilmente» *(1912 b,* 140). Es decir, dados dos elementos ‘a’, ‘b’, con la condición ‘$a<b$’, puede intercalarse, en primer lugar, un elemento ‘c’, tal que ‘$a=c$’ y ‘$c=b$’, que es la condición expresada, realmente, en (1). Aumentando el poder del instrumento de medida, tal ‘c’ quedaría como ‘$a<c<b$’, pero en este caso puede intercalarse —segundo paso— un ‘c_1’ y un ‘c_2’

tales que '$a=c_1 \wedge c_1=c \wedge c=c_2 \wedge c_2=b$'; y así sucesivamente. Proceso de reiteración indefinida porque no hay instrumento de medida independiente de los sentidos del hombre; proceso de reiteración indefinida obtenido de la experiencia en cuanto a su posibilidad. Ahora bien, el espíritu matemático posee o admite como principio indubitable el que dos cosas iguales a una tercera son iguales entre sí. Es decir, admite como principio lógico el que puede formularse por

$$(2) \qquad a=b \wedge b=c \Rightarrow a=c$$

Se ha establecido, entonces, un «desacuerdo intolerable» entre (1) y (2) según el principio de contradicción, admitido igualmente por el espíritu humano como ley básica del razonamiento. Desacuerdo que obliga al matemático a crear un primer continuo matemático. Para ello comenzará afirmando que lo que ocurre en el continuo físico es, realmente, que '$a \neq b$' y '$b \neq c$', pero que la imperfección de los sentidos y de los aparatos de medida impide que se los distinga. Simultáneamente obliga a que el matemático revise un principio considerado como lógico: 'El todo es mayor que la parte' o principio de homogeneidad, en el sentido de que si ampliamos el intervalo [a, b] al doble con el microscopio, tal ampliación nos daría el intervalo [a_1, b_1] que podría contener al [a, b] como una de sus mitades *(CH.,* 36-7). Pero, naturalmente, ello implica que tiene que admitirse que ambos intervalos son infinitos dado que, de lo contrario, aunque reiteremos tales ampliaciones «con los métodos más perfeccionados» *(íd.)* el continuo físico continuará dando la expresión (1), lo cual entraña contradicción con (2). «La contradicción cesa desde que el número de términos está considerado como infinito; nada impide, por ejemplo, considerar el conjunto de los números enteros como semejante al conjunto de los números pares, que no es, sin embargo, más que una parte» *(íd.)*. Equivale a decir, entonces, que la posibilidad de intercalar un elemento 'c' entre dos elementos dados 'a' y 'b' es indefinida. Como resultado de estas interacciones (Creación del continuo físico-Desacuerdo con el principio de identidad-Posibilidad de intercalar elementos entre dos dados-Negación de la homogeneidad-Ilimitación del proceso reiterativo de intercalación) el matemático admite que dados dos enteros 'a' y 'b', con un orden '$a<b$', existe un número 'c', tal que '$a<c<b$' y tal que la acción de intercalación puede reiterarse. Se puede ad-

mitir que la caracterización de tal proceso es convencional y así, para facilitar el cálculo, cabe admitir que $c=\frac{a+b}{2}$. De aquí surge la imagen del continuo racional, ordenado, con infinitos elementos. Ya he citado las palabras de Poincaré de que todo pasa como para la construcción del número natural en el sentido de que en ella se tiene la facultad de repetir la operación de agregar una unidad al conjunto de unidades, y gracias a la experiencia ejercemos tal facultad creadora de modo indefinido. En el continuo racional la operación es ahora la de intercalar términos medios entre dos términos consecutivos de una serie, «comprendemos que esa operación puede ser proseguida más allá de todo límite, y que no hay, por decirlo así, ninguna razón intrínseca para detenerse» (*CH.*, 37).

Creado el continuo racional Poincaré afirma que el mismo no basta. El continuo racional no es más que el continuo de primer orden. El espíritu ha probado su facultad creadora y siente que la misma puede ser proseguida de modo indefinido. De aquí que pueda construir un continuo de segundo orden o continuo real. Para la construcción de este continuo de segundo orden, nuevamente el proceso dialéctico se muestra esencial en Poincaré. La intuición geométrica, sensible, fisiológica, tiene un papel clave en esta construcción, lo mismo que la tuvo en la construcción de los cuadros de distribución para elaborar el continuo físico. Es papel que hace que llegue a sentirse la necesidad de dicha construcción y, a la vez, que la misma no sea un vano juego del espíritu. Poincaré señala que los números racionales no son suficientes para la elaboración matemática en los términos: «Está claro, en efecto, que si los puntos cuyas coordenadas son conmensurables fueran los únicos considerados como reales, el círculo inscrito en un cuadrado y la diagonal de ese cuadrado no se cortarían ya que las coordenadas del punto de intersección son inconmensurables» (*CH.*, 39). De aquí la existencia de «huecos» en el continuo de primer orden. Huecos que se muestran en desacuerdo intolerable con la imagen sensible de una recta, que no los posee. Para superar este desacuerdo cabe realizar el proceso indicado por Dedekind: representarse tal recta dividida en dos semirrectas. La frontera común, la cortadura, es el número real, el punto real que cubre el hueco dejado por los racionales. Tal proceso de cortadura, apoyado en la imagen sensible, es lo formalizado por Dedekind —aunque una vez más Poincaré insista, por Kronecker—. Es el proceso de cortadura, con su base intuitiva, la apoyatura para caracterizar, precisamente, los espacios topológicos y las dimensiones de los mismos *(1912 b,* 138-9), así como la representación de la imagen clásica de la frontera de los cuerpos sólidos. De aquí su alcance intuitivo y no meramente formal. El mismo se fundamenta, a la vez, en la necesidad de un orden. «Para los axiomas de orden me parece (...) que son verdaderas proposiciones intuitivas, ligadas al Análisis Situs: vemos que el hecho para un punto C de estar *entre* otros dos puntos de una línea se liga a la manera de *dividir* un continuo de una dimensión con ayuda de *cortaduras* formadas por puntos infranqueables» *(1912 b,* 156). De aquí que la imagen del continuo real venga dada como «una colección de individuos colocados en un cierto orden, en número infinito, es verdad, pero *exteriores* los unos a los otros. (...) De la célebre fórmula, el continuo es la unidad en la multiplicidad, sólo subsiste la multiplicidad, la unidad ha desaparecido» *(CH.,* 30).

El continuo de segundo orden, o continuo matemático, exige, por ello, no sólo del proceso de reiteración continuada como el continuo racional o de primer orden, sino también del concurso de la imagen sensible, de la intuición para ser elaborado. De aquí que la construcción formalista genética dada por el proceso de aritmetización del análisis no le sea suficiente a Poincaré como explicación o fundamento de este continuo de segundo orden. En dicha explicación se olvida el proceso genético auténtico y se desvirtúa el propio papel del razonamiento matemático a la vez que el papel de la experiencia; en otras palabras, se desvirtúa el carácter dialéctico del papel creador del matemático. Ello implica, a la vez, que dicho continuo no puede ser reducido, sin más, a los números naturales.

He indicado que la creación del continuo de segundo orden no es más que una tercera etapa en la construcción de estos continuos. Poincaré les ha dado, precisamente, este nombre: continuo físico, continuo de primer orden, continuo de segundo orden. Nombre no clásico y que ha llevado al error en la interpretación a autores como Piaget y Mooij, que atribuyen al continuo real lo que únicamente es válido para el racional: la sola capacidad reiterativa como base de su construcción, cuando la misma no basta para el continuo real.

Poincaré indica, además, la posibilidad de crear continuos de orden superior; así habla del continuo de tercer orden o de los infinitésimos de Du Bois-Reymond, y agrega: «Sería fácil ir más lejos, pero ello sería un vano juego del espíritu; no se imaginarían más que símbolos sin aplicación posible, y nadie pensaría en ellos» *(CH.,* 43).

En las etapas constructivas de los continuos de distinto orden señala Poincaré que no hay contradicción alguna. De aquí que el continuo matemático, que no es más que un conjunto de símbolos, se presente como no contradictorio, como resultado tanto del proceso creador como de la aportación de los datos intuitivos «obtenidos de nociones empíricas más o menos elaboradas» *(CH.,* 41). A pesar de lo cual Poincaré afirma que ello no implica que se esté «al abrigo de contradicciones análogas a las que le han dado nacimiento» *(íd.,* 43). Sin embargo, expresa su confianza en el poder razonador matemático en el sentido de que siempre se podrá encontrar algún artificio como en las etapas anteriores que permita eliminar tales contradicciones o, en todo caso, superarlas. La aparición de contradicciones se le muestra, de esta forma, al matemático francés, como uno de los motores de la construcción matemática, por la supresión de los 'desacuerdos intolerables' que provoca mediante la elaboración de nuevos campos matemáticos.

«En resumen, la mente tiene la facultad de crear símbolos, y así ha construido el continuo matemático, que no es más que un sistema particular de símbolos. Su potencia no está limitada sino por la necesidad de evitar toda contradicción; pero el espíritu no la emplea más que cuando la experiencia da motivo» *(CH.,* 40, 43).

§ 9. Resumiendo

Puede señalarse, por consiguiente, que la tesis de Poincaré se centra en indicar que el hacer matemático es una creación de símbolos realizado por el espíritu matemático en su interrelación con la naturaleza, consigo mismo. La virtud creadora de dicho razonamiento se encuentra en la posibilidad de reiterar de modo indefinido una acción desde que la misma es factible. Tal facultad es primaria y se encuentra en la base de todo razonar matemático —y por supuesto en la base de toda construcción lógica—, de aquí su especificidad propia que se refleja en la construcción recurrente de la sucesión de los números naturales, en el principio de inducción completa que permite realizar las demostraciones —constructivas— de las propiedades atribuibles a los elementos de dicha sucesión, así como permite el control de sus propias construcciones mediante las demostraciones de consistencia; en la construcción de los números racionales, de los distintos órdenes de continuos; de la geometría mediante la elaboración de la estructura de grupo; del álgebra de sustituciones, por esa misma estructura; del espacio; de los postulados de orden...

Que insista en que la virtud creadora de los símbolos matemáticos sea una facultad del espíritu humano, apoyado en el recurso a la intuición —en sus diversos aspectos: sensible, intelectual— se refleja en Poincaré en la clara manifestación de simpatía hacia Hilbert, quien se sitúa en el terreno de la extensión y manifiesta la necesidad de elaborar conjuntamente la lógica con la matemática, y el rechazo del logicismo así como las dudas ante su maestro Hermite, quienes se sitúan en los terrenos de la comprensión y comparan el hacer matemático con el hacer de las ciencias, es decir, con el hacer del mero descubridor de un mundo eidético de esencias platónicas reales o de un mundo de cosas en sí trascendente *(1912 a,* 95). En este contexto es en el que cabe situar la afirmación de Poincaré de que el razonamiento por inducción completa es el reflejo del verdadero, del auténtico razonar matemático, pero a la vez, el más simple, dado que en él no intervienen factores como los del continuo, espacio, grupo... Factores que han de unirse a la capacidad reiterativa mediante el proceso dialéctico Experiencia-Creación mental. Al no unirse a la mera acción repetitiva lo que se obtiene es su pureza y su simplicidad. De aquí que se considere como el reflejo que permite manejar el infinito potencial con los únicos recursos de que dispone el hombre, con métodos finitos que, a la vez que constructivos, muestran un rigor total por ser simultáneamente demostrativos. Como tal proceso se manifiesta en proposición de carácter sintético y a priori, entendiendo por tales juicios los que dan cuenta de una construcción —síntesis— independiente de la experiencia —a priori—, aunque sea la experiencia quien permita su captación mediante un acto de intuición intelectual y no sólo sensible. Modelo de construcción, es el que debe prescribirse como admisible. Igualmente, los únicos métodos que deben admitirse al enfrentarse con el infinito actual son los que gocen del mismo carácter de constructividad finitista.

Además, cabe observar que lo fundamental, para Poincaré, no es la proposición en la cual pueda formularse tal virtud creadora, sino la actividad del espíritu matemático que se plasma bien en una bien en otra forma enunciativa. Lo primario no es, por consiguiente, el lenguaje —aunque no por ello éste deba ser despreciado u olvidado— sino la acción por la cual se crea dicho lenguaje. Pero, junto a este dato, tal acción ha de ejecutarse no en abstracto, sino que requiere del dato concreto para poder efectuarse, dato concreto que puede ser el signo material o bien la previa construcción plasmada mediante un conjunto de tales signos, estructurados en sistema formal, en sistema de convenciones que los regulen.

Capítulo 3

CONSTRUCTIVISMO FINITISTA. LA IMPREDICATIVIDAD

De la exposición realizada hasta aquí se deriva, con toda claridad, que para Poincaré el método básico del hacer matemático debe centrarse en lo que cabe calificar como constructivismo finitista. Actitud que reforzará en el período calificable como de 'crisis de los fundamentos'. Ante las paradojas conjuntistas y lógicas, Poincaré sostendrá con firmeza los métodos que se derivan de su conceptuación del hacer matemático. Tras un análisis crítico de las causas que producen las antinomias, el matemático francés prescribirá su punto de vista constructivo como vía razonable para evitar dichas antinomias. Poincaré reafirmará aquí su enfoque epistemológico crítico, prescribiendo métodos de definición y demostración e intentando, a la vez, dar la justificación de lo que prescribe, así como las razones que le impulsan al rechazo de otros procesos que, sin embargo, son manejados por otros matemáticos o se encuentran, aparentemente, en varias zonas de las Matemáticas admitidas tanto por los matemáticos puros como por aquellos que las utilizan en su trabajo científico.

Actitud que se refleja, principalmente, ante el infinito, tema central del hacer matemático ya que, sin él, no habría ciencia porque no habría nada de general. Realmente las manifestaciones que de la virtud creadora se han señalado afectan a campos particulares más o menos delimitados con claridad. En lo que sigue, la virtud creadora se va a reflejar en un sentido global, va a constituir el trasfondo, casi siempre implícito, de la actitud del matemático ante su trabajo, ante su hacer matemático. Trasfondo que consiste, esencialmente, en una actitud constructivista finitista, entre otros motivos porque quien construye es un ser finito, limitado.

Ya he señalado cómo Poincaré reitera la existencia de sólo un infinito, el potencial o abierto. Desde su posición extensional el infinito actual se le muestra como una mera forma de hablar, como una extrapolación de lo finito, de tal manera que si se habla de alguna propiedad de ese infinito hay que entender que se habla de alguna propiedad verificable en los terrenos finitos, propiedad que, en este caso, es necesario demostrar. Poincaré reconoce, sin embargo, que a pesar de la insistencia en la afirmación del no existir del infinito matemático, «Cantor ha emprendido la tarea de introducir en matemáticas el infinito actual, es decir, una cantidad que no solamente es susceptible de dejar atrás todos los límites, sino que sea mirada como si los hubiera pasado» *(CM.,* 111). A pesar de lo cual, «Desgraciadamente han llegado a resultados contradictorios» *(íd.,* 112). Se ha alcanzado la situación indicada en las etapas que condujeron a la construcción del continuo, es decir, a una situación de desacuerdo intolerable. De aquí que «todos nos hemos puesto a buscar el remedio. Por mi parte pienso, y no soy el único, que lo importante está en no introducir nunca más seres que los que se puedan definir completamente en un número finito de palabras. Cualquiera que sea el remedio adoptado, nos podemos prometer el placer que un médico experimenta al ser llamado para seguir un interesante caso patológico» *(1908 b,* 38). En el 'todos', comprende Poincaré: *a)* los esfuerzos realizados por los logicistas representados por Peano y Russell; *b)* los iniciados por Zermelo desde un enfoque axiomático como construcción propia de la Teoría de conjuntos, construcción a realizar simultáneamente a la lógica; *c)* los matemáticos franceses representados por Borel, Lebesgue, Baire... que componen la escuela de París, según denominación de los intuicionistas holandeses. Debe observarse que Poincaré no menciona en parte alguna los primeros intentos de Brouwer.

§ 1. Motivación de las antinomias

Para Poincaré la clave de las antinomias cantorianas se centra en el hecho de que encierran un círculo vicioso. Hecho que Russell, adoptando el punto de vista de Poincaré, denominará autorreferencia o impredicatividad. Y es este último término el que, a su vez, adoptará el matemático francés para referirse a esa circularidad motivo de las paradojas. De entre las más conocidas, Poincaré elige la de Richard como modelo y es en ella en la cual observa que la definición que hace aparecer la antinomia es circular, impredicativa. «Así, las definiciones que deben ser consideradas como no predicativas son las que contienen un círculo vicioso» *(1906 a,* 307). Párrafos antes ha declarado: «Pero la misma explicación vale para las otras antinomias, como se puede comprobar fácilmente» *(id.)*. Según el matemático francés, por tanto, las paradojas se producen por el empleo de definiciones impredicativas. Con sus palabras: «Las antinomias a las que ciertos lógicos han llegado provienen de que no han podido evitar ciertos círculos viciosos» *(1909 c,* 30).

Ahora bien, hay que precisar que la circularidad no es, para Poincaré, un accidente en el método utilizado por Cantor y sus seguidores, sino que se muestra esencial e inherente a dicho método, de tal forma que no puede seguirse el mismo sin caer en la impredicatividad. Cantorismo e impredicatividad van de la mano. En otras palabras, quien siga el método cantoriano ha de aceptar la existencia y manejo de las definiciones impredicativas. Por ello, si se pretende superar el círculo vicioso de manera radical es necesario emplear algún método diferente al seguido por Cantor. Este ha invertido el proceso clásico y en lugar de partir de la especie para alcanzar el género —que era el tradicional de definición—, parte del género como actualmente dado para, en él, delimitar la especie y, en ella, el individuo.

Precisamente por esta inversión se presenta el hecho de que, lo acepten o nieguen de modo explícito los partidarios de esta tendencia, los mismos han de aceptar la existencia del infinito actual, y no sólo en su enfoque intensional, sino extensional. Poincaré lo manifiesta con total claridad desde 1906. Al criticar la corriente logicista y los intentos de Russell para superar las paradojas, y ante las reticencias manifestadas por algunos peanianos y por Russell ante ese infinito actual, enfocado como proposición lógica, que pretenden demostrar para, convencidos posteriormente de que esa demostración es imposible, manifestar sus dudas en cuanto a la misma, Poincaré escribe: «Para mí la cuestión no es dudosa: la creencia en el infinito actual es esencial en la logística russelliana. (...) el género es para él anterior a la especie, y el *summus genus* es anterior a todo. Esto no tendría inconveniente si el *summus genus* fuese finito, pero si es infinito, hay que plantar lo infinito antes que lo finito; es decir, considerar al infinito como actual» *(CM.,* 151).

Razonamiento que frente a la solución conjuntista de Zermelo vuelve a repetir, matizando algunos puntos. Cuando Zermelo publica la primera versión axiomática de la teoría de conjuntos como medio para la superación de las paradojas y medio para dar una fundamentación sólida a todas las matemáticas, indica que una cuestión o proposición se encuentra 'definida' si los axiomas y las reglas de la lógica permiten determinar sin ambigüedad si tal cuestión o aserción se verifica. Citado textualmente por Poincaré, las palabras originales de Zermelo eran: «Una cuestión o aserción E se dice *definida* si las relaciones fundamentales del dominio, por medio de los axiomas y la validez universal de las leyes de la lógica, determinan sin ambigüedad si se verifica o no» *(Zermelo 1908 a,* 201). La invocación a la validez universal de las leyes de la lógica, que no se especifican, y la oscuridad del término 'definida', hace que tal cuestión o aserción E quede, realmente, en el aire. Ante la afirmación de Zermelo, Poincaré critica planteando una cuestión E como la siguiente: «Tal elemento de la *Menge* M posee tal relación con *todos los demás* elementos de la misma *Menge,* y ¿convenimos en decir que todos los elementos para los cuales se debe responder *sí* forman una clase K? Para mí, y creo que también para Russell, una cuestión parecida no es predicativa; porque *los demás* elementos de M están en número infinito...» *(1909 c,* 24-5). Sin embargo, Poincaré reconoce que, para Zermelo, «esta cuestión estaría *definida* sin que yo sepa exactamente dónde está la demarcación exacta entre las cuestiones que están definidas y las que no lo están» *(íd.,* 25). Como fundamento para la divergencia de enfoques que, con este motivo, se manifiesta, Poincaré continúa afirmando que para Zermelo «parece que, para saber si un elemento posee la propiedad E respecto a todos los demás elementos de M, basta verificar si la posee respecto a cada uno de ellos. Si la cuestión está definida respecto a cada uno de los mismos, lo estará *ipso facto* respecto a todos esos elementos» *(íd.).* Lo cual significa que, subyacente al enfoque de Zermelo se encuentra el infinito actual porque «Le parece que no puede poseer una *Menge,* sin poseer al mismo tiempo a todos sus elementos» *(íd.).* Cuando tal *Menge* o conjunto sea infinita, entonces ha de poseer todos esos elementos en acto.

La aceptación de este infinito actual plantea —junto a la imposibilidad de recurrir a la intuición sensible, porque es imposible imaginarse el infinito actual en extensión— una serie de cuestiones. Central es, entre ellas, la de si las reglas de la lógica tradicional son o no válidas ante dicho infinito, es decir, si las reglas de la lógica contenidas en las definiciones con sus normas clásicas se mantienen con validez total ante la inversión metódica cantoriana. Es cuestión que, para Poincaré, no se ha resuelto porque ni siquiera se ha planteado de manera coherente, como puede observarse en la condición de 'definida' de Zermelo. Para el matemático francés, en todo caso, la solución es negativa. Es la conclusión obtenida tras el enlace que la impredicatividad muestra con respecto a dicha inversión, con respecto al infinito actual que la misma conlleva. Para Poincaré, las reglas de la lógica tradicional únicamente son válidas para conjuntos finitos o, en todo caso, cuando se enfoca el hacer matemático de manera constructiva, es decir, marchando desde el individuo a la especie y, de ésta, al género. De lo contrario, habrá tipos de definición y clasificación que, de una manera tradicional, se mostraban como rechazables por encerrar un círculo vicioso. Círculo vicioso que impregnará todo el hacer matemático, y que será el responsable de la aparición de las antinomias. Lo que resume Poincaré en las palabras «la creencia en la existencia del infinito actual es la que ha dado origen a esas definiciones no predicativas» *(RMM.,*14, 316; *1906 a)*.

§ 2. Impredicatividad

Poincaré liga entre sí los conceptos de definición, clasificación y ley de correspondencia. Esta se apoya tanto en una doble clasificación —las clases o conjuntos entre los cuales establecer tal correspondencia— como en una definición, la de la característica de la correspondencia. Por otro lado, una definición no es más, como ya se ha indicado, que una clasificación, al caracterizar un elemento y así diferenciarlo de los demás que no verifiquen la propiedad que lo caracteriza. Una clasificación, por su lado, también es una definición, al delimitar la clase de ciertos objetos frente a las clases de otros elementos que no satisfagan una cierta propiedad. Ahora bien, la clasificación es una definición incompleta, por no precisar un objeto único, sino a todos los que queden incluidos en la clase. De aquí que Poincaré, al precisar lo que entiende por impredicatividad, lo realice fundamentalmente para las clasificaciones y las definiciones, por el leve matiz diferente que ambas presentan en cuanto a la completitud determinativa del objeto.

Si la impredicatividad como tema central surge en la literatura del matemático francés, y con ella, en la literatura de fundamentos de la Matemática, a partir de 1906 —al adoptar su punto de vista Russell y convertirlo en la base con la que construir su teoría de los tipos para superar las antinomias—, el matemático francés dedicará al tema varios ensayos completos, los de 1909 *a,* *b* y *c,* precisando aún más si cabe sus ideas en 1912 *a.* A pesar de lo cual, en la literatura sobre el tema se observa que hay, en cuanto a las citas que se refieren a Poincaré, alguna diversidad. Diversidad que se manifiesta en distintas interpretaciones en cuanto al sentido de impredicativo para el matemático francés. Hago notar que la primera de las citas textuales que menciono es la más frecuentemente utilizada, mientras que la de 1912 es la elegida por autores como Church, *1956,* para criticar la posición de Poincaré. Dada esa diversidad, creo necesario citar textualmente, por extenso, aquellos párrafos donde Poincaré pretende caracterizar su concepto de impredicatividad.

1. «El vocablo *todos* tiene un sentido bien claro cuando se trata de un número finito de objetos; para que tenga aún uno cuando los objetos sean en número infinito, sería preciso que hubiera un infinito actual. De otra manera *todos* estos objetos no podrán ser concebidos como planteados antes de su definición, y entonces, *si la definición de una noción N depende de* todos *los objetos A, puede ser tachada de círculo vicioso, si entre los objetos A hay alguno que no se puede definir sin hacer intervenir la noción N misma*» *(1906 a,* 316; *CM.,* 150).

2. «(En Russell, de quien tomo la palabra, una definición de los conceptos A y A' es no predicativa si A entra en la definición de A' y recíprocamente.) Entiendo bajo este término lo siguiente: Cada ley de asociación supone una clasificación determinada. Llamo a una correspondencia predicativa cuando la correspondiente clasificación es predicativa. Y a una clasificación la llamo predicativa cuando no cambia con la introducción de nuevos elementos» *(1909 b,* 122).

3. «Se ha llegado a las antinomias porque se han considerado colecciones que contienen los objetos en la definición de los cuales entra la noción de la colección misma. Se han empleado definiciones no predicativas» *(1909 c,* 14).

4. La definición impredicativa es una definición indirecta, por postulado, «pero el postulado es aquí una relación entre el objeto a definir y *todos* los individuos de un género del cual el objeto a definir se ha supuesto que forma parte él mismo (o bien del cual se suponen que forman parte los seres que no pueden ser definidos ellos mismos más que por el objeto a definir). Es lo que ocurre si ponemos los dos postulados siguientes:

X (objeto a definir) tiene tal relación con *todos* los individuos del género G.

X forma parte de G

o bien los tres postulados siguientes:

X tiene tal relación con *todos* los individuos del género G

Y tiene tal relación con X

Y forma parte de G.

(...) una definición parecida implica un círculo vicioso. No se puede definir X sin conocer todos los individuos del género G, y por consiguiente sin conocer X que es uno de esos individuos» *(1912 a,* 91).

Definición

Las definiciones no predicativas, enfocadas como definición, no responden a los mecanismos de la definición en su sentido tradicional e incluso al ampliado con las implícitas. «Las definiciones no predicativas no pueden ser sustituidas por el término definido» *(CM.,* 150), pero tampoco pueden ser eliminadas como en el caso de las implícitas. De aquí que, realmente, para Poincaré, tales definiciones no lo sean. «Una definición que contiene un círculo vicioso no define nada. De nada sirve el decir (cualquiera que sea el sentido que demos a nuestra definición) que estamos seguros de que por lo menos cero pertenece a la clase de los números inductivos; no se trata de saber si esta clase está vacía, sino si se la puede deslindar rigurosamente. Una clase 'no predicativa' no es una clase vacía, es una clase cuya frontera está indecisa» *(CM.,* 147-8).

Poincaré señala que «lo que caracteriza precisamente una definición, es que permite distinguir el objeto definido de los demás objetos; si se aplica a una infinidad de objetos, no permite discernir unos de otros; no define nada; no es una definición» *(1909 a,* 114). El matemático francés toma como ejemplo el utilizado contra sus ideas por Schönflies, referente a que unos términos como «una función constante», términos que son en número finito, definen una infinidad de objetos, de funciones, infinidad, además, no numerable. Poincaré objeta: cuando se dice 'una función constante', «se tiene una fórmula de un número finito de palabras y que se aplica a una infinidad de funciones» no define nada, sino que lo que auténticamente se tiene es una relación con un cierto número. «Para terminar de definir una de esas funciones, es preciso definir este valor constante» *(1909 a,* 115). No es correcto afirmar que la expresión 'una función constante' define un conjunto de funciones que tiene la potencia del continuo. «Esta fórmula permite definir en un número finito de palabras un conjunto de funciones que tiene la misma potencia que el conjunto de las constantes definibles en un número finito de palabras, y este último, según la demostración de Richard, es numerable» *(íd.)*.

De lo anterior se desprende que una definición se descompone en dos partes. La primera, «común a todos los elementos del conjunto, nos enseñará a distinguirlos de los elementos que son extraños a este conjunto; será la definición del conjunto; la segunda parte nos enseña a distinguir unos de otros los diferentes elementos del conjunto» *(1909 c,* 27). Si se habla de todos los elementos del conjunto, basta la primera parte; pero siempre que la misma pueda completarse. «Si afirmo una proposición respecto a todos los objetos de un conjunto, quiero decir que si un objeto satisface a la primera parte de la definición, la proposición en lo que concierne a este objeto será verdadera, cualquiera que sea la manera en que enunciéis la segunda parte; pero si podéis enunciarla como queráis, es necesario que la enunciéis, sin lo cual el objeto sería impensable y la proposición no tendría sentido alguno» *(1909 b,* 120). En otras palabras, la proposición no sería definición.

De esta forma, la primera parte constituiría la definición del género, la definición de un conjunto, pero no de cada uno de sus elementos individualmente considerados. Cabría interpretarla en el sentido de que la misma constituye la definición de «no un individuo, sino un género entero» *(1912 a,* 89), que puede enfocarse como un objeto único, «y este conjunto es un objeto único» *(1909 b,* 121), como ocurre en el proceso de la definición mediante una relación de equivalencia. A pesar de lo cual no puede admitirse como definición estrictamente legítima salvo si la misma puede completarse mediante la segunda parte y ello de manera constructiva, mediante un número finito de palabras. De lo contrario, se mantendrá que caracteriza una clase de manera ambigua. Que es lo que ocurre, precisamente, con la definición impredicativa: pretende caracterizar una clase mediante sus individuos y éstos mediante la clase de manera simultánea.

Clasificación

Como clasificación Poincaré parte de la paradoja del menor número definible, para poner de manifiesto su mecanismo. «¿Cuál es el menor número que no puede ser definido por una frase de menos de cien palabras francesas? Y ante todo ¿existe ese número?» *(1909 c,* 8). Es antinomia que, como las demás, descansa en un razonamiento vicioso no concluyente; reposa sobre una clasificación de los números naturales en dos categorías, en dos clases: aquella que está compuesta por los números definibles por menos de cien palabras francesas, y aquella que se encuentra constituida por los números definibles por más de cien palabras. Quienes sostienen que esta partición entraña paradoja mantienen que la misma es inmutable, es decir que no se puede modificar en el transcurso del razonamiento, pero «ello no es posible» *(íd.,* 9). Y no lo es porque esta clasificación no puede terminarse hasta que no se haya pasado revista a *todas* las frases de menos de cien palabras, se hayan rechazado las que no tengan sentido y fijado el de las que lo tienen. Entre esas frases, habrá algunas que no tendrán sentido más que una vez se haya terminado la clasificación. Tales frases serán, precisamente, «aquellas donde se trata de la propia clasificación». Por lo que, para Poincaré, «la clasificación de los números no puede ser acabada más que *después* que la selección de frases esté acabada, y esta selección no puede estar acabada más que *después* que la clasificación esté acabada, de suerte que ni la clasificación, ni la selección podrán estar determinadas *nunca*» *(1909 c,* 9; *1909 a,* 116-7).

Tomando como base esta antinomia Poincaré obtiene una nueva caracterización de las clasificaciones, «aplicables a los elementos de colecciones infinitas» *(1909 c,* 10): las clasificaciones *predicativas,* que «no pueden ser trastornadas por la introducción de nuevos elementos» y las clasificaciones *impredicativas* donde «la introducción de nuevos elementos obliga a retocar incesantemente» *(íd.).*

Aquí conviene realizar, sin embargo, una distinción del matemático francés. Es la que permite matizar entre una definición y una clasificación. Aunque ambas se consideren como clasificaciones o como definiciones, la clasificación es una definición incompleta porque caracteriza no ya a un individuo, sino al género en el cual éste se encuentra. Podría ocurrir que no fuera definición alguna, como ocurre en el caso de la definición impredicativa, al no poder caracterizar o completar la segunda parte de la definición. De aquí que Poincaré indique, lo cual es condición importante: «no se debería decir que una clasificación es predicativa de manera absoluta, sino que es predicativa respecto a un modo de definición» *(1909 c,* 12). Es condición importante en el sentido de que una ley de correspondencia se encuentra apoyada en una doble clasificación y para que la misma tenga sentido se ha de imponer que ambas clases sean predicativas —al igual que la propia característica de la ley de correspondencia— por lo cual ambas clases podrán ponerse en correspondencia o no según el tipo de definición que se establezca. Con lo cual, una relación como la equipotencia entre dos conjuntos no será una relación definitiva, sino que lo será según cómo se definan ambos conjuntos y la propia ley para determinar la misma. Así, los números reales no serán equipotentes con los naturales según cierto tipo de correspondencias, pero podrían serlo según otro. Ejemplo extremo el anterior, puesto para indicar el alcance de la salvedad expresada por Poincaré, quien llega a indicar que el establecimiento de la equipotencia entre conjuntos debe indicarse según ley o correspondencia predicativa, a la vez que empleará este argumento para poner de relieve el carácter no conclusivo de los argumentos de Cantor. Se tiene, así, una relatividad en cuanto a los términos conjuntistas, como los de 'numerabilidad', 'continuo', etc. Relatividad conocida posteriormente con el nombre de paradoja de Löwenheim-Skolem en el interior de los sistemas formales. Relatividad apuntada por Poincaré de modo explícito.

Ejemplos

Aunque ya han ido surgiendo algunos en las citas anteriores —como el caso fundamental de 'número inductivo', aquel que pertenece a *toda* clase recurrente, a la cual ya pertenece dicho número inductivo, y que será estudiado posteriormente—, reúno aquí otros ejemplos dados por Poincaré para precisar el alcance de sus palabras en cuanto a las definiciones y clasificaciones no predicativas.

Como definición predicativa Poincaré señala que puede establecerse la de 'número natural mayor que 10', dado que «se puede reconocer si un número es mayor o menor que diez sin tener que examinar las relaciones de ese número con el conjunto de los demás números enteros» *(1909 c,* 10). Análogamente, «si se eligen los puntos del espacio según la magnitud de sus coordenadas, por ejemplo, se clasifican en la misma clase aquellos puntos cuya abscisa es menor que 10, la introducción de nuevos puntos que cumplan la condición no cambian la clase» *(íd.,* 11). Como «toda ley de correspondencia reposa sobre una doble clasificación» *(1909 c,* 14) puede establecerse como correspondencia predicativa la dada por $n \mapsto 2n$ entre los números naturales; igualmente son correspondencias predicativas, las establecidas por Cantor «para demostrar por ejemplo que el número cardinal de los números racionales es igual al de los números enteros, o que el de los puntos del espacio al de los puntos de una recta» *(íd.,* 13).

Como ejemplos impredicativos Poincaré señala el de la clasificación de los puntos del espacio distinguiendo aquellos que pueden ser definidos en un número finito de palabras de aquellos que no pueden serlo. Entre las frases posibles habrá algunas que hagan alusión al espacio o a alguna de sus partes. «Cuando introduzcamos nuevos puntos en el espacio, esas frases cambiarán de sentido, no definirán el mismo punto; o bien perderán toda clase de sentido; o también adquirirán un sentido que antes no tenían. Con lo cual puntos que no eran definibles se volverán susceptibles de ser definidos; otros que lo eran dejarán de serlo» *(1909 c,* 10). Poincaré indicará que debería ser precisado este ejemplo para que tuviera sentido desde un enfoque constructivo. Para ello indica que cabe situar cada punto por la frase de número finito de palabras que lo define, ordenando estas frases. Al introducir un nuevo punto, la frase que lo define deberá incorporarse al cuadro anterior con lo cual el número de orden asociado a cada frase variará. La clasificación así, aunque constructiva, sigue siendo no predicativa.

Análogamente, como correspondencia no predicativa indicará la que se establece entre los números naturales o los enteros y los puntos del espacio definibles en un número finito de palabras. Es la correspondencia establecida en el ejemplo anterior para convertirlo en constructivo.

Más famosas son las acusaciones de circularidad lanzadas por Poincaré a las demostraciones del teorema de Cantor-Bernstein, por utilizar el principio de inducción completa antes de establecerlo *(1906 a,* 27-29) y, sobre todo, a la demostración dada por Zermelo en 1904 del teorema del buen orden. Demostración que se apoya en el postulado de elección y que, para el matemático francés, se encuentra viciada por el empleo de la circularidad o impredicatividad, principalmente en el lema que establece que la unión de todos los conjuntos Γ es un conjunto Γ: «La suma lógica de todos los M_Γ, debe querer decir la suma lógica de todos los M_Γ en la definición de los cuales no figure la noción Γ; y entonces M_Γ formado por Γ y el elemento distinguido de $E-\Gamma$ debe ser excluido» *(1906 a,* 315) [30].

[30] Para la demostración completa del teorema de buena ordenación siguiendo la línea dada por Zermelo en 1904 puede verse J. de Lorenzo, *1972* 109-110.

§ 3. Definir = Construir

La definición impredicativa no define objeto alguno, al dejarlo en la ambigüedad; como clasificación, la misma carece de fronteras nítidas sin saber si uno de sus elementos pertenece o no a tal clase. De aquí que Poincaré se pregunte: «¿Es posible razonar sobre objetos que no pueden ser definidos en un número finito de palabras? ¿Es incluso posible hablar de ellos sabiendo de qué se habla, y pronunciando algo más que palabras vacías? O por el contrario, ¿se los debe considerar como impensables? En cuanto a mí, no dudo en responder que son puros nadas. / Todos los objetos que podamos considerar, o bien estarán definidos por un número finito de palabras, o no estarán más que imperfectamente determinados y quedarán confundidos en una muchedumbre de otros objetos; y no podremos razonar correctamente sobre ellos más que cuando los hayamos distinguido de esos otros objetos con los cuales permanecen confundidos, es decir, más que cuando hayamos llegado a definirlos en un número finito de palabras» *(1909 c,* 26-27; *1909 b,* 120; *1909 a,* 115).

Unicamente a partir de definiciones precisas se tienen demostraciones rigurosas. «Se debe exigir de cada demostración matemática que las definiciones que en ella aparecen sean predicativas, de lo contrario la demostración no será exacta» *(1909 b,* 123). Ahora bien, las definiciones matemáticas no tienen únicamente como objeto el delimitar a unos objetos de otros. La definición matemática tiene por objeto la construcción efectiva de dichos objetos. El conocimiento del género «da únicamente la posibilidad de construirlos a todos [sus objetos], o más bien de construir tantos como se quiera. No existirán más que después que hayan sido construidos, es decir, después de que hayan sido definidos» *(1912 a,* 89). Y ello porque la simple definición de un objeto no implica la existencia del mismo; existencia que es preciso demostrar, es decir, que hay que comprobar que esa definición no implica contradicción alguna ni en sí, ni con los términos ya admitidos. La demostración de existencia debe hacerse bien por el modelo —dando un ejemplo—, bien por inducción completa en el sentido de que la definición no supone contradicción alguna en las etapas sucesivas de las demostraciones. Naturalmente esta demostración es directa. En el caso de las definiciones indirectas, la demostración de existencia se hace bastante más complicada, pero no por ello es menos necesaria. Está claro que si la definición se hace mediante una regla constructiva, directa, entonces la demostración de existencia queda incorporada a la misma. Es lo que ocurre con los métodos recurrentes, creadores, que constituyen por eso mismo la más clara manifestación, primaria, de la virtud creadora del razonamiento matemático. De aquí que el matemático sólo pueda manejar métodos finitos con los cuales construir a cada uno de los objetos que ha de pertenecer al género, al conjunto. Este, a su vez, no se considera como dado de antemano, fijo e inmutable, sino que ha de ir elaborándose a medida que se van obteniendo los elementos que caen bajo él. Como método finito Poincaré prescribirá el de un número finito de palabras. Criterio de falsabilidad, realmente, de claro matiz neopositivista.

La demostración indirecta de existencia

Frente al criterio de que un objeto sólo tiene sentido cuando está definido mediante un número finito de palabras, mediante una regla del tipo de las recurrentes que permite la verificación siempre que se desee, la definición impredicativa, al no poder utilizarse con ella el criterio de eliminación por sustitución ni por eliminación, presenta también un matiz de creadora. Pero esta creación es la de las antinomias *(CM.,* 150). El mecanismo de tal creatividad se apoya, según Poincaré, en el empleo de la reducción al absurdo como método demostrativo. Método válido para clases finitas, pero que no puede ser indiscriminadamente utilizado cuando se manejan las clases infinitas. Método que emplea los principios lógicos de contradicción y de tercero excluido, que no se han estudiado en cuanto a su validez frente al infinito actual. Con lo cual el mecanismo es:

«Se niega la proposición a demostrar y se muestra que se encuentra en contradicción con la existencia del objeto X; y ello no es legítimo más que si se está seguro de esta existencia, y por otra parte, si se sabe que el objeto está determinado enteramente» *(1912 a,* 92). Y en efecto, si X se deduce del género G por la definición, y después se completa el género G agregándole el objeto X y los demás individuos del mismo género que se pueden derivar de él, y se llama G' al género así completado, mientras que se designa por X' al objeto derivado de G' mediante la definición del mismo tipo empleada para obtener X de G, Poincaré indica que es necesario estar seguro de que X y X' son idénticos para poder emplear el tipo indirecto de razonamiento. «Si no fuera así, y negando la proposición a demostrar, se hubiera llegado a dos enunciados contradictorios $\varphi_1(X)=0$, $\varphi_2(X)=0$ ¿cómo se sabría que es el mismo X el que figura en una y en otra? Si X figura en una y X' en la otra, las dos proposiciones se escribirían $\varphi_1(X)=0$, $\varphi_2(X')=0$, y no serían contradictorias en general» *(íd.,* 93).

Esta objeción que Poincaré lanza en nombre de los constructivistas, se fundamenta, en el fondo, en que «el género no se les presenta [a los constructivistas] más que como una colección susceptible de aumentar indefinidamente, a medida que se construyen nuevos individuos, que posean los caracteres convenientes» *(íd.)*. Lo cual indica que Poincaré ha de rechazar, una vez más, el infinito actual y, con él, el empleo de las definiciones no predicativas, porque, si un objeto ha de ser construido, el mismo «no existe más que cuando está pensado, y no podría concebirse un objeto pensado independiente de un sujeto pensante» *(íd.,* 94). Y las definiciones no predicativas obligan a realizar —como claramente muestra el primer ejemplo dado— una infinidad de operaciones sobre la clase en la cual se tiene el objeto a definir.

§ 4. La constructibilidad predicativa. Preceptos

Para evitar la infinidad de operaciones Poincaré prescribe, como método de definición del objeto matemático, el que éste pueda ser construido mediante un número finito de palabras, como ya he indicado. Es decir, mediante un número finito de operaciones condensadas en fórmula única. Simultáneamente, las proposiciones a demostrar en las cuales intervenga el objeto antes caracterizado, también han de encerrar ese proceso constructivo finitista. El enunciado de tal condición lo expresa Poincaré en los términos: «Todo teorema de matemáticas debe poder ser verificado».

Este enunciado es, a su vez, una proposición que contiene el cuantificador universal. De aquí que el matemático francés precise: «Cuando enuncio este teorema, afirmo que todas las verificaciones que intente tendrán éxito; e incluso si una de esas verificaciones exige un trabajo que exceda las fuerzas de un hombre, afirmo que, si varias generaciones, cien si hace falta, deciden dedicarse a esta verificación, lo lograrán también. El teorema no tiene otro sentido, y esto es verdadero también si en su enunciado se habla de números infinitos; pero como las verificaciones sólo pueden realizarse sobre números finitos, se sigue que todo teorema sobre los números infinitos o sobre todo lo que se llama conjuntos infinitos, o cardinales transfinitos u ordinales transfinitos, etc., etc., no puede ser más que una manera abreviada de enunciar proposiciones sobre los números finitos. Si no fuera así, este teorema no será verificable, y si no es verificable, no tendrá sentido» *(1909 c,* 29-30). Términos que vuelve a repetir en *1912 a,* donde pone como ejemplo, incluso, teoremas del tipo «la sucesión de los números primos es ilimitada; la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ es convergente, etc.» *(1912 a,* 85-6). De aquí que toda propiedad de los números infinitos no sea más que «la traducción de una propiedad de los números finitos; es esta última la que podrá ser evidente, mientras que será preciso demostrar la primera comparándola con la última y demostrando que la traducción es exacta» *(1909 c,* 30). Poincaré llega, incluso, a enunciar los preceptos a los que debería someterse el trabajo matemático. Preceptos o reglas cuyo enunciado es:

> «1.º No considerar nunca sino objetos susceptibles de ser definidos en un número finito de palabras;
> 2.º No perder nunca de vista que toda proposición sobre el infinito debe ser la traducción, el enunciado abreviado sobre lo finito;
> 3.º Evitar las clasificaciones y las definiciones no predicativas» *(íd.,* 31).

Como ejemplo de proposición que o bien carece de sentido, o es falsa o al menos no se encuentra demostrada, Poincaré menciona el teorema de Zermelo de que todo conjunto puede ser bien ordenado. La demostración dada por Zermelo de este teorema no es constructiva, es decir, no encierra ley alguna por la cual se pueda encontrar una relación de buen orden sobre un conjunto dado, si éste es infinito. De aquí el rechazo que del mismo hace Poincaré *(1912 a,* 87).

§ 5. Objeciones y réplicas de Poincaré

Poincaré reconoce que a los preceptos anteriores, a la posición subyacente de constructivismo predicativo finitista que supone, se han realizado una serie de objeciones. Las mismas son de tres tipos.

a) Dirigida por Russell indicando que, si bien tiene razón Poincaré al señalar que las antinomias se derivan de un círculo vicioso, no la tiene al ligar tal círculo con el infinito actual. Hay antinomias que también se producen aun manejando clases finitas. Así lo muestra la del menor número de palabras que definen un número. Poincaré, sin embargo, admite que tal impredicatividad se encuentre también entre clases finitas. Y ello porque la misma se liga no ya con el infinito actual, sino con el método de inversión cantoriano de partir del género para llegar al individuo. Si este método se utiliza con clases finitas, la impredicatividad puede surgir, como con las clases infinitas. Sin embargo, con clases finitas, Poincaré reconoce que la impredicatividad puede ser superada convirtiéndose, en este caso, en mero «entretenimiento» *(1909 c,* 30). De aquí que la misma sea fundamental cuando los conjuntos que se manejan son infinitos, en cuyo caso puede caerse en las mismas aun estando advertido. Y se cae si se sigue el méto cantoriano, al cual es inherente la impredicatividad. La misma posee, por consiguiente, un carácter estrictamente matemático y no lógico, como pretende Russell, dado que las antinomias que no son meros juegos, las que se producen en conjuntos infinitos, afectan al hacer matemático con carácter prioritario.

b) La posición de Poincaré puede ser tildada de finitismo dado que por hablador que sea un hombre, no podrá pronunciar en su vida más de un cierto número de palabras, finito: «se deberán excluir por tanto del campo del pensamiento humano los objetos que no pueden ser definidos más que por las frases de más de un millar de palabras, bajo pretexto de que nadie podrá nunca tener la ocasión de ocuparse de ellos. Esta objeción no debe detenernos» *(1909 c,* 29). Y ello, según Poincaré, porque por hablador que sea un hombre siempre se podrá imaginar uno más hablador aún y porque «no podemos limitar de antemano el campo de sus investigaciones; sabemos únicamente que ese campo permanecerá limitado» *(íd.)*. Cabe imaginar, además, un ser pensante, parecido al hombre, aunque algo más hablador, «lo que no podemos concebir por el contrario, aquello de lo que no podemos hablar sin pronunciar palabras carentes de sentido, es un ser pensante que no tuviera nada en común con el hombre y que pudiera pensar frases de una infinidad de palabras en un tiempo finito» *(íd.,* 29) *(1912 a,* 86-7).

c) Dirigida fundamentalmente por los conjuntistas, se divide en dos partes. Por una, que existen teoremas de la matemática clásica en los cuales interviene la impredicatividad y no por ello se han rechazado; por otra, que Cantor ha demostrado que existen transfinitos de distinto orden como lo numerable y lo continuo, y la posición de Poincaré rechazaría la existencia tanto del hacer matemático clásico como la de los cardinales transfinitos, identificándolos en uno solo, lo numerable; ello supone una restricción del hacer matemático que se sostiene es inadmisible.

c_1) De modo efectivo Poincaré reconoce que admite lo numerable, aunque sólo como infinito potencial, hablando respecto del cardinal $\aleph_1$, en los términos: «Por lo que respecta al segundo número transfinito $\aleph_1$, no estoy seguro de que exista. Se llega a él por la consideración del conjunto de los ordinales de la potencia $\aleph_0$; está claro que este conjunto ha de tener mayor potencia. Uno se pregunta si es correcto el poder hablar sin contradicción de su potencia. Un infinito actual no existe» *(1909 b,* 124). Por otro lado, según la primera de las reglas antes establecidas, como las frases de un número finito de palabras son finitas, pueden ser numeradas; de aquí que no habría más que un conjunto numerable. Cantor demostró por el contrario que hay más puntos en la línea que enteros, por lo cual tiene que existir un conjunto de potencia mayor que lo numerable, al menos el continuo. A esta última parte Poincaré responde: «No hay allí más que una falsa apariencia; representar los puntos del espacio por la frase que sirve para definirlos; clasificar esas frases y los puntos correspondientes según las letras que forman esas frases, es construir una clasificación que no es predicativa» *(1909 c,* 28).

Con lo cual, cabe preguntarse por el sentido que cabe atribuir a la demostración de Cantor y si, de tener alguno, el mismo no será modificable. Para Poincaré, la demostración de Cantor tiene el significado siguiente *(1909 a,* 115-6; *1909 b,* 121; *1909 c,* 28; *1912 a,* 89):

«No se puede encontrar, entre los números enteros y los puntos del espacio definibles en un número finito de palabras, una ley de correspondencia que satisfaga a las condiciones siguientes:

1.º Que se enuncie en un número finito de palabras.

2.º Dado un número entero, se puede encontrar un punto del espacio definido sin ambigüedad. Definición compuesta de dos partes: definición del entero y enunciado de la ley de correspondencia, ambos formulados en un número finito de palabras.

3.º Dado un punto del espacio «que supongo definido en un número finito de palabras *(sin prohibirme hacer figurar en esta definición alusiones a la ley de correspondencia misma,* lo que es esencial en la demostración de Cantor) habrá un entero que estará determinado sin ambigüedad por el enunciado de la ley de correspondencia y por la definición del punto» *(1909 c,* 28).

4.º La ley de correspondencia debe ser predicativa.»

En otras palabras, lo único que ha demostrado Cantor es que «es imposible establecer una correspondencia que esté al abrigo de esta clase de perturbación» *(1912 a,* 89), perturbación dada por la clasificación no predicativa. Es decir, Cantor no ha demostrado la existencia de un cardinal transfinito diferente a lo numerable, sino simplemente que no puede establecerse una aplicación biyectiva entre lo numerable y los puntos de una recta según las definiciones hasta ahora establecidas y que sean predicativas. De las premisas y demostración cantorianas no se obtiene existencia alguna de cardinales, existencia que constituye una extrapolación y un error lógico.

c_2) A la objeción de que muchos conceptos y teoremas de la matemática clásica utilizan métodos impredicativos Poincaré responde con cierta ironía. En el fondo, tal argumento le es indiferente. Si utilizan dichos métodos, la conclusión sería que los mismos están mal fundamentados, o los teoremas mal demostrados. En el primer caso, lo conveniente sería reemplazarlos por otros; en el segundo, dar una demostración adecuada. Es lo que contesta a Zermelo en *1909 a* y precisa en *1909 b.* La objeción de Zermelo se centraba en el teorema fundamental del álgebra, en cuya demostración clásica se introduce la impredicatividad. Es ejemplo que merece ser destacado, por ser adoptado como modelo por Hilbert y por indicar, a la vez, cómo puede realizarse una construcción rodeando el problema de la impredicatividad, según Poincaré.

«Quiero demostrar que una ecuación algebraica $F=0$ tiene siempre una raíz; para ello observo que $|F|$ es siempre positivo y tiene por consiguiente un límite inferior o mínimo, que una función continua alcanza siempre un mínimo, y demuestro en fin que $|F|$ no puede tener otro mínimo que cero; concluyo que hay un punto para el cual $|F|=0$». En esta demostración se habla: 1.º Del conjunto E de los valores de $|F|$; 2.º De uno de esos valores, *e,* que es el mínimo; 3.º Del valor correspondiente del mínimo. Zermelo señala que la definición de *e* es no predicativa ya que la noción de E debería ser anterior a la de *e,* cuya definición depende de E, y debería ser posterior a la de *e,* que es un elemento de E. La conclusión de Zermelo es que este tipo de definición está admitido por todos los matemáticos y, por consiguiente, la definición impredicativa no debe ser eliminada del hacer matemático. Poincaré niega la validez tanto de la conclusión de Zermelo como del ejemplo dado. Si las definiciones y demostraciones no predicativas estuvieran en la base de toda la matemática «Ello sería grave; afortunadamente es fácil volver a hacer la demostración sin dejar subsistir en ella la petición de principio» *(1909 a,* 118). Tal redemostración se haría observando el proceso siguiente: Sea x la variable independiente; y un valor de x tal que tanto su parte real como imaginaria sean números racionales. Sea E' el conjunto de los valores que puede tomar la función $|F|$, $|F(y)|$. Sea e el límite inferior o mínimo de los valores del conjunto E'. Se demuestra sucesivamente que hay un valor de x no racional en general tal que $|F(x)| = e$ y $e \neq 0$. «La petición de principio ha desaparecido ya que en la definición de e figura únicamente la noción del conjunto E' y e no forma parte en general de E'» *(1909 a,* 119).

Poincaré extiende su argumento. Afirma, «si consideramos un conjunto E de números reales positivos, por ejemplo, se puede demostrar que este conjunto posee un límite inferior *e;* este límite inferior está definido *después* del conjunto E; y no hay petición de principio ya que *e* no forma parte en general de E. En algunos casos particulares puede ocurrir que *e* forme parte de E. En esos casos particulares, tampoco hay petición de principio ya que *e* no forma parte de E *en virtud de su definición,* sino como consecuencia de una demostración posterior a la vez a la definición de E y a la de *e*» *(íd.)*.

§ 6. Diversidad de lenguas

Creo que la posición de Poincaré es clara en cuanto a su constructivismo y su rechazo de métodos infinitistas e impredicativos, más en cuanto a programa que en cuanto a realización del mismo. Igualmente su incompatibilidad con la inversión cantoriana, seguida por los logicistas y los conjuntistas. A la vez, su reconocimiento de ambas tendencias y de que el fin perseguido en ellas es el mismo que el suyo; superar las antinomias cantorianas y dar un fundamento sólido al hacer matemático. Tendencias que difieren porque «Hay sin duda almas diferentes y esas almas no las podemos cambiar nada» *(1912 a,* 95), ya que puede, según Poincaré, razonarse de dos formas diferentes:

a) Admitir, de entrada, la existencia de conjuntos como totalidades acabadas, independientes del conocimiento que se pueda tener sobre las mismas. Con lo cual, el matemático razonaría utilizando métodos no directos, sino por reducción al absurdo, que es global, existencial o no constructivo. Es lo realizado por Cantor: suponer que pueda establecerse una biyección entre la totalidad de los conjuntos y la totalidad de sus elementos, con lo cual llega a una contradicción y entonces deduce que la biyección establecida es imposible. Aquí se detendría un matemático constructivista. Pero Cantor, no. Y Cantor prosigue: como la biyección no es posible, y se admite la totalidad de conjuntos como constituyendo un nuevo conjunto, entonces existe un cardinal mayor que el de sus elementos. Consecuencia únicamente factible de hacer si se agrega la previa suposición de la existencia de las totalidades, de un mundo de cosas en sí trascendente; de lo contrario, la última consecuencia cantoriana es imposible de obtener.

Naturalmente, a favor de este modo de razonar se encuentra el que entre unos y otros conjuntos no hay diferencia en cuanto a la naturaleza de sus elementos. Así, por ejemplo, y para seguir con la demostración cantoriana, el número real 'supernumerario' que puede elaborarse al 'demostrar' que R posee un cardinal mayor que N no difiere en cuanto a su naturaleza de los restantes números reales, teniendo como ellos una infinidad de cifras decimales. La diferencia entre dicho número supernumerario y los demás estriba por modo exclusivo en la manera de definirlo. Pero, para los que piensan en la previa existencia de totalidades independientes del matemático, la definición no crea el objeto definido, ya que éste preexiste a la misma, limitándose la definición a discernir un objeto de los restantes.

b) Negar, de entrada, la posibilidad de hablar de una totalidad de conjuntos como de algo acabado. Dada una totalidad, se le podrá agregar otra, definida incluso en términos de la totalidad dada, por lo que la nueva será diferente, será una nueva totalidad ampliada. La naturaleza de los conjuntos no puede ser, entonces, extraña al proceso por el cual se definan o construyan. Un conjunto —un género en la terminología de Poincaré— no existe más que en virtud de una ley o principio que permita caracterizar a cada uno de sus elementos de manera unívoca. En el caso de la demostración cantoriana, un número real no es independiente de la sucesión de cifras de elección con la cual está definido, dado que los puntos sucesivos que entran en su definición no son independientes de su regla de construcción. De esta forma, el número real supernumerario aparece como de naturaleza diferente, de un orden superior respecto a los números reales que sirven para definirlo.

Sólo desde esta segunda forma de razonar se encuentra el hacer matemático al abrigo de la impredicatividad. Y ello porque se impide hablar de la totalidad de subconjuntos de un conjunto y, por consiguiente, de la totalidad de elementos como los números reales en el caso de que los mismos se definan como subconjuntos de sucesiones de números racionales.

Poincaré bautiza a aquellos matemáticos que razonan por el primer método con el término 'realistas' y señala su carácter platónico, esencial en la elaboración conjuntista. Frente a ellos, sitúa los del segundo grupo, en el cual se incluye, bautizado con el término *pragmatistas,* no con el de 'intuicionistas'; su rasgo esencial lo constituye el aceptar como propio del hacer matemático el aspecto constructivo, reflejo de la virtud creadora del pensamiento matemático. Es tendencia calificable, por consiguiente, de *antropológica* frente a la *teológica* de los realistas platónicos. Ambas se le muestran como posiciones irreducibles entre sí. Y ello porque quien acepte la realista deberá aceptar el manejo de la impredicatividad en el hacer matemático y, con él, la posibilidad de la aparición de más círculos viciosos; quien desee suprimir tales círculos —no sólo los ya existentes, sino los que puedan producirse en un futuro— no tendrá otra opción que la del constructivismo. Y ambos puntos de vista se muestran irreconciliables porque en este terreno se carece de un criterio de falsabilidad, de verificación para poder decidir entre una u otra postura. Criterio que existía en el hacer propio matemático ya que ante una demostración cabía aceptarla o rechazarla sin ambigüedad alguna. Es lo que no ocurre desde la aparición de la impredicatividad. La ausencia de criterio de contraste hace que este terreno pueda ser calificable, por ello, de filosófico más que de matemático. Ausencia que permite proseguir por tiempo indefinido las discusiones. «Los hombres no se entienden porque no hablan la misma lengua y hay lenguas que no se aprenden» *(1912 a,* 95).

Capítulo 4

ESPECIFICIDAD DEL PENSAMIENTO MATEMATICO

Para Poincaré las distintas teorías que se han creado para dar cuenta del pensamiento matemático no se muestran adecuadas porque ninguna explica satisfactoriamente lo que, para él, constituye el fundamento último del hacer matemático, la virtud creadora del mismo. Las distintas posiciones pueden agruparse en dos bloques: *a)* Reduccionista, en el que se encuentra el Empirismo —pretende dar explicación del hacer matemático a partir de los meros datos de los sentidos, como si fueran primarios y no requirieran, tales datos, previa elaboración—; la Silogística y el Logicismo, que sostienen que el razonamiento matemático puede reducirse a principios considerados como puramente lógicos. *b)* Axiomatizadora y formalista, que pretenden dar cuenta del pensamiento matemático sin reducirlo a principios lógicos por modo exclusivo. Para Poincaré todas estas corrientes han producido, los autores que las sostienen, ideas profundas y en muchos casos acertadas. A pesar de lo cual ninguna le parece radicalmente acertada y ello porque en su base hay un cierto dogmatismo respecto a la posibilidad de dar una solución definitiva al problema de los fundamentos; y para el matemático francés no parece probable que las distintas ideas puedan zanjar sus diferencias y ello porque, según lo ya dicho, la problemática acerca de los fundamentos de la Matemática es problemática filosófica que depende, en su base, de la existencia de almas que hablan lenguas diferentes; depende, en su base, de la existencia de tipos psicológicos diferentes que conllevan ontologías distintas. Ello indica, a la vez, que las soluciones propuestas poseen un grado de relativismo elevado.

Limitado a la Aritmética el razonamiento matemático se manifestaba mediante el principio de inducción completa; en general, en una construcción finitista generalizante mediante procesos predicativos. Anterior al lenguaje, precisa de éste para su expresión, comunicación y fijación; es decir, para alcanzar su plena objetividad. Independiente de la Lógica, salvo para evitar la contradicción interna. Requiere, sin embargo, para poder realizarse, del objeto concreto como asidero; bien del signo material, bien de la imagen intuitiva, sensorial, bien de la previa aceptación de otras construcciones también materializadas por así decir; en otras palabras, requiere de la experiencia tanto en sus manifestaciones más puras como en las más elaboradas, en las cuales intervienen, igualmente, otras elaboraciones previas.

Poincaré, como la mayoría de los matemáticos de su entorno, rompe con la tradición al aceptar que la Matemática —y es un abuso del lenguaje— no maneja 'objetos' como pudieran ser los números y la magnitud, sino que versa acerca de 'relaciones' entre objetos. Tales relaciones dan paso a que, en el fondo, lo que maneje sean símbolos y proposiciones entre esos símbolos, manejo puramente lingüístico como reflejo de su actividad constructiva y apoyatura simultánea para la misma. En dicha actividad, apoyada en la posibilidad de reiteración indefinida, no hay reglas fijadas de una vez para siempre, salvo las que se derivan de tal reiteración, es decir, salvo las constructivistas finitistas, una de cuyas manifestaciones consiste en la deducción una vez que se pretende sistematizar formalmente lo obtenido. Sólo en la Aritmética, en su parte elemental, se presenta como método fijo el proporcionado por las definiciones y demostraciones inductivas. Y ello por ser intuibles de modo directo, al no constituir sino un reflejo de la propia actividad del sujeto matemático.

Los sistemas formales tienen por objeto delimitar con precisión los elementos puestos en juego en esta actividad. Los mismos han de responder a una construcción previamente realizada, pues de lo contrario constituyen meros juegos del espíritu. Si se pretende suprimir su enlace con su génesis, entonces deberá demostrarse que son no contradictorias. Demostración que, para poder realizarse, ha de emplear, nuevamente, el proceso inductivo. Lo cual vendría a indicar que las nuevas lógicas representadas por el logicismo tienen, de Lógica, sólo el nombre, porque son parte del hacer matemático y por tanto caen bajo el fundamento de éste y no pueden ser, por consiguiente, fundamentos de tal hacer, sino una manifestación del mismo a justificar de igual modo que dicho hacer.

El hacer matemático, como actividad antropológica, es específica, irreducible tanto al Empirismo como a la Lógica. Es un hacer que exige, por otra parte, algo más que la mera formalización, aunque ésta muestre su interés como correctivo. Como en los intentos empirista, logicista, axiomático, formalista se pretende justificar el razonamiento matemático por causa extramatemática y la aritmetización del análisis ha hecho descansar toda la Matemática en la Aritmética, bastaría entonces justificar desde los intentos reduccionistas lo que de más característico tenga el razonar matemático, la inducción o recurrencia. De aquí que, en lo que sigue, se centre en muchos momentos el tema en torno a la inducción completa. A su través se irán precisando las ideas de Poincaré en lo que constituye el núcleo de su filosofía de la matemática. Con ello se destacará el alcance de las distintas corrientes, sus limitaciones y las posibles vías de convergencia de las mismas.

Como razonamiento, con su entronque imperativo, el principio de inducción completa se ha visto que posee, como constitutivos esenciales: El número cualquiera, condensar en fórmula única el infinito potencial, reiteración indefinida de la acción 'sucesor', sucesión ordinal como conjunto a ir construyendo mediante la construcción de cada uno de sus elementos. Los cuatro se funden en una unidad sintética posibilitada por la intuición de la facultad del pensamiento humano de poder reiterar una acción de modo indefinido desde que la misma es posible alguna vez.

§ 1. El empirismo

Si el objeto matemático no es la figura o el número, sino la relación entre objetos, el empirismo no es una explicación satisfactoria para fundamentar en ella el hacer matemático. Este, para Poincaré, aunque motivado por la experiencia, no procede de ella de manera directa. Exige del concurso del sujeto, mediante la acción constructiva de su espíritu. Acción que no es mera abstracción pasiva, sino auténtica construcción de conceptos, para lo cual el sujeto ha de reformar, incluso, sus propios cuadros de distribución fisiológicos, para poder convertir así el hecho bruto en hecho empírico. Creo que las ideas de Poincaré, en este terreno, han quedado claras tras la exposición de sus ideas generales en cuanto al hacer científico en general como al exponer su pensamiento respecto a la virtud creadora.

Puede agregarse, sin embargo, y en cuanto al principio de inducción completa en particular, que condensar y, por consiguiente manejar el infinito potencial impide que la inducción completa pueda identificarse con la inducción empírica, y ello de manera esencial. Aunque como procesos van de lo más particular a lo más general y los razonamientos inductivos científico y matemático lleven marchas paralelas utilizando como premisas hipótesis, la experiencia únicamente podrá indicar la validez de una regla, de lo afirmado en una proposición, para un número finito de casos, no muy grande por otro lado. Inducción que, en ese caso, sería la tradicionalmente llamada enumerativa. En este paralelismo se centra una aparente antinomia, por la cual algunos tienden a confundir ambas inducciones: lo dado en la experiencia es finito, limitado; lo puesto por el entendimiento, que también es finito, es el infinito abierto que no puede obtenerse, simplemente, de lo finito, de lo empírico. Por consiguiente, ambas inducciones son una y la misma. Sólo una extrapolación constructiva mental parece justificar esta última construcción. Extrapolación que deberá admitirse como hipótesis y es en la que auténticamente radica la diferencia entre ambos tipos de inducción.

Ello no quiere decir que la experiencia no intervenga en el principio. Lo hace, ya se ha indicado, para que se ponga en marcha la intuición directa que el individuo posee de la posibilidad de repetición y, con ella, del infinito numerable que supone. Es, la experiencia, el catalizador de la toma de conciencia.

Podría argumentarse, al intervenir la experiencia en tal principio, que dicha experiencia, junto a la intuición, bastan para dar cuenta del razonar inductivo matemático. Así, podría decirse: comprobados varios casos particulares se obtiene, por intuición, la formulación general, la regla por la cual pueda decirse «la ley es manifiesta» *(CH.*, 24). Pero ello no es legítimo, dado que el razonamiento por inducción quedaría expuesto, entonces, a una radical inseguridad, como ocurre con la inducción en las ciencias experimentales. Este hecho suele ser difícil de captar: el que no baste 'ver', después de unos cuantos casos particulares; es decir, no baste la verdad de '$f(n)$', ni la comprobación de '$f(n) \wedge f(n+1)$', en número cualquiera, para fundamentar, para asegurar que tal proposición es verdadera. La seguridad de esta última afirmación únicamente viene dada por la demostración y ésta no puede darse más que por inducción completa, que ha de ser empleada en su totalidad, como proceso razonador unitario y no meramente en alguna de sus partes [31].

---

[31] De hecho, únicamente se tendría una recurrencia simple, fuente de errores muy frecuentes. Como ejemplos famosos pueden indicarse: *a)* Sean

Si la analogía en cuanto al proceso generalizador es sorprendente, la diferenciación anterior, también. Pero lo es igualmente la diferencia entre sus fundamentos respectivos y, con ello, entre las seguridades que ofrecen ambas inducciones: total, la obtenida mediante la inducción completa matemática apoyada en una demostración rigurosa; parcial, la obtenida mediante la inducción empírica. La fundamentación de esta última se encuentra en una serie de hipótesis y creencias como la que asegura la existencia de «un orden general del Universo, orden que está fuera de nosotros» *(CH.,* 24). Hipótesis y creencias que, como he indicado, no se nos imponen con total necesidad, ya que la creencia en ese orden y armonía de la naturaleza puede ser errónea. Motivo básico de inseguridad para las ciencias experimentales, motivo que da paso a las distintas teorías justificadoras de la inducción empírica porque ninguna es suficientemente satisfactoria. Por el contrario, la inducción completa matemática se presenta como una posible hipótesis, pero obtenida como una manifestación de la potencia del espíritu mismo, por lo que afinca su rigor, su seguridad en ese espíritu.

A pesar de los distintos fundamentos, hay que resaltar las analogías entre las dos inducciones como procesos razonadores que conducen de lo particular a lo general, como procesos generalizadores, fecundos por no ser procesos analíticos, meramente tautológicos. Analogía que no significa, en ningún caso, identidad ni siquiera parcial.

§ 2. La silogística

Se ha podido observar que el matemático francés reconoce la existencia de unos procesos demostrativos —calculatorios, cons-

---

los números de la forma $2^2 + 1$; para $n=0, 1, 2, 3, 4$, los números obtenidos son 3, 5, 17, 257, 65537 respectivamente, que son todos ellos primos absolutos; Fermat conjeturó que todos los números de esta forma son primos absolutos. Pero Euler encontró que $2^{2^5}+1=4294967297$ es compuesto e igual a 641.6700417; *b)* Para todo natural *n*, el número n^3-n es divisible por 3; n^5-n es divisible por 5; n^7-n es divisible por 7; Leibniz aseguró que n^k-n es divisible por k. El propio Leibniz descubriría posteriormente que n^9-n no es divisible por 9, ya que $2^9-2=510$ no lo es.

A pesar de fallos como los anteriores el papel heurístico e inventivo es, sin embargo, indudable. *Polya, 1954,* se basa en este tipo de hipótesis plausibles para dar cuenta de su teoría acerca del razonamiento matemático.

tructivos— a los que califica de analíticos y tautológicos. El término 'analítico' empleado en el sentido de división en constituyentes y, simultáneamente, en el de reemplazar y sustituir magnitudes por otras equivalentes apoyándose para ello en criterios de igualdad, de aquí el ser tautológicos, por reducirse a formas del principio de identidad. En cuanto al contenido proposicional, estos razonamientos son estériles dado que se limitan a transformaciones reguladas por convenciones, por lo que se limitan a transportar a la conclusión lo ya puesto en las proposiciones de partida —al no ser las conclusiones más que partes de éstas—, o bien se reducen a identidades mediante el análisis de sus constituyentes.

Poincaré utiliza, junto a los términos 'analítico' y 'tautológico' el de 'deducción'. Opone el proceso deductivo al inductivo. La síntesis inductiva consistía en reunir en proposición única, más general, proposiciones más particulares e incluso de naturaleza distinta. Así, una ley es una proposición construida mediante un proceso sintético a partir de proposiciones de carácter experimental. Tal ley no sólo es una proposición más general, sino que en su construcción pierde el carácter de falsable, de experimental: una ley no es comprobable por la experiencia, sino que de ella se podrán obtener proposiciones que podrán serlo. Esta obtención de proposiciones experimentales, de proposiciones más particulares, a partir de la proposición que enuncia la ley o proposición general, constituye el proceso deductivo en el aspecto que hoy se calificaría de semántico. En él también hay análisis, división o separación. Y quizá el término 'análisis' tenga su atribución más apropiada al proceso deductivo que al calculatorio. En cualquier caso, el proceso deductivo lo es referido al conocimiento, no a las reglas con las cuales se efectúa tal deducción. Reglas formales a las cuales, sin embargo, se califica igualmente de deductivas. Modelo y ejemplo de las mismas, el silogismo, tanto el 'categórico' o clásico como el hipotético. En esta atribución Poincaré sigue la tradición filosófica al considerar el silogismo como un razonamiento que de premisas universales obtiene conclusiones particulares, y ello en virtud y gracia, exclusivamente, del principio de identidad y sus corolarios. De esta forma, el silogismo, como regla lógica deductiva, queda inmerso en la misma acusación de esterilidad que los razonamientos considerados por Poincaré como tautológicos. «El razonamiento silogístico se mantiene incapaz de agregar nada a los datos que se le dieron; esos datos se reducen a algunos axiomas y no debería encontrarse otra cosa en las conclusiones» *(1894,* 10). La acusación contra el silogismo se apoya en ser deductivo, es decir, particularizador. Particularización, dado que la conclusión, aunque pueda venir enunciada universalmente, se encuentra ya contenida en las premisas. Acusación desde un enfoque no formal, sino material. Al observar que el principio de inducción completa obtiene una conclusión universal, Poincaré concluye de modo inmediato que tal razonamiento, desde este enfoque, no puede ser deductivo sino inductivo, mostrándose diferente, por ello, al silogismo.

Las palabras anteriores hacen referencia a la especificidad del razonamiento por inducción completa respecto al silogismo deductivo en cuanto procesos no formales, sino materiales, del razonar. Es el argumento más citado como propio del matemático francés: el silogismo es estéril porque el contenido de la conclusión se encuentra ya en las premisas de partida, que han de ser más generales que dicha conclusión. Pero éste no es el único argumento elaborado por Poincaré ni, por decirlo de alguna manera, el más original y potente. Se observan, además, los siguientes:

1. La inducción completa formulada en (1) (p. 75) no puede reducirse a un sorites ni justificarse mediante el mismo. Limitados a un número finito n la inducción completa parecería justificable mediante un esquema como el dado por (3) (p. 79). Pero ello no sería una conclusión correcta, porque en este caso, al haberse limitado la inducción a un número finito n, no se tiene una auténtica inducción, válida para todos los números, sino simplemente una verificación, útil sin duda, para los n primeros números. «Si en lugar de demostrar que nuestro teorema es válido para todos los números, queremos únicamente hacer ver que es cierto para el número 6, por ejemplo, nos bastará establecer los primeros cinco silogismos de nuestra cascada...» *(1894,* 21), bien entendido que son silogismos hipotéticos y no categóricos. Pero este sorites, que es el elaborado en (3) (p. 79), se justifica él mismo por un razonamiento por inducción completa si en lugar del número particular 6 se pretende la demostración para un n cualquiera.

Para aclarar este hecho puede escribirse el sorites justificador en la forma siguiente: 'p_6'='Para el número natural 6 hay un sorites de seis premisas, las numeradas en (3) por 1, 2, 3, 4, 5 y 6, que permiten obtener la conclusión numerada en (3) por 7.' Si se desea generalizar, entonces se tendría el enunciado: 'q'='Para un número natural k cualquiera existe un sorites de k premisas, 1, 2..., k que permiten obtener la conclusión enunciada en la proposición numerada por k+1'. Ahora bien, para establecer este sorites justificador de la inducción completa se necesita aplicar un razonamiento por inducción completa, en el que habría que demostrar la proposición '$q \Longrightarrow q'$', para concluir con 'p_6' —o con 'p_1'— que el sorites justifica *todo* razonamiento por inducción completa, siendo 'q'' la proposición en la que se establece el sorites para el sucesor de 'k', en 'q'. La inducción completa, por consiguiente, no puede ser justificada por un sorites, salvo petición de principio, sino que es el propio sorites el que se justifica mediante la inducción completa.

Este argumento —que desarrolla el esbozo apuntado por Poincaré en *1894*— por el cual se demuestra que la inducción completa no puede justificarse por las reglas de la silogística, de la lógica tradicional, suministra, a la vez, el primer ejemplo de cómo la inducción completa es el razonamiento clave para lo que se puede calificar de metalógica. La justificación de las reglas de deducción se va a fundamentar, precisamente, en la inducción completa y no, como lo pretenden los logicistas, la inducción completa en la lógica.

2. Por otro lado, la clave no se encuentra en el paso de un silogismo a otro, en la verificación particular de la corrección de la línea *k* a la *k+1,* a la cual se reduciría todo el proceso de inducción completa si pudiera quedar justificado por un sorites. La clave no se encuentra en tal verificación, sino en la unidad global del proceso que conduce a una conclusión que afirma que la propiedad es válida para todos los naturales, a la vez. En el sorites, iríamos afirmando la validez de la proposición para cada uno de los naturales, pero ese sorites no permite la conclusión de la validez universal, entre otras cosas porque la sucesión dada es infinita y, por consiguiente, impide dicha comprobación.

Conclusión de los argumentos anteriores [32] es, pues, que la inducción completa constituye un proceso irreducible al silogismo en cuanto a la forma; como lo era en cuanto al contenido, en cuanto a la materia, la conclusión que Poincaré obtiene es que el

[32] Comparar con Beth, *1955,* 16. Beth atribuye a Poincaré el descubrimiento de la irreducibilidad de la inducción completa al sorites, pero olvida hacer la misma atribución al argumento 2 anterior que él menciona. Ver, igualmente, *Et. d'épistémologie gén.,* XI, 51.

razonamiento matemático posee una especificidad irreducible a la silogística. En todo caso, es dicho razonamiento matemático el que permitiría justificar al silogístico. Sin embargo, Poincaré todavía señala un argumento más, un argumento que sostiene que la inducción completa posee una estructura más compleja que el silogismo, que cualquier otra regla deductiva formal —regla que, básicamente, es la del *modus ponens.*

Teoría de clases finitas: simplicidad estructural del silogismo

Poincaré considera que «la lógica de Aristóteles era ante todo la lógica de clases y tomaba como punto de partida la relación de sujeto a predicado» *(1905,* 832) *(CM.,* 124). Pero una lógica de clases parcial, además, ya que «la teoría del silogismo no es aún más que la sintaxis de la conjunción *si* y tal vez de la negación» *(íd.),* a la vez que lo es de clases en su versión extensional. En otras palabras, «*La lógica formal no es más que el estudio de las propiedades comunes a toda clasificación; ella nos enseña que dos soldados que forman parte del mismo regimiento, pertenecen por tal razón a la misma brigada, y por consiguiente a la misma división;* a esto se reduce toda la teoría del silogismo» *(1909 c,* 7-8) [33].

Ahora bien, para ser una teoría consecuente de clases, han de imponerse ciertas condiciones, muy restrictivas, para su aplicabilidad. «Las reglas de la lógica formal expresan simplemente las propiedades de todas las clasificaciones posibles. Pero para que sean aplicables es preciso que estas clasificaciones sean inmutables y no tengan que modificarse en el curso del razonamiento. Si sólo se ha de clasificar un número finito de objetos, es fácil conservar sus clasificaciones sin cambio» *(1906 a,* 316). En otras palabras, para que las reglas de la lógica formal, la teoría restringida de clases, sea posible la clasificación adoptada ha de ser *inmutable (1909 c,* 8). Y ello sólo es posible manejando clases finitas y procesos predicativos, porque de lo contrario, al agregar un nuevo elemento a la clase, ésta puede variar y, con tal variación, cambiar la clasificación; si no se tiene en cuenta tal variación puede caerse en las antinomias. La lógica formal, por tanto, ha de quedar confinada al manejo de lo finito; cualquier extrapolación o salida de estos límites puede provocar la aparición de paradojas

[33] Subrayados míos.

como las surgidas en la teoría intuitiva de conjuntos. Las reglas lógicas, para poder generalizarlas, requieren un previo estudio porque no pueden mostrarse válidas ante clases infinitas.

La simplicidad estructural del silogismo va a deberse, por ello, a un enfoque puramente extensional de las clases, enfoque que Poincaré atribuye como propio de Aristóteles. Como las clases quedan confinadas a extensiones finitas y el razonamiento matemático maneja el infinito, aunque sea en su versión potencial, es claro que este razonamiento ha de tener una estructuración formal más poderosa, más complicada, que los procesos limitados a las clases finitas.

Las palabras respecto a la sintaxis del condicional 'si... entonces...' y de la negación son claras para la lógica de clases. Aunque se limite a palabras como las anteriores, las mismas permiten asegurar que, para Poincaré, cada proposición de la forma '$p \Longrightarrow q$' da paso a la expresión equivalente entre clases '$P \subset Q$'. El silogismo quedaría entonces, expresado tanto para implicaciones como para inclusión de clases

$$\frac{\begin{array}{c} p \Longrightarrow q \\ q \Longrightarrow r \end{array}}{p \Longrightarrow r} \qquad\qquad \frac{\begin{array}{c} P \subset Q \\ Q \subset R \end{array}}{P \subset R}$$

Por otro lado, si '$P \subset Q$', ello quiere decir que existe la clase complementaria 'P'' de 'P' en 'Q', tal que '$P \cap P' = \varnothing$' y '$P' \subset Q$'. Pero, en este caso, también se verifica '$p' \Longrightarrow q$'. Con lo cual se tiene, simultáneamente, '$p' \Longrightarrow q$' y '$p' \Longrightarrow q$', pero 'p' y 'p'' por responder a una clase y su complementaria, son contrarias entre sí, no verificándose '$p \Longrightarrow p'$', ni tampoco '$p' \Longrightarrow p$'; es decir, que se tiene '$-(p \Longleftrightarrow p')$'.

Lo que se afirma en el condicional '$p \Longrightarrow q$' será entonces '$P \subset Q$' y, a la vez, '$P' \subset Q$'. El enlace de '$p \Longrightarrow q \wedge q \Longrightarrow r$' mostrará su equivalente en inclusiones '$P \subset Q \wedge Q \subset R$'. La conclusión, respectivamente, '$p \Longrightarrow r$' y '$P \subset R$'. Con ello la estructura del silogismo se muestra, realmente, trivial. No responde a otra cosa que a una transitividad de la relación de inclusión. Es, por consiguiente, un razonamiento que se refiere exclusivamente a un mero encajamiento de clases y, por consiguiente, a un razonamiento de la parte al todo. Donde esa parte, para estar plenamente caracterizada, puede requerir de la ayuda de la complementación, es decir, de la negación.

La estructura del razonamiento por inducción completa se muestra no tan trivial. Desde luego supone la transitividad, la de que la propiedad 'f' si se verifica para 'k' tiene que verificarse para '$k'=k+1$', para el sucesor de 'k'. Este hecho viene reflejado en la premisa 2 de la formulación del principio. La transitividad de la propiedad 'f' o de la relación de inclusión entre clases viene dada por la sintaxis del 'si... entonces...', del condicional, que expresa la misma por modo exclusivo, precisamente. Pero si el silogismo se limita a la transitividad de la inclusión entre clases, dado que '$-(p \Leftrightarrow p')$', se puede observar que la inducción completa agrega algo más. Agrega el referirse, en cada momento, a la relación de elemento a todo, en el sentido de que 'k' es un número cualquiera enfocado como objeto individual y no solamente como una colección de unidades, objeto individual pero miembro de una sucesión bien ordenada. Además, y ello es diferencia esencial respecto a la estructuración de clases: «Cuando se ha terminado el *n*-simo silogismo, se ve que se puede hacer otro, y es el *n+1*-simo; así, el número *n* sirve para contar una serie de operaciones sucesivas, es un número que puede ser obtenido por adiciones sucesivas; es, pues, un número desde el cual podemos remontarnos a la unidad por *sustracciones sucesivas*» (*CM.*, 132). En otras palabras, un número cualquiera 'k' determina a su sucesor 'k'', pero también éste 'k'' condiciona a 'k'. Referido a condicional, cabe indicar, respectivamente, '$p \Rightarrow p'$' y '$p' \Rightarrow p$' —para mantener la notación del párrafo anterior—, porque el operador sucesor define su simétrico, el operador 'antecesor', de manera única y no ambigua, y en ambos casos la determinación recíproca se hace mediante los operadores. A pesar de lo cual no hay igualdad entre ambas determinaciones, sino equivalencia, '$p \Leftrightarrow p'$'. Equivalencia que indica la simetría de la determinación de cada elemento y su sucesor (o antecesor) para el cual debe verificarse la propiedad 'f'.

Se tiene así que mientras el encajamiento de clases, la relación de parte a todo dada por la inclusión no es más que una relación de orden —en la cual la implicación revelará la propiedad de transitividad de la misma, mientras que la complementación o negación dará paso a la antisimetría—, la inducción completa exige tal relación de orden —por la obligada transitividad de 'f'— y, a la vez, por la equivalencia entre las determinaciones de sucesor y antecesor, de los operadores recíprocos, muestra una propiedad de simetría y, con ello, de equivalencia. Naturalmente, una relación de equivalencia y una de orden son, entre sí, irreducibles, por ser incompatibles la simetría y la antisimetría como caracterizadoras de la misma relación, por lo cual dar una de ellas solamente no puede caracterizar a la otra, sino excluirla. De aquí que la estructuración formal de la inducción completa —que condensa ambas relaciones— sea más compleja que la del encajamiento de clases —que sólo muestra una de dichas relaciones—. La inducción completa, por tener una estructura mucho más compleja no puede ser reducida a las reglas formales del *modus ponens* o de sustitución, que no pueden compatibilizar estructuras con dos relaciones simultáneamente: las de encajamiento de clases o mera seriación junto a las de equivalencia [34].

Por otro lado, la compatibilidad de ambas relaciones sólo es factible desde un plano constructivo que las sintetice en una unidad sintética operatoria posterior. Enfoque de carácter más genético que formal, propio del razonar de Poincaré. Enfoque que justifica el hecho de que reduzca la validez de las reglas formales a las clases finitas. Sólo en ellas la negación permitirá justificar la no contradicción, por ejemplo. Sólo en ellas, porque pueden estructurarse de manera inmutable. Lo que no ocurre con las clases infinitas, aceptables mediante una construcción de sus elementos. Construcción que, realizada, puede conducir a cambiar la clasificación previamente aceptada. Las reglas lógicas, por ello, serían impotentes. El manejo del infinito sólo es factible mediante procesos estrictamente matemáticos de los cuales la inducción completa es el más simple.

§ 3. Las 'nuevas lógicas'

Poincaré incluye, bajo este epígrafe, tanto la tendencia formalista como la logicista. Representantes de ambas, Hilbert y Peano, Russell y Couturat, respectivamente. Debo observar que la obra de Gottlob Frege era realmente desconocida, aunque fuera citada por Russell, en los medios franceses. Desconocimiento generalizado y no únicamente de Poincaré. Sin embargo, para éste la obra de fundamentos de Dedekind parece quedar en el mismo plano que la de Frege, según se desprende de lo que he citado en Capítulo 2, § 8.

---

[34] Comparar con Piaget, *1950* y *1972*.

Aunque critique en unión a las dos tendencias, Poincaré muestra una decidida simpatía por la corriente hilbertiana, formalista. Representa, para él, una muy clara corriente matemática, más que filosófica, que marcha en paralelo con sus ideas. En el fondo, ambos prescriben y rechazan o aceptan, con respeto hacia aquellos que construyen la matemática, adoptando un enfoque epistemológico crítico en general. Frente a ellos, los logicistas parecen aceptar la Matemática ya elaborada y pretenden dar una justificación de la misma; si su explicación no es satisfactoria, o no se adapta de modo completo al edificio existente, no suprimen aquellas partes de la Matemática que no encajan en su teoría o la intentan reconstruir desde su especial enfoque, sino que abandonan dicha teoría —caso de Frege, prácticamente el de Dedekind—, o la reforman para adaptarla a dicha Matemática [35]. Son enfoques que muestran, en la base, ontologías distintas. Será el punto señalado por Poincaré al hablar de la diversidad de lenguas.

A pesar de esta diferencia Poincaré admite que tanto Peano como Russell e Hilbert han hecho y dicho cuestiones importantes y que permanecerán para siempre. «Han escrito libros llenos de puntos de vistas originales, profundos y, a menudo, muy justos, libros que contienen materia suficiente para la reflexión y en los cuales tenemos mucho que aprender. Pero de ahí a decir que han zanjado definitivamente el debate entre Kant y Leibniz y destruido la teoría kantiana de las Matemáticas es exagerar. Yo no sé si realmente han creído haberlo hecho, pero si lo han creído, se han equivocado» *(CM.,* 136).

Aunque haya englobado la crítica a las ideas de ambos autores bajo un mismo epígrafe, las mismas pueden ser separadas, hecho que ya reconoció el propio Poincaré en *1906 a,* al decir, «hoy Hilbert está excomulgado, y Couturat no lo mira ya como logístico» *(CM.,* 141).

a) *El logicismo*

1. *Inversión conceptual y metodológica*

Para Poincaré, según he indicado, la Lógica tradicional manejaba las clases y sus reglas se reducían, realmente, a la sintaxis del

[35] Comparar con Benacerraf-Putnam, *1964. Intr.,* escrita por ambos autores.

'si... entonces...' —transitividad de propiedades— y del operador 'no', instrumento válido para caracterizar cada una de las partes mediante el empleo del complementario y, con ello, poder manejar tanto la no-contradicción como el tercero excluido. Clases finitas, por estar enfocadas en extensión y no por modo exclusivo en comprehensión.

Frente a la lógica tradicional, las 'nuevas lógicas' suponen una inversión conceptual y metodológica radical. En esta inversión los lógicos y matemáticos que las elaboran enfocan la inducción completa —y, fundamentalmente, los mecanismos de inducción o recurrencia— no ya como un proceso de razonamiento, sino como una simple definición unos, como una proposición aritmética más los otros. Uno de los máximos representantes de esta tendencia es, para el matemático francés, Peano, pero su portavoz polémico será Bertrand Russell a quien calificará en alguna ocasión de 'filósofo', no de matemático y al cual, naturalmente, se opondrá en defensa de los razonamientos propios del hacer matemático al igual que a Couturat, portavoz francés del logicismo. En esta categoría opositoria conviene resumir lo que las 'nuevas lógicas' suponen, desde el punto de vista de Poincaré, resumen breve y a veces cargado de ironía porque los aportes parecen serlo.

Los trazos más salientes de estas nuevas lógicas, de la inversión y ampliación que entrañan respecto a la clásica o tradicional, pueden esquematizarse en los puntos siguientes:

1. Suponen una indudable ampliación al agregar los operadores 'conjunción' y 'disjunción'. Los signos que representan ambos operadores «siguen las mismas leyes que los dos signos 'x' y '+', es decir, las leyes asociativas, conmutativas y distributivas» *(CM.,* 125). Lo cual es muy interesante, apostillará irónicamente el matemático francés.

2. Comienzan por el Cálculo proposicional en lugar de hacerlo por el de clases. En la inversión, el silogismo clásico, el categórico, se reduce al hipotético, y «esto, a mi modo de ver, es una de las más felices ideas, porque el silogismo clásico es fácil de traer al silogismo hipotético, mientras que la transformación inversa no se hace sin dificultad» *(CM.,* 124). Naturalmente, ello implica el manejo de la implicación material, con sus secuelas paradójicas. Poincaré apostilla: «B. Russell llega a esta conclusión: que una proposición falsa cualquiera implica las demás proposiciones verdaderas o falsas. Couturat dice que esta conclusión primero pare-

cerá paradójica. Basta, sin embargo, haber corregido una mala tesis de matemáticas para reconocer cuán justo ha visto Russell. El candidato se toma con frecuencia demasiado trabajo para encontrar la primera ecuación falsa, pero en cuanto la ha obtenido, no es más que un juego ir acumulando los resultados más sorprendentes, entre los cuales algunos pueden ser exactos» *(CM.,* 125).

3. Rasgo esencial: Las nuevas lógicas trabajan desde el enfoque de la comprehensión, no de la extensión, lo cual «es una innovación muy importante» *(1905,* 832). Innovación que permite el trabajo con clases infinitas y, con ellas, de la cuantificación. Esta última era conocida por Aristóteles, pero únicamente referida a clases finitas; en las nuevas lógicas tal cuantificación se refiere a conjunciones y disjunciones infinitas *(íd.,* 827-28). Es decir, Poincaré interpreta el cuantificador universal como la conjunción infinita de todos los elementos de la clase y, dualmente, el cuantificador existencial. Naturalmente, esta inversión conlleva una serie de peligros: extrapolar, en primer lugar, las reglas de la lógica clásica, válidas para dominios finitos, al manejo de las clases infinitas, para las cuales no han sido elaboradas; extrapolación en la cual se encuentra la raíz de alguna de las paradojas surgidas en la teoría de conjuntos y en las nuevas lógicas. En segundo lugar, considerar a las clases infinitas como actualmente dadas, enfocándolas entonces en extensión, en paso de intensión a comprehensión que es sintético y, por consiguiente, no lógico. En este paso del infinito en comprehensión al infinito en extensión, sintético *(1905,* 832), y por consiguiente constructivo, se ha de admitir el infinito actual, causa fundamental de las antinomias.

Si los trazos anteriores son los rasgos aparentemente más llamativos de las nuevas lógicas no puede olvidarse la motivación que ha conducido a su creación. No es otra que la de superar los fallos que la intuición —tanto sensible como intelectual— y el sentido común utilizado en las demostraciones han provocado en la construcción matemática. Es el proceso que ha conducido durante el siglo XIX a la denominada 'aritmetización del análisis'. Su prolongación es la que explica no sólo la inversión realizada sino las consecuencias a que han llegado los creadores de la nueva disciplina y que constituyen, realmente, el programa logicista. Tales consecuencias se escinden, esencialmente, en dos: *a)* Reducir todos los conceptos de la Matemática a conceptos lógicos; así, en particular, el número natural deberá ser definido en términos estrictamente lógicos, suprimiendo cualquier llamada a la intuición que pueda mostrarlo —como el mismo Couturat había llegado a sostener, siguiendo en sus primeros trabajos la línea kantiana— o construirlo mediante un proceso específico; *b)* Reducir todas las proposiciones de la Matemática a proposiciones lógicas, a partir de unas primeras identidades lógicas y con el sólo auxilio de reglas lógicas previamente explicitadas, desterrando de las demostraciones cualquier llamada a la intuición.

Para lograr estos dos objetivos se ha hecho preciso ampliar el sentido tradicional de lógica, por un lado; por otro, utilizar como auxiliares una notación simbólica nueva y un proceso axiomatizador como instrumento demostrativo. Con ello han pretendido demostrar «que las matemáticas son reducibles a la lógica y que la intuición no desempeña papel alguno» *(CM.,* 113).

2. *Primeras críticas*

Aparece claro que esta inversión, tanto conceptual como metodológica, recibe la crítica total de Poincaré, así como los fines extralógicos que subyacen a la misma. Tal crítica la resumo en los puntos siguientes:

1. *A la inversión metodológica.*—No es genética ni histórica, ya que no es así como ha procedido el matemático en la elaboración de su trabajo; tampoco permite ver el enlace con los problemas reales que le han dado ocasión para construirla *(1900,* 25 ss.; *1904 b,* 148; *CM.,* 112). Tampoco es pedagógica, como en el caso de partir del cardinal transfinito y, después de muchos desarrollos, hacer ver una pequeña parcela, la de los cardinales finitos que, por otro lado, ya maneja *(1904 a)*. Ni es psicológica, ya que el individuo parte de lo finito precisamente porque es finito para alcanzar el infinito *(CM.,* 122; *1909 c,* 31).

Pero la crítica central que Poincaré dirige a esta inversión metodológica es la de no ser constructiva. Las nuevas lógicas, «en lugar de elevarse a lo general edificando construcciones cada vez más complicadas y de definir por construcción, parte(n) del *genus supremus,* y no define(n) como lo hubieran hecho los escolásticos *per genus proximum et diferentiam specificam*» *(1908 b,* 37). Con lo cual, al situarse en el plano de la comprensión se suponen dadas las clases infinitas y sus objetos como ya distintos, mientras que desde el punto de vista de la extensión hay que ir agregando a las clases nuevos objetos, construidos mediante un proceso determinado, único que permite alcanzar de manera definitiva tal infinito *(1912 a)*. Esta diferencia se aplica a los métodos meramente existenciales de las nuevas lógicas, frente a los métodos constructivos del hacer matemático.

2. *A la reducción conceptual: las definiciones de número natural.*—Limitado a la Aritmética ya he insistido que el número natural, para Poincaré, es el único objeto natural del pensamiento matemático y no puede ser definido sino construido mediante un proceso constructivo, sintético y, por tanto, constructivo, apoyado en la intuición, calificada de intuición del número natural puro. Este hecho hace que considere los intentos de definición del número natural como condenados, de antemano, al fracaso. Y ello porque el número natural, por ligado a la virtud creadora de manera primaria, como primera manifestación de la capacidad reiterativa del espíritu humano, ha de estar presupuesto en todo razonamiento que se haga bien sobre combinaciones de tales números, bien sobre cualquier otra cuestión. Por ello cualquier definición del número que pretenda darse conllevará, de modo ineludible, una petición de principio o círculo vicioso. A pesar de lo cual Poincaré reconoce como hecho que se pretende definir el número de manera constante, que se pretende siempre responder a la pregunta ¿Qué es el número? «Las definiciones del número son muy diversas y numerosas; renuncio incluso a enumerar el nombre de sus autores. No nos debe sorprender que haya tantas. Si una de ellas fuera satisfactoria, no se enunciaría ninguna nueva» *(CM.,* 120). Y si cada filósofo que se ha encarado con el tema se ha visto obligado a dar una nueva, personal, es porque «creía entrever una petición de principio» *(íd.)* en las demás. La falta de acuerdo indica, pues, la falta de un análisis adecuado de esta noción. La solución a ello se encuentra en que tal análisis es imposible por ser el número natural un indefinible de modo tradicional o incluso de manera implícita, dado que ha de construirse sintéticamente mediante la inducción.

Debo consignar que en la crítica de Poincaré encuentro una cierta confusión de atribuciones. Achaca a las nuevas lógicas, en general, el empleo de las definiciones implícitas o por postulados. Sin embargo, tal empleo es propio del formalismo. Precisamente

Russell hará explícito su diferente enfoque respecto al método axiomático de Peano para la Aritmética indicando que una definición implícita constituye un análisis insuficiente que debe ser proseguido hasta el final, hasta la total reducción de los conceptos indefinidos que en él quedan mediante sus definiciones explícitas en términos estrictamente lógicos. Los términos indefinidos que aparecen en el sistema de Peano —sucesor, cero, número— han de ser definidos (Russell, 1903, §§ 120-124). Esta confusión respecto a la definición implícita —que Poincaré admite, sin embargo, si se cumplen determinadas condiciones— conduce al matemático francés a realizar parte de su crítica a las nuevas lógicas en un terreno que no afecta para nada al logicismo.

Sin embargo, también tiene argumentos Poincaré frente a la definición logicista de número natural. Observa que, realmente, suponen conocido el mismo a la vez que dan dos definiciones de dicho número. Dirigiéndose a Couturat señalará: «Es imposible dar una definición sin enunciar una frase y difícil enunciar una frase sin poner un nombre de número, o al menos la palabra varios, o al menos un nombre en plural» *(CM.*, 120). En algunos casos el círculo vicioso podría suprimirse, pero en otros no, es imposible, como en el concepto de 'relación': «una relación es incomprensible sin dos términos» *(CM.*, 127). Ello conduce a peticiones de principio en las definiciones de los números naturales como ocurre con la dada por Burali-Forti de '1', o en las de Couturat tanto de '0' [36], como de '1' y '2'. Refiriéndose a la de '1' de Couturat, «dice en sustancia, uno es el número de los elementos de una clase cuyos dos elementos cualesquiera son idénticos» *(1905*, 832) *(CM.*, 123), mientras que la dada por Burali-Forti en 'peaniano' tiene '1' en el primer miembro mientras que en el segundo aparece 'U-n-o' *(CM.*, 122). En otras palabras, no pueden entenderse las definiciones de '1', '2', etc., si no se conoce previamente qué es el número. Si se pretende escapar a esta crítica indicando que no es lo mismo el '1' que se define del '1' del que se sirve en la práctica el matemático, ya que el primero es un objeto lógico, cabría objetar que, en ese caso, el logicismo podrá ser una teoría muy interesante pero que ella misma se invalida para dar cuenta del pensamiento matemático al no reflejarlo adecuadamen-

---

[36] «Definir cero por nulo y nulo por ninguno es abusar de la riqueza de la lengua francesa» *(1905*, 823). Observación realizada por Frege, igualmente, *1884*.

te. Se observa que, aun admitiendo que ambas concepciones trataran de la Matemática, entonces habría que explicitar la diferencia e indicar las relaciones que entre ambos puede haber, y si no se admite que sean diferentes, explicitar el postulado que permita sostener que ambos 'uno' sean el mismo.

Además de esta previa necesidad de conocer qué sea el número para comprender las definiciones logicistas de número, Poincaré señala que los mismos utilizan, realmente, dos definiciones no equivalentes analítica sino sintéticamente de este concepto. Una de las definiciones surge como la clase de todas aquellas clases que pueden ponerse en correspondencia biyectiva entre sí. El número natural exige, pues, como datos previos, el concepto de clase y el de aplicación biyectiva. Ahora bien, para que la aplicación biyectiva entre clases dadas por comprensión pueda ser establecida, deben enfocarse los elementos de ambas clases como unidades, es decir, en extensión. Por lo que, dejando de lado el hecho de que tal aplicación pueda ser impredicativa al realizarse entre clases infinitas, se ha realizado en la misma un paso de la comprensión a la extensión, paso que es sintético como ya he mencionado y que no puede ser aceptado más que por un acto de intuición y no por un proceso deductivo o lógico puro alguno. Y en tal paso sintético se introduce subrepticiamente el número que luego se pretende definir. Es, por ello, un proceso ilegítimo desde un enfoque pretendidamente lógico puro el realizado por los logicistas, que introducen el número natural sin hacer ver que lo introducen. Cometen, por ello, una petición de principio más. Para salvarla, sólo tienen una salida: aceptar las totalidades como objetos ya dados de antemano, es decir, aceptar una matemática teológica, un realismo platónico radical.

Junto a la definición anterior los logicistas pretenden definir el número natural de una segunda manera. En *1906 a* Poincaré toma como tema para su crítica el ensayo *On cardinal numbers* de Whitehead, en el cual Russell se hace problema el paso de la definición antes mencionada de número a la definición calificable de recurrente del mismo. Utilizando la terminología precisada por el autor inglés en *Russell 1905 b*, resultaría, según Poincaré, que *clase recurrente* es «toda clase de números que contengan 0 y que contengan n+1 si contienen n»; *número finito* es el número cardinal de una clase que no es equivalente a ninguna de sus subclases propias; *entero finito* (número natural) es el número cardinal n tal que no es igual a n−1; *número inductivo* es «todo número que forme parte de *todas* las clases recurrentes». El problema planteado por Russell consiste en establecer que cada número finito y cada entero finito es un número inductivo. «Establecer este punto sería demostrar el principio de inducción» *(1906 a,* 308), indicará Poincaré y remarcará al afirmar que la proposición «Todo número finito es inductivo» es «el principio de inducción» *(1906 b,* 867). Lo que hace Russell es intentar la demostración de que ningún número no inductivo es entero finito. Para ello forma la clase de números 'm' tal que 'n—m' es no inductivo cuando 'n' es no inductivo. Esta clase es recurrente y contiene todos los números inductivos. En esta demostración, además de indirecta, hay que utilizar el postulado de elección. Lo que a Russell no le agrada, precisamente —y se desinterese de su demostración de equivalencia en *1905 b,* al considerar al postulado como «no verdadero sin alguna restricción» (521)— aunque sí a Poincaré quien ve en el empleo de este postulado la necesidad de un acto sintético, único que permite pasar de una definición a otra. Al no considerarlo juicio analítico, la consecuencia es clara: ambas definiciones serán equivalentes en función de una síntesis, no de una demostración lógica.

Junto al hecho del manejo de dos definiciones de número natural no equivalentes entre sí lógicamente, la crítica de Poincaré se centra a que en el momento de la demostración en que se llega a la clase 'n—m', recurrente y que contiene a todos los números inductivos, aparece la impredicatividad que preside la segunda definición apoyada en la de número inductivo. Habría que haber tomado la precaución de aplicar la definición a «todas las clases recurrentes en la definición de las cuales no intervenga ya la noción de número inductivo» *(1906,* 310). Pero Poincaré observa que Whitehead (Russell) no la ha tomado y ha aceptado la definición de número inductivo sin ver que es impredicativa. «El razonamiento de Whitehead es, por lo tanto, vicioso; es el mismo que ha conducido a las antinomias; era ilegítimo cuando daba resultados falsos; permanece ilegítimo cuando conduce por azar a un resultado verdadero» *(CM.,* 147). Y conduce a un resultado verdadero, que no es otro que el de considerar el número natural a partir de '0' mediante la reiteración de la operación 'sucesor'; es decir, la definición inductiva propugnada por Poincaré. Resultado que, sin embargo, no puede aceptarse en el enfoque logicista por venir empañado por la impredicatividad. «Pero la definición de esta clase recurrente (...) no es predicativa, porque en esta definición (...)

entra la noción de número entero que presupone la noción de todas las clases recurrentes» *(1909 c,* 15).

Las dos definiciones —con sus dificultades de aceptación interna— son, aceptado el postulado de elección y aceptada la impredicatividad, sinónimas. Pero son dos aceptaciones, fundamentalmente la segunda, rechazables para Poincaré. Ahora bien, abandonada —por equivalente— la primera definición de número natural, Poincaré observa que la segunda definición es nuevamente utilizada en dos por el logicismo. Así, el número natural se define como un elemento de una clase recurrente, clase cuyos elementos se obtienen aplicando la inducción o recurrencia a la operación 'sucesor', de manera reiterada, al primer elemento, al '0', de dicha clase, enfocado como elemento más pequeño en el sentido de no ser sucesor de ningún otro elemento de la clase. Simultáneamente, el principio de inducción completa aparece reducido a operar con elementos de esa clase. Con ello, en el fondo, se utiliza una segunda definición y es aquella que ve al número natural como obedeciendo al método de inducción completa. Con palabras textuales de Poincaré: «Un número puede ser definido por recurrencia; sobre ese número se puede razonar por recurrencia» *(1905,* 835). Ahora bien, «el principio de inducción completa no nos enseña que la primera es verdadera, nos enseña que la primera implica la segunda» *(íd.)*. Y esta implicación sólo cabe admitirla por un proceso de intuición, por un acto que hace descansar el paso de una a otra no en demostración analítica alguna, sino en construcción sintética.

3. *A la reducción proposicional.*—La tesis de que todas las proposiciones de la Matemática se quieran enfocar como meras consecuencias de premisas estrictamente lógicas, conservando el carácter de logicidad, no le parece correcta al matemático francés. Realiza, éste, una curiosa distinción. Por supuesto él ha contribuido en gran medida al estudio y búsqueda de aquellas proposiciones que pueden adoptarse como primeras en cada rama no sólo de la Matemática sino también de las ciencias cercanas, como en Física. En *1908 b* afirmaría, recordando esos trabajos: «Nos hemos esforzado en enumerar los axiomas y postulados más o menos disimulados que sirven de fundamento a las diferentes teorías matemáticas» (38). Pero estos postulados siguen enfocándose como puramente matemáticos, es decir, bien como meras convenciones o definiciones disfrazadas de algunos términos, bien como auténticos

juicios sintéticos a priori o construcciones mentales acerca de las relaciones entre objetos bien de la naturaleza bien previamente elaborados por el matemático. Frente a esta consideración, los principios de la Lógica se consideran estrictamente lógicos, es decir, analíticos y los califica de identidades o tautologías, dado que se pueden reducir al principio de identidad. Son principios reguladores para cualquier disciplina que verse acerca de clases finitas, no constructivas. Principios que, por consiguiente, no pueden informar a ciencia alguna en particular, ciencia que, por serlo, ha de tratar con proposiciones sintéticas, generalizantes. Querer derivar de principios de identidad proposiciones acerca de una materia determinada se le muestra a Poincaré como pretensión errónea. De aquí que los postulados que las nuevas lógicas consideran como proposiciones de carácter lógico se le muestren como verdaderos juicios sintéticos a priori, es decir, constructivos, y por ello de carácter no puramente lógico. Refiriéndose a Russell afirma: «introduce igualmente principios que ha declarado indemostrables. Pero estos principios indemostrables son llamadas a la intuición, son juicios sintéticos a priori... Los mirábamos como intuitivos cuando los volvíamos a encontrar, más o menos explícitamente enunciados, en los tratados de matemáticas. ¿Han cambiado de carácter porque el sentido del nombre lógica haya aumentado y porque los encontremos ahora en un libro titulado *Tratado de lógica? No han cambiado de naturaleza, sólo han cambiado de lugar*» *(1905,* 829) *(CM.,* 126).

En otras palabras, la introducción de todas las nuevas proposiciones, junto a las inversiones antes mencionadas, se le muestra a Poincaré como un mero cambio en el sentido del término 'lógica', atribuido ahora a una disciplina que se apropia proposiciones de carácter matemático, y por consiguiente sintéticas a priori, calificándolas de proposiciones lógicas o analíticas. Ello puede observarse en el hecho de algunos nuevos postulados que las nuevas lógicas han de admitir, y cuyo carácter analítico es radicalmente dudoso, por no decir nulo. Así, el postulado del infinito, que no es más evidente que el de inducción completa como indicará Poincaré *(1906 a,* 311), aunque Pieri *(1906)* y Burali-Forti *(1896)* sostengan que es un auténtico juicio lógico, al igual que tendrá que admitirlo Russell aunque mostrara sus reservas ante el carácter de su logicidad; el postulado de elección de Zermelo, del que Poincaré afirma tajantemente: «este es un juicio sintético a priori; sin él la teoría de cardinales sería imposible, tanto para los números finitos como para los infinitos» *(1906,* 313), mientras que Russell no lo admite como lógico sin grandes reservas aunque al final no tenga otra opción que admitirlo; el axioma de reducibilidad postulado por Russell para poder resolver las dificultades que encuentra en su teoría de tipos. Según Poincaré, tanto los postulados citados como los que ha de utilizar la nueva lógica, suponen conocida la significación de los términos que en ellos intervienen, por lo cual no pueden considerarse como definiciones contextuales de los mismos, como convenciones, ni pueden ser considerados tampoco como tautológicos dado que no pueden reducirse al principio de identidad, ni como proposiciones obtenidas de la experiencia como se muestra claramente en el postulado del infinito. No queda otra posibilidad que considerarlos como verdaderos juicios sintéticos a priori. Por ello las nuevas lógicas no constituyen una verdadera lógica en el sentido tradicional del término, reduciéndose a sistemas de carácter científico. Con lo cual no pueden fundamentar la matemática sino que han de apoyarse en ésta, al igual que las restantes disciplinas científicas. La pretendida reducción proposicional no existe, por consiguiente.

4. *A los auxiliares.*—Para poder cumplir las finalidades propuestas reduccionistas, los autores de las nuevas lógicas han tenido que emplear, masivamente, una nueva simbología, al estilo matemático, como uno de sus auxiliares más imprescindibles. Que hagan uso de cierta simbología le parece a Poincaré ciertamente útil, «el lenguaje simbólico creado por Peano (...) es susceptible de rendir algunos servicios» *(CM.,* 120), pero su importancia no debe ser exagerada. Como buen matemático una preocupación constante de Poincaré se centró en el lenguaje. A la utilidad de unas u otras notaciones dedicó, incluso, algún ensayo especial, *1899,* referente al manejo de las notaciones diferencial de Leibniz o a la de Lagrange con las ventajas y desventajas que una u otra técnica simbólica entrañaban. A este respecto el matemático francés indica, «en cuanto a mí, empleo de ordinario la notación diferencial, primero porque es la lengua que hablan la mayor parte de mis contemporáneos y después a causa de las pequeñas razones materiales que he expuesto más arriba. Pero si escribo en diferenciales, lo más frecuentemente pienso en derivadas» *(1899,* 127). Palabras significativas en el sentido de que para Poincaré, la notación simbólica se muestra como secundaria respecto al auténtico pensamiento matemático, no siendo más que

un acompañamiento del mismo. A pesar de lo cual reconoce que en ocasiones la elección adecuada de una palabra, de un término puede tener un papel decisivo en la invención matemática hasta el extremo de que pudiera calificarse a tal palabra de «creadora» *(1908 b,* 25), ya que permite relacionar, por ejemplo, teorías aparentemente desconectadas entre sí. «Una palabra bien elegida es suficiente muchas veces para hacer desaparecer las excepciones que traen las reglas enunciadas en el antiguo lenguaje; es para esto para lo que se han imaginado las cantidades negativas, las cantidades imaginarias, los puntos del infinito...» *(1908 b,* 30). A pesar de ello, a veces conviene reproducir tal palabra por algún símbolo simple principalmente si la misma se reitera muy frecuentemente *(1905,* 822). Tales símbolos no son garantía, sin embargo, contra las paradojas y círculos viciosos como puede observarse en formulaciones como la dada por Burali-Forti en 'peaniano' y que contenía una proposición contradictoria de la cual «el más ciego se hubiera dado cuenta en seguida, si el axioma hubiera sido enunciado en lenguaje inteligible, puesto que significa: el número de combinaciones que se pueden formar con varios objetos es más pequeño que el número de estos objetos» *(CM.,* 148)[37]. Todo ello le conduce a no considerar el auxilio pasigráfico como panacea para la resolución de los problemas de fundamentos, ni tan siquiera de los problemas más particulares y concretos matemáticos. Igualmente, su valor para la Lógica y la Filosofía lo resume en los términos: «que estos signos sean cómodos, es posible; pero que estén destinados a renovar la filosofía, esto es otra cosa» *(CM.,* 121).

Subyacente a esta crítica ya he indicado que se encuentra en Poincaré la consideración de que el lenguaje, en la creación matemática, es un auxiliar secundario. Lo importante, para él, es el pensamiento creador, que se puede plasmar bien en lenguaje geométrico, bien en analítico. Pensamiento creador de relaciones y, por consiguiente, de estructuras empleando terminología actual, de la cual son modelos las realizaciones en uno u otro lenguaje. Si Poincaré piensa en derivadas aunque se exprese en diferenciales, Poincaré piensa en terminología geométrica aunque se exprese en terminología analítica. Ello lo manifiesta en unos párrafos donde expone sus primeras grandes creaciones matemáticas, las funciones doblemente periódicas o automorfas, *1882*. Manifestación cla-

[37] En Burali-Forti, *1896*. Que el postulado era contradictorio lo puso de relieve, como reconoce Poincaré, Whitehead en *On cardinal numbers, 1903*.

ra de cómo Poincaré, ya desde esta época, introduce, realmente, en su trabajo, el concepto de modelo, lo cual significa, a la vez, su mentalidad formal que busca la estructura subyacente como más importante que los lenguajes en los cuales la misma puede plasmarse. Lenguajes que no son más que meras realizaciones o transcripciones de la estructura formal, del pensamiento creador que en ellas se esconde. A pesar de su longitud, transcribo sus párrafos:

> No puedo pasar en silencio el enlace que liga las nociones precedentes a la geometría no euclídea de Lobatchevski.
>
> Supongamos que se convenga suprimir a las palabras *recta, longitud, distancia, superficie* su significación habitual, y llamar recta a todo círculo que tiene su centro sobre X, longitud de una curva lo que acabamos de llamar su L (La L de un arco de círculo $\alpha\,\beta$, que tiene su centro en X, será el logaritmo neperiano de $[\alpha, \beta]$), distancia de dos puntos la L del arco de círculo que une esos dos puntos que tienen su centro sobre X, y en fin superficie de un área plana lo que llamamos su S (La integral doble $\displaystyle\iint \frac{d\,x\,d\,\gamma}{\gamma^2}$ tomada en el interior de un área plana cualquiera será la S de ese área).
>
> Supongamos además que se conserve a las palabras *ángulo* y *círculo* su significación, pero conviniendo llamar *centro de un círculo* el punto que está a una distancia constante de todos los puntos del círculo (según el nuevo sentido de la palabra *distancia)* y radio del círculo esa distancia constante.
>
> Si se adoptan estas denominaciones, *los teoremas de Lobatchevski son verdaderos,* es decir que todos los teoremas de la geometría ordinaria se aplican a esas nuevas cantidades, salvo aquellos que son una consecuencia del postulado de Euclides.
>
> Esta terminología me ha prestado grandes servicios en mis búsquedas, pero no la emplearé aquí para evitar toda confusión *(1882,* 114).

Otro auxiliar empleado por las nuevas lógicas lo ve Poincaré en el empleo del método de axiomatización, aunque en su crítica se autolimita a la definición por postulados, que ya he indicado no afecta al logicismo, fundamentalmente porque Poincaré lo enfoca desde un carácter de axiomatización puramente formal. De aquí que tal crítica la esboce posteriormente e indique que, en este punto, Poincaré se encontraba más cerca del logicismo de lo que él podía esperar.

5. *Al pretendido rigor y a la supresión de la intuición.*—En este apartado Poincaré se detiene, en primer lugar, en señalar cómo las nuevas lógicas no han cumplido, ni podrán hacerlo, el

requisito exigido del rigor lógico completo dado que continúan utilizando la intuición y, como pretenden ocultar este hecho, la emplean mal. Así, se complace en indicar fallos como el de Burali-Forti ya mencionado o, lo que es más característico, en el constante empleo del círculo vicioso. Ello lo manifiesta al indicar cómo en la demostración del teorema de Cantor-Bernstein éste utiliza la inducción completa cuando tal principio, en puridad, no puede ser utilizado porque en la logística todavía no se ha justificado ni siquiera enunciado su empleo, justificación que se hará posteriormente, y «llegará demasiado tarde» *(1905,* 27-29). Igualmente, en las críticas citadas en cuanto a las definiciones de número natural, a la que se puede agregar la que dirige a la teoría de los tipos lógicos que entrañan el conocimiento de la teoría ordinal que pretende fundamentar posteriormente.

Pretendido rigor no alcanzado y que únicamente se justifica por razones no precisamente lógicas, como la confianza de que el mismo se alcanzará alguna vez. Confianza de carácter subjetivo desde el cual, y extrapolado al campo lógico, se condenan posiciones opuestas en un alarde de inconsecuencia lógica extraordinario. En este punto, Poincaré es tajante. Reconoce que, desde su enfoque que admite el papel de la intuición, podrán cometerse equivocaciones en la marcha demostrativa; errores lamentables, ciertamente, pero inevitables y subsanables en el mismo contexto. Ahora bien, si se pretende desterrar la intuición en la marcha demostrativa y conceptual, reemplazándola por reglas de carácter estrictamente lógico, dicho error carece de justificación, porque si la aplicación de las reglas no depende de la intuición, la aplicación tiene que ser infalible, o de lo contrario debe suprimirse; no bastan retoques. «Esto es una necesidad para ustedes. Ustedes serán infalibles o no lo serán, pero no tienen derecho a decirnos: 'Nos hemos equivocado, es verdad, pero ustedes también se equivocan'. Equivocarnos para nosotros es una desgracia, para ustedes es la muerte» *(CM.,* 138).

En este punto interviene, igualmente, la posible fecundidad de las nuevas lógicas, nula para Poincaré, aunque aumente su capacidad crítica. La infecundidad la resume en la exclamación: «La logística no es estéril, engendra la antinomia» *(1906 a,* 316). Infecundidad, paso a contradicciones, ausencia de rigor, hacen que las nuevas lógicas tengan que rehacer sus propios principios, buscar nuevas formas que permitan superar tales extremos, fundamentalmente los contenidos en la impredicatividad, consustancial con ella y que se pone de manifiesto en conceptos como número inductivo y clase hereditaria. En otras palabras, han de rehacer lo ya elaborado *(1906)*. De aquí que Poincaré exclame: «Sea lo que sea, la logística hay que rehacerla y no se sabe bien lo que se podrá salvar. Inútil agregar que el cantorismo y la logística están solos en una causa: las verdaderas matemáticas, las que sirven para cualquier cosa, podrán continuar desarrollándose de acuerdo con sus principios propios, sin preocuparse de las tormentas que reinan fuera de ellas y continuarán paso a paso sus conquistas acostumbradas, que son definitivas y que no han abandonado jamás» *(CM.,* 146) [38].

Por otro lado, Poincaré pone de relieve cómo en las nuevas lógicas se mantiene el empleo de la intuición y no sólo en el aspecto inventivo o en el primer momento de construcción sintética. Los primeros principios enumerados por Russell —nueve nociones indefinibles, veinte proposiciones indemostrables de las cuales dos se refieren a clases, ocho a relaciones y diez al cálculo proposicional, todas formalizables, salvo la regla del *modus ponens*— se obtienen mediante un acto creador de la intuición, son juicios sintéticos a priori que «forman el fundamento de la nueva lógica» *(CM.,* 127). Según Poincaré, todos estarían de acuerdo en este punto, lo cual es, por decirlo de alguna manera, muy controvertible. «Pero lo que Russell pretende y *es lo que me parece dudoso, es que después de estas llamadas a la intuición, no se harán más; no habrá que hacer otras y podrán constituirse las matemáticas íntegramente sin hacer intervenir ningún elemento nuevo*» *(íd.)*. La duda surge, entre otros campos, en el de la demostración. Couturat había señalado que «demostrar una proposición es deducirla de algunas otras, admitidas o dadas como verdaderas, por medio de los *solos* principios de la Lógica (Couturat *1905 a,* 35). Pero resulta de estas palabras que la demostración exige el empleo del concepto 'número de etapas en la demostración' y, como ya he puesto de relieve, ello enlaza tanto con el número finito como con la existencia de un proceso recurrente, reiterativo, que permita aplicar tales principios en cada una de las etapas. Proceso de iteración específicamente matemático y, por tanto, sintético-constructivo. Es por lo que, para Poincaré, se muestra claro que en cualquier demostración auténtica deba utilizarse la intuición, manifestada tanto en la recurrencia como en el previo

[38] En *1906 a,* 312, la frase «las que sirven para cualquier cosa» está reemplazada por «aquellas donde no se chapotea con el infinito actual».

entendimiento de las reglas, de su aplicabilidad y de la finalidad que se persigue con ellas. La intuición, por consiguiente, no puede ser desterrada. En otras palabras, lo que sostiene Poincaré es que cualquier sistema deductivo encierra un proceso operatorio que conlleva la noción de iteración de una acción un número arbitrario, pero finito, de veces. Iteración propia del razonar matemático, irreducible a la lógica.

3. *En resumen*

Además de crítica, los cinco puntos anteriores contienen otras tantas tesis mantenidas por Poincaré. Tesis contrapuestas al logicismo y que se derivan fundamentalmente de las posturas ontológicas de partida. La tesis logicista se apoya en la suposición de la previa existencia de un dominio de objetos y predicados que el matemático ha de ir describiendo paulatinamente. Dominio cerrado, además, porque las proposiciones primitivas a que antes he hecho referencia parecen bastar para describir la Matemática no sólo existente sino la que en un futuro pueda crearse. Es suposición que para Poincaré hace suprimir la actividad constructiva del matemático. Actividad que no puede quedar encerrada en unos moldes forjados de una vez para siempre. Suposición que, por otra parte, no es consecuente con la propia actividad de los logicistas, que deben ir aceptando unos u otros postulados, rehaciendo unas u otras tesis para adaptarlas a la Matemática ya existente; pero ello implica que tales tesis podrán ser modificadas al continuar la construcción de las matemáticas. Construcción que no se considera ya acabada, clausurada para siempre, desde el enfoque de Poincaré.

Las tesis de Poincaré frente al logicismo pueden resumirse en los puntos siguientes:

1. Metódicamente no proceden por vía genética, psicológica, histórica, pedagógica.
2. No se puede entender 'uno', 'dos', 'tres', etc., si no se conoce previamente qué es el número.
3. Si se define el número natural como la clase de todas las clases equivalentes, se comete círculo vicioso y, además, se hace matemática teológica.

4. Si se define el número natural como número inductivo se comete círculo vicioso, por ser concepto impredicativo.

5. Ambas definiciones, por otro lado, no son equivalentes lógicamente sino que requieren el empleo de un postulado como el de elección para demostrar tal equivalencia.

6. Las primeras proposiciones de partida no son lógicas —analíticas o tautológicas— sino matemáticas, sintéticas, como los postulados del infinito, de elección, de reducibilidad.

7. Se supervalora el lenguaje simbólico, cuando el mismo no tiene un papel primordial, sino secundario.

8. Han de utilizar la iteración de una acción un número arbitrario de veces, y la noción de iteración es estrictamente matemática, anterior a cualquier lógica.

9. Las ontologías de base son distintas: han de suponer dado un mundo o dominio universal de individuos y predicados. Suposición que pretende suprimir la actividad creadora, constructiva del matemático.

b) *Axiomatización y formalismo*

Si las divergencias de Poincaré respecto al logicismo, a las nuevas lógicas, son prácticamente totales no puede afirmarse lo mismo respecto a las corrientes axiomatizadora y formalista que se habían manifestado entre los matemáticos a lo largo del siglo XIX y que culminarán en el programa hilbertiano de la década de los veinte. Las afinidades con estas corrientes son muchas, aunque también algunas diferencias.

El convencionalismo nominalista de Poincaré

He indicado ya cómo para Poincaré «los matemáticos no estudian objetos, sino relaciones entre los objetos; les es pues indiferente reemplazar esos objetos por otros, siempre que las relaciones no cambien. La materia no les importa, sólo la forma les interesa» *(1893*, 32). El espíritu matemático, al ligarse a la forma pura, da el mismo nombre a la multiplicación de los cuaterniones y a la de los números enteros *(1897 b*, 143), por ejemplo. Las operaciones que pueden realizarse se definen de manera convencional, sin más limitación que la de someterse a las condiciones de asociatividad, conmutatividad, distributividad... *(1904 a,* 95) *(1893,* 33). De esta forma, si se compara el matemático con el físico, se encuentra que el científico ha de escoger entre todos los hechos que se presentan en la naturaleza y «sucede lo mismo, a fortiori, en matemáticas; el matemático tampoco puede conservar enlazados todos los hechos que se le representan; tanto más cuanto que estos hechos lo representan a él mismo, perdón, iba a decir que era su capricho el que los había creado. Es él quien construye con todas las piezas una combinación nueva relacionando los elementos» *(1908 b,* 24).

El matemático es el creador, pero lo es de sistemas de símbolos, de sistemas lingüísticos regidos por convenciones. Lenguaje bien hecho del que se sirven las restantes disciplinas para su expresión, para su desarrollo. Poincaré insiste en este convencionalismo lingüístico de modo permanente. Así, en cuanto a la elección adecuada de la palabra que impida, por un lado, confusiones como las de reificación —ocurridas en la física con términos como el de 'calor' o 'éter'—; que permita unificar distintas teorías como en el caso de la ecuación de Lagrange *(1897 b,* 149), o en el de la estructura de 'grupo', con sus términos asociados de isomorfismo y transformación *(1908 b,* 30-1), o en el de uniformidad de convergencia, etc.; de modo análogo, la Geometría se ve en muchos pasajes como mero sistema lingüístico. Ahora bien, el posible convencionalismo lingüístico de Poincaré presenta una faceta pragmática. Si lo importante, más que el lenguaje, es la creación que se manifiesta en el mismo, aparece clara la razón convencionalista del matemático francés. Si se expresa en diferenciales es porque en ese lenguaje se comunican la mayoría de los matemáticos, aunque piense en derivadas; se elige uno u otro sistema simbólico en función de ser objetivo, en función de objetivación de un hacer que permita ser común a los demás, abandonando el carácter de subjetividad, de trabajo interior. La elección de unos u otros sistemas no será cuestión, por consiguiente, esencial. La virtud creadora del razonamiento se apoyará en el manejo de reuniones simbólicas, pero no consistirá en dichos arreglos sígnicos precisamente. Aquí veo una de las claves de la no aceptación por parte de Poincaré del formalismo inscripcionista radical de Hankel, Thomae, Heine. En este punto cabe señalar, igualmente, los ataques que el matemático francés dirige prácticamente a todas las tendencias: A la escuela de Berlín representada por Kronecker y Dedekind respecto a la construcción del continuo matemático, ya mencionada, contra la cual señala: «El continuo matemático sería, en esta manera de ver, una pura creación del espíritu, en la cual la experiencia no tendría papel alguno» *(1893,* 31), convertido tal continuo en un puro juego sígnico, aparentemente arbitrario. A la escuela italiana de Peano, por la pasigrafía, mecanizadora que hace olvidar la palabra y ésta es la que, en muchos momentos, se muestra sugeridora, revelando analogías explicadoras de los fenómenos físicos. En este punto incide, a la vez, un sentimiento estético en Poincaré, como se muestra al hablar de Maxwell, tanto por el empleo de los vectores para superar las dificultades de los 'números imaginarios', como de su sentido profundo estético-matemático para simetrizar una matriz mediante un parámetro, de momento artificial, pero que no hacía variar mucho la predicción de los fenómenos que las ecuaciones permitían expresar. Sentimientos que la pasigrafía haría desaparecer, por su absoluta artificiosidad *(1897 b,* 149). A Hilbert, por el carácter excesivamente formal de los postulados geométricos, lo mismo que a Russell, les reprochará no preocuparse por el origen de los postulados que aceptan, sus conexiones con la realidad, con la naturaleza.

Para Poincaré, lo arbitrario que podría aparecer en el convencionalismo lingüístico parece quedar superado por dos puntos:

a) Esteticismo y pragmatismo. El fin de la matemática no es el conocimiento, pero sí dar el instrumento clave para obtenerlo. «El físico no puede pedir al analista que le revele una verdad nueva; a lo sumo, éste podrá ayudarle a presentirla... He ahí pues una primera razón por la cual el físico no puede pasarse sin las matemáticas; le suministran la única lengua que puede hablar. Y no es indiferente una lengua bien hecha» *(1897 b,* 140-1). Refiriéndose al espacio y al tiempo, «el análisis matemático, cuyo objeto principal es el estudio de esos cuadros vacíos, ¿no es más que un vano juego del espíritu? No puede dar al físico más que un lenguaje cómodo; ¿no es éste un mediocre servicio, del que habría podido prescindir, en rigor; incluso, no es de temer que ese lenguaje artificial no sea un velo interpuesto entre la realidad y el ojo del físico? Lejos de ello, sin ese lenguaje, la mayor parte de las analogías íntimas de las cosas nos habría permanecido para siempre desconocidas» *(VC., Intr.,* 6-7). Pero si la Matemática se orienta hacia una instrumentalización en cuanto que permite la aprehensión de la naturaleza por parte de otras ciencias, también debe orientarse hacia un conocimiento de quien la ha creado. «Por un lado la ciencia matemática debe reflexionar sobre ella misma, y esto es útil, porque cavilar sobre ella misma es reflexionar sobre el espíritu humano que la ha creado, tanto más puesto que entre las múltiples creaciones del hombre es esta ciencia la que menos ha pedido al exterior, en una palabra, la más pura y esencial», de aquí que estas reflexiones hagan «conocer mejor en cuanto a él mismo» al hombre *(CM.,* 31). Y éste, creador del hacer matemático, trabaja por la belleza en sí de su trabajo. Trabajo que produce un goce estético indiscutible: «Si trabajamos, es menos para obtener esos resultados positivos a los cuales el vulgo nos cree únicamente ligados, que por experimentar esa emoción estética y comunicarla a aquellos que son capaces de sentirla» [39].

b) Origen genético de las palabras, de los postulados. Aunque el matemático maneje palabras y signos y los regule mediante convenciones, no puede olvidar en momento alguno que tales signos y tales reglas convencionales han tenido un origen o una motivación empírica. El matemático puro que olvidara la existencia del mundo exterior quedaría encerrado en un círculo, y se agotaría pronto en su formalismo, como el pintor que dominara su técnica pero al que faltaran modelos *(1897 b,* 148). «Durante largo tiempo los objetos de los que se ocupaban los matemáticos estaban por lo general mal definidos; se creía conocerlos, porque se los representaba con los sentidos o la imaginación; pero no se tenía más que una imagen grosera y no una idea precisa sobre la cual el razonamiento pudiera tener asidero. (...) Así para el número inconmensurable. La idea vaga de continuidad, que debemos a la intuición, se ha resuelto en un sistema complicado de desigualdades establecidas entre los números enteros» *(1900,* 19) *(CM.,* 97). Es un proceso general. Así, para establecer una proposición acerca de un objeto no definido con rigor, aceptado por intuición, el matemático o bien fracasa o bien únicamente da demostraciones calificables de aproximadas. En un momento posterior, logra definir rigurosamente el objeto y razona sobre él de manera ya irreprochable. De ese objeto se ha suprimido lo que de intuitivo sensible, de imaginación pudiera haber, quedando en término ya matemático. Naturalmente, cabe una objeción: Una vez realizada la demostración habría que comprobar que la definición de ese objeto ya matemático corresponde, con todas las propiedades obtenidas, al objeto físico, a la imagen sensible del cual se

[39] De «Notice sur Halphen». Tomado de Darboux, *1914,* LXV.

ha partido. Pero aquí, Poincaré señalará que en la proposición intuitiva primitiva se mezclaban, realmente, dos: una de carácter experimental, la otra de carácter matemático. Esta es la que queda con pleno rigor. La adecuación de una a otra es un hecho experimental y sólo la experiencia podrá enseñar, posteriormente, que tal objeto real y concreto puede asociarse a la definición matemática. Hecho experimental, no puede ser realizado matemáticamente *(1900,* 23-5) *(CM.,* 97) *(CM.,* 119). Si en las palabras anteriores Poincaré parece adoptar la postura formalista, matiza sin embargo. Claramente señala que, al hacerse rigurosa, la Matemática se aleja de la realidad, se vuelve artificiosa; pero que, por ello mismo, no debe olvidar sus orígenes, el por qué de sus problemas y el cómo se plantean.

Desde este plano de rigor, formal, en el que no se puede apoyar en la intuición sensible o en la imaginación el matemático para no caer en la arbitrariedad, ha de someter a los objetos que crea y maneja, al sistema deductivo de convenciones o sistema formal con que los define, a unas exigencias mínimas. Como «las matemáticas son independientes de la existencia de los objetos materiales», resultará que «en matemáticas la palabra existir no puede tener más que un sentido: significa exento de contradicción» *(CM.,* 117). Desde un aspecto formal, que pretende superar el empirismo, Poincaré hará leit-motiv suyo las expresiones: «Stuart-Mill ha pretendido que toda definición contiene un axioma, ya que definiendo se afirma implícitamente la existencia del sujeto definido. Es ir demasiado lejos; es raro que en matemáticas se dé una definición sin hacerla seguir por la demostración de la existencia del objeto definido. (...) Es necesario no olvidar que la palabra existencia no tiene el mismo sentido cuando se trata de un ser matemático que cuando se trata de un objeto material. Un ser matemático existe, siempre que su definición no implique contradicción, ya en sí misma, ya con las proposiciones anteriormente admitidas» *(1891,* 59) *(CM.,* 102).

Con radical ironía Poincaré señalará la necesidad de la demostración de existencia o no-contradicción al referirse al conjunto 'Ω' de todos los ordinales introducido por Cantor y que emplea Burali-Forti para poner de relieve la paradoja del número ordinal que hoy lleva su nombre. En diálogo con Hadamard, defensor de la postura cantoriana que le obliga a rechazar la existencia del conjunto 'Ω', Poincaré afirma haciendo suya la postura del matemático italiano: «Perdón, tenía derecho, puesto que podía siempre presentar $\Omega = T'(No, \varepsilon>)$. Quisiera saber qué es lo que puede impedírselo ¿y podemos decir que un objeto no existe cuando se le ha llamado Ω?» *(CM.,* 123).

El objeto, el signo matemático, para ser aceptado, o bien debe tener un correlato inmediato con la realidad —un ejemplo o modelo— o bien ha de introducirse mediante una definición seguida de la demostración inmediata —si no es constructiva, como la recurrente— de que no conduce a contradicción ni en sí, ni con las demás nociones ya admitidas previamente. Y ello porque en caso contrario el matemático consideraría como objeto propio suyo el mero signo o marca y, según Poincaré, «se debe tener cuidado en atribuir demasiada importancia a accidentes que a menudo no la tienen más que la blancura de la tiza» *(1891,* 29). En este último caso no habría problema alguno respecto a la existencia, porque la marca que se haga en la pizarra está ahí, delante y ni es contradictoria ni tampoco deja de serlo: es un objeto físico con el cual nada tiene que ver el matemático en su hacer más profundo, aunque para comunicarse requiera de dicho trazo y figura material.

De modo análogo ocurre con los postulados que sirven para iniciar las cadenas deductivas o para caracterizar los objetos que se manejan en el sistema. Los postulados, las hipótesis que sirven de fundamento a las matemáticas «no son más que hipótesis en apariencia y se reducen a definiciones o a convenciones disfrazadas» *(CH., Intr.,* 2). Precisamente por ser convenciones disfrazadas o definiciones implícitas, el rigor matemático es absoluto y las proposiciones obtenidas pueden gozar de los caracteres de necesidad que se les ha atribuido tradicionalmente. «Es justamente de allí de la que estas ciencias obtienen su rigor; esas convenciones son la obra de la libre actividad de nuestro espíritu, que, en ese dominio, no reconoce obstáculo. En él, nuestro espíritu puede afirmar porque decreta; pero entendámonos; esos decretos se imponen a *nuestra* ciencia que, sin ellos, sería imposible; no se imponen a la naturaleza. Esos decretos, sin embargo, ¿son arbitrarios? No, porque serían estériles. La experiencia nos deja libre nuestra elección, pero la guía ayudándonos a discernir el camino más cómodo» *(íd.)*. Poincaré rechaza el nominalismo extremo a que su posición parece dar lugar, nominalismo según el cual el mundo que el sabio cree descubrir es un mundo creado, en el fondo, por su capricho. El nominalista extremo haría que la ciencia fuera radicalmente rigurosa, cierta, pero estéril, carente de contenido y, «Si fuera así, la ciencia sería impotente» *(íd.)*.

1. *Papel de los postulados*

Evitando el nominalismo —que parece triunfar en la Matemática *(CH., Intr.,* 5)— Poincaré se libra a la imposición de una serie de condiciones que deberían cumplir los postulados de cualquier sistema para ser aceptados. «Hay varias maneras de concebir el papel de los axiomas» *(1909 c,* 20). Uno consiste en seguir el sentido etimológico del término 'axioma', como cuando se pretende fundamentar una ciencia apoyándola en sí y no en otra ya establecida. En este caso un requisito se mostrará imprescindible, «nos será preciso, no demostrar esta evidencia, ya que la evidencia no se demuestra, sino tratar de captar el mecanismo psicológico que ha creado ese sentimiento de la evidencia» *(íd.,* 21). En otras palabras, no basta afirmar de una proposición que es evidente para adoptarla como primer principio. Es lo ocurrido en las primeras proposiciones geométricas que, una vez analizadas, no son ni proposiciones analíticas, ni sintéticas a priori, ni experimentales, sino definiciones disfrazadas de los términos que en ellas aparecen, aceptadas como evidentes por unos mecanismos muy complejos en los que intervienen tanto los espacios fisiológicos individuales creados por la educación, el habitat, la evolución de la especie, la adecuación a la naturaleza, como por el deseo de rigor del espíritu humano. Es lo que ocurre con las leyes de la Mecánica, aceptadas como principios para una exposición de carácter deductivo, leyes que son convenciones pero que tienen la contrapartida experimental que, si no las niega directamente, puede arrinconarlas por no dar predicciones experimentales adecuadas: «la ley de la aceleración, la regla de la composición de fuerzas ¿no son pues más que convenciones arbitrarias? Convenciones, sí; arbitrarias, no; lo serían si se pierden de vista las experiencias que han conducido a los fundadores de la ciencia a adoptarlas y que, por imperfectas que sean, bastan para justificarlas. Es bueno que, de tiempo en tiempo, llevemos nuestra atención hacia el origen experimental de esas convenciones» *(CH.,* 134).

Una segunda manera de interpretar los axiomas, su papel, consiste en que «se los puede considerar como decretos arbitrarios que no son más que las definiciones disfrazadas de las nociones fundamentales» *(1909 c,* 22). Es lo realizado por Hilbert, por ejemplo, en la exposición de los Fundamentos de la Geometría. El enfoque es, aquí, de carácter estrictamente formal dado que se opera con signos de los que se quiere suprimir todo correlato empírico o mental. En este caso dos serán los requisitos para poder aceptarlos: *a)* Previa existencia de aquello que se formaliza —como en el caso geométrico— y entonces surgirá como cuestión central la ya mencionada de la adecuación o no de lo existente en lo formal. *b)* A pesar de esta adecuación, o bien si se pretende eliminar el problema de la adecuación como de ciencia experimental —a lo que no se tiene derecho, dado que el previo sistema a formalizar es sistema matemático también y no empírico— se tendrá que imponer otro, aún más restrictivo: «para que ello sea legítimo, es necesario demostrar que los axiomas así introducidos no sean contradictorios» *(íd.)*. En otras palabras, si no se acude al origen genético de las proposiciones, de los objetos que definen, si no se hace el recurso a la adecuación y al modelo, se tiene que acudir a un criterio formal y éste no es otro que el dado para la existencia de tales objetos: su no-contradicción. Es decir, para que un sistema formal sea aceptable se requiere que o bien refleje adecuadamente una estructura cuyo modelo se admite dado previamente, o bien hay que demostrar la consistencia de dicho sistema, so pena de quedarse en un mero juego diversionista, sin apoyatura en la realidad.

Condiciones electivas

La elección de uno u otro postulado, dentro de un sistema, dentro del conjunto de los que definen implícitamente unos términos, también debe ser enfocado, estudiado por el matemático. Cabe reemplazar un postulado por otro, por ejemplo. Pero en este caso «no puedo evitar pensar en todos aquellos que pretenden demostrar el postulado de Euclides, apoyándose sobre una de sus consecuencias, considerando esta consecuencia como una verdad evidente por sí misma. ¿Qué han ganado? Esta verdad, por evidente que sea, ¿lo será más que el postulado mismo?» *(1909 c.*, 17). Son términos dirigidos a Russell cuando éste, para demostrar el principio de inducción completa —evidente para Poincaré— ha de crear otro axioma, el de reducibilidad. En este punto, Poincaré señala las condiciones que deben cumplirse o estudiarse antes de tal reemplazo, y que pueden generalizarse a otros casos, en otras ramas de la matemática. Aunque particularizado a los postulados de reducibilidad y de inducción completa, las condiciones pueden generalizarse para cualesquiera otros postulados:

No ganamos pues nada sobre el número de postulados; ¿ganamos al menos en calidad?

¿En qué mejora el nuevo axioma al principio de inducción?

1.º ¿Es susceptible de un enunciado más simple y más claro? (...)

2.º El axioma de reducibilidad ¿es más general que el principio de inducción, de forma que no se puede demostrar este axioma, partiendo de este principio?

3.º O por el contrario ¿el axioma es menos general *en apariencia* que el principio, de manera que no se percibe inmediatamente que el segundo está contenido en el primero, aunque lo esté?

4.º El empleo de este axioma, ¿es más conforme a las tendencias naturales de nuestro espíritu? ¿Se le puede justificar psicológicamente?

Finalmente, y ya en el tema concreto de ambos principio y axioma, Poincaré termina con un irónico «me limito a plantear estas cuestiones; me faltan los elementos para resolverlas ya que no he logrado comprender completamente el sentido de este axioma» *(1909 c.,* 17-8).

Como definición: Condiciones

Si la experiencia ha forzado al matemático a realizar sus construcciones mediante sistemas de convenciones, mediante sistemas formales, develando la facultad del espíritu matemático creador de un lenguaje preciso junto al lenguaje ordinario o usual, este espíritu ha creado a partir de algo previamente construido. Es de la intuición del número de la que se obtienen los procesos creadores, la facultad de reiteración uniforme indefinida, de la cual son manifestaciones tanto la inducción completa, como el grupo, como el orden. Manifestaciones obtenidas en dialéctica con la naturaleza, con la experiencia, bien directamente, bien a través de otras ciencias, tras la petición de resolución de problemas concretos que pueden provocar la aparición de contradicciones con proposiciones previamente admitidas y que se convierten en nuevo motor, esta vez interno, de creación matemática. Creación que se refleja lingüísticamente por procesos recurrenciales, creadores, o por decretos, convenciones que, en exposición de rigor, se pueden ligar entre sí en sistemas postulacionales o definiciones implícitas. Como reflejo de la virtud creadora del hacer matemático tienen el carácter de certeza absoluta pero, por supuesto, no reflejan, si se los toma en sí, la auténtica realidad del hacer matemático, sino una de sus parcelas, uno de los posibles aspectos que la creación matemática puede ofrecer. Ello se manifiesta con nítida claridad en la imposibilidad que tiene el sistema postulacional de reflejar o no su adecuación tanto a los objetos materiales de los que en última instancia puede haber surgido, como en el olvido de su génesis, motivo de planteamiento y forma de haberlo realizado. Olvido que muestra «que la Ciencia de la demostración no es la Ciencia entera y que la intuición debe conservar su papel como complemento, iba a decir como contrapeso o antídoto de la lógica» *(1900,* 25) *(CM.,* 98).

Los sistemas formales constituyen, en su totalidad, las consecuencias que pueden derivarse de unos cuantos axiomas convencionales, aunque no arbitrarios, que componen la definición por postulados o axiomática de los objetos del sistema. Definición que presenta para Poincaré sus limitaciones, centradas en la exigencia de que deba demostrarse su consistencia, según se ha indicado ya en las líneas precedentes.

En su polémica con los logicistas, Poincaré transcribe las palabras de Couturat: «La definición mediante postulados se aplica no sólo a una noción, sino a un sistema de nociones; consiste en enumerar las relaciones fundamentales que las unen, y que permiten demostrar todas las demás propiedades; estas relaciones son los postulados» (Couturat, *1905 b)*. Si se han definido todas las nociones, menos una, esta última será por definición el objeto que verifica los postulados, agregará Poincaré. Inmediato, el ejemplo geométrico: «los otros axiomas de la geometría no bastan para definir completamente la distancia; la distancia será, entonces, por definición, entre todos los tamaños que satisfacen a los otros axiomas, aquél en virtud del cual el postulado de Euclides sea verdadero» *(CM.,* 117). Y el reconocimiento de que esta concepción la ha adoptado para la Geometría, pero con una condición: que se acepte uno de los términos de la disjunción 'demostración de que los postulados no impliquen contradicción o aceptación de que tales postulados se admitan como axiomas'. El segundo elemento de la disjunción supone, para Poincaré, la aceptación de un acto de intuición, reflejado en un auténtico juicio sintético a priori, categoría de juicio que tanto el logicismo como el formalismo pretenden eliminar *(CM.,* 116). Las dificultades que Poincaré ligará a la aceptación de la definición por postulados estriban en que no encuentra la posibilidad de tal demostración de no contradicción por método directo.

Métodos de demostrar la consistencia

Los métodos de demostración de consistencia o no-contradicción, de existencia de un sistema formal, en cuanto a los postulados de partida que Poincaré señala como posibles son:

1. *Indirecto o por el modelo o ejemplo.*—«Queremos definir una noción A, y decimos que, por definición, A es todo objeto para el cual son ciertos tales o cuales postulados. Si podemos demostrar directamente que todos esos postulados son ciertos para un objeto B, la definición estará justificada; el objeto B será un *ejemplo* de un A. Estaremos seguros de que los postulados no son contradictorios puesto que hay casos en que son verdaderos todos a la vez» *(CM.,* 118).
2. *Directo.*—«Considerar todas las proposiciones que se pueden deducir de tales postulados, considerados como premisas, y mostrar que, entre esas proposiciones, no hay dos que sean contradictorias una con otra» *(CM.,* 118).
3. Métodos que exigirán el empleo de la *inducción completa.*—«Se podría tratar de razonar como sigue. Podemos verificar que las operaciones de la nueva lógica aplicadas a premisas exentas de contradicción no pueden dar más que resultados igualmente exentos de contradicción. Si entonces, después de n operaciones, hemos vuelto a encontrar contradicción, es que tampoco volveremos a encontrarla después de la $n + 1$. Es, por lo tanto, imposible que haya un momento en que comienza la contradicción, lo que demuestra que no la volveremos a encontrar más» *(CM.,* 126).

El primero es el comúnmente utilizado para distintos sistemas. Así, para los geométricos. «Pero no siempre es posible tal demostración por el ejemplo» *(CM.,* 118). Supone, además, que el objeto B para el cual se verifiquen los postulados sea no contradictorio, dando paso a una regresión al infinito salvo llegar a un sistema no contradictorio demostrado directamente. Este método, a su vez, es válido por modo exclusivo para un número finito de consecuencias, caso que carece de interés, dado que ni siquiera de la geometría puede asegurarse que tenga tal número finito de consecuencias. Y ello admitiendo incluso, como hace Poincaré: *a)* que los sistemas geométricos puedan traducirse a un sistema estrictamente formal inscripcionista, a un lenguaje 'pasigráfico'; *b)* se desarrollen sin tener que recurrir a premisas que no sean reducibles a la Lógica, y *c)* posibilidad de la demostración puramente mecánica para tal sistema traducido *(1905,* 825).

No queda otro recurso que hacer llamada al tercer tipo de demostración de consistencia, apoyado en una de las innumerables aplicaciones del principio de inducción matemática *(CM.,* 133), único método posible, además *(íd.,* 148). Método que conlleva, por eso mismo, la aceptación de una llamada a la intuición reflejada en un auténtico juicio sintético a priori, con salida, por consiguiente, de la formalización pura y del axiomatismo —igual que de cualquier otro intento reduccionista lógico—, siempre que estas dos corrientes no admitan de modo explícito tal tipo de razonamiento como primario.

En este sentido cabe observar que un matemático de la escuela italiana, Pieri (Pieri, *1906)* ligándose al problema de la consistencia de la Aritmética, reconoce los dos primeros métodos de demostración enumerados por Poincaré, precisando el primero —algo oscuro en el matemático francés—, pero se niega a reconocer que el método de inducción completa sea un procedimiento adecuado para las demostraciones de consistencia, aceptando únicamente el indirecto y pretendiendo demostrar la consistencia de la Aritmética a partir de la lógica, señalando la imposibilidad de dar una demostración de consistencia de los axiomas lógicos *(1906,* 197). Pieri mantiene, finalmente, el carácter lógico del axioma del infinito *(íd.,* 207). El programa del matemático italiano le parece a Poincaré «perfectamente correcto» *(1906 a,* 298), aunque su consecuencia sea clara: «Así la compatibilidad de los postulados fundamentales de la Lógica es ella misma un postulado que es preciso admitir y que es imposible demostrar deductivamente. No podemos pues afirmar esa compatibilidad más que por un juicio sintético a priori» *(íd.).* Como la formulación lingüística de la inducción completa es una forma de este tipo de juicios, Poincaré continúa manteniendo la postura de que el único procedimiento válido es el de inducción completa, incluso para demostrar la consistencia de esas nuevas lógicas. Y ello en función de que el postulado de la no compatibilidad de los postulados de la Lógica supone la aceptación de la segunda parte de la disjunción antes señalada. Y, con ella, la imposibilidad de realizar, en el interior de un sistema formal, la demostración de su consistencia dado que, o acude a otro sistema o tiene que terminar por aceptarse la existencia mediante un juicio sintético a priori.

De modo análogo enjuicia el intento de Zermelo de dar un sistema de axiomas como definición del concepto 'conjunto' que permita superar las antinomias cantorianas e, igualmente, desarrollar la Aritmética. En este caso, tras preguntarse por los criterios de evidencia que han conducido a Zermelo al establecimiento de sus sistemas y reconocer Poincaré la imposibilidad de la demostración de consistencia, el matemático francés muestra sus dudas en cuanto a la factibilidad del método. Las 'evidencias' son dudosas, la no-contradicción no cabe establecerla; luego sólo cabe considerar el sistema axiomático de Zermelo como un sistema provisional, dado que pretende ser una axiomatización material y no puramente formal *(1909 c)*.

Se puede destacar, igualmente, la afirmación del matemático francés frente a Couturat y los logicistas que le atacan por la imposición de no contradicción como clave para la existencia matemática, hasta el extremo de considerar Couturat que la impone para embarazar a los logísticos porque tal prueba es imposible, hablando estrictamente [40]: «Inútil añadir que no suscribo esta reivindicación. Pero dicen ustedes: la demostración que usted exige de nosotros es imposible, y usted no puede intimarnos a 'coger la Luna con los dientes'. Perdón, esto es imposible para ustedes, pero no para nosotros, que admitimos el principio de inducción como un 'juicio sintético a priori'» *(CM.,* 140). Reivindicación de la libertad de contradicción que se encuentra totalmente matizada en el pensamiento de Poincaré, dado que sólo la exige en el caso en que los postulados se enfoquen como convenciones arbitrarias por no existir, en ese caso, apoyatura alguna salvo el signo material gráfico para el hacer matemático *(1909 c,* 30).

2. *Limitaciones de los sistemas formales*

Cabría resumir la posición de Poincaré respecto a quienes admiten el sistema formal como último fundamento del hacer matemático y no como una de sus manifestaciones, señalando que si por una parte los sistemas formales se muestran como imprescindibles para el desarrollo de las diversas partes de la Matemática, en el plano del rigor y fundamentalmente en el expositivo, presentan una serie de limitaciones que pueden esquematizarse en los puntos siguientes:

---

[40] Couturat: «No se podría reivindicar en términos más enérgicos y orgullosos la libertad de contradicción» *(1906,* 236).

1. No dan cuenta de la adecuación entre las relaciones de objetos que maneja el matemático y los objetos de los cuales se han obtenido dichas relaciones. Y aunque este problema de adecuación no sea fundamental, indica claramente que el sistema formal no es todo el pensamiento matemático, sino una parte del mismo. Si el sistema formal muestra un carácter eminentemente lógico, requiere del antídoto o contrapeso de la intuición a través de la cual, en última instancia, se posibilita la construcción de dicho sistema formal.

2. No dan cuenta del origen genético de los postulados, de su orden, de los criterios para su elección. Aun admitiendo que «hayan establecido (los matemáticos o los filósofos) que todos los teoremas puedan deducirse por procedimientos puramente analíticos, por simples combinaciones lógicas de un número finito de axiomas y que estos axiomas no sean más que convenciones el filósofo conservaría el derecho de buscar los orígenes de estas convenciones y a investigar por qué han sido preferidas a las convenciones contrarias» *(CM.,* 115).

3. Los criterios para la elección de los postulados son imposibles de formalizar dado que responden a la existencia de una geometría profunda o instinto que guía al matemático, con leyes «que se sienten y no se enuncian» *(CM.,* 115) y ante las cuales la pasigrafía, por ejemplo, es impotente.

4. No dan cuenta del concepto de demostración matemática. Si, como sostenía Hilbert en 1904 la demostración es un objeto matemático, desde el enfoque formal dicho objeto tiene que ser dado en términos de definición formal, es decir, por postulados. Ello implicaría la necesidad de demostrar que tal objeto es no contradictorio, pero la noción 'demostración', por medio de su definición implícita, es imposible de conocer, ya que tal definición está compuesta de signos sin significación. Por lo cual, y ello es fundamental, carece de sentido saber si una demostración conduce o no a una contradicción *(1905,* 24) y, por otro lado, no puede demostrarse que la demostración es un objeto matemático salvo petición de principio o salida del sistema formal.

5. Consecuencia del punto anterior: Es imposible realizar una demostración de consistencia de un sistema formal en el interior de dicho sistema formal. A esta consecuencia se agrega, para hacerla aún más plausible, el hecho de que no puede realizarse la demostración de no contradicción mediante ejemplo o modelo salvo un regreso al infinito, necesitándose la aceptación de algún sistema

formal como libre de contradicción, lo cual supone la salida del formalismo para buscar tal sistema mediante un auténtico acto de intuición sintética o bien la aceptación de un pragmatismo no formalizable y radicalmente inseguro. La primera parte de la disjunción es la única aceptable desde un enfoque de fundamentación y Poincaré indicará que tal acto de intuición sintética se encuentra, precisamente, en el número natural y la inducción completa como reflejos de la virtud creadora del total hacer matemático.

Son puntos que claramente revelan que, para Poincaré, la axiomatización formalizadora no puede considerarse como explicación convincente para unos fundamentos completos del hacer matemático, aunque sea un instrumento aceptable, incluso necesario, para la exposición y desarrollo pragmático del mismo.

En particular cabe estudiar las limitaciones señaladas en dos terrenos que los nuevos lógicos pretenden aceptar como absolutamente válido el método formal: la geometría y la Aritmética. Estudio particular que, por otro lado, permitirá poner de relieve, aún más, las diferencias entre las posibles formalizaciones de ambos campos matemáticos.

Limitación del sistema formal en Geometría

En los terrenos geométricos, en los cuales ya he indicado que Poincaré aceptaría incluso la mecanización inscripcionista del razonamiento, cabe consignar las razones que guían a Poincaré en tal aceptación, así como la crítica dirigida a Hilbert en su intento. Tales razones pueden concentrarse en las dos siguientes:

1. Las distintas geometrías que pueden construirse no son contradictorias, lo que está asegurado «porque la geometría existe» *(1902,* 168). Se observa que una geometría no es más que la representación de una estructura algebraica fundamental, el grupo. Apoyándose en los trabajos de Sophus Lie, Poincaré demuestra que sólo existe un número finito de geometrías que verifiquen las premisas: *a)* El espacio tiene *n* dimensiones; *b)* El movimiento de una figura invariante es posible; *c)* Se precisan *p* condiciones para determinar la posición de esa figura en el espacio. «Puedo agregar, incluso, que si *n* está dado, se puede asignar a *p* un límite superior. / Si por consiguiente se admite la posibilidad

del movimiento, no se podrá inventar más que un número finito (e incluso bastante restringido) de geometrías de tres dimensiones» *(1891,* 63). Naturalmente se encuentran las geometrías creadas por Riemann, que dependen de cómo definir la longitud, definición que puede ser realizada de infinitas maneras, por lo que podría pensarse en la existencia de un número infinito de geometrías. «Pero la mayor parte de esas definiciones son incompatibles con el movimiento de una figura invariable» *(íd.)*. Por otro lado, entre las más divulgadas, euclídea, lobatchevskiana, rienmaniana, Poincaré construye modelos con su diccionario correspondiente, por el cual se reducen a geometrías sobre la superficie esférica (la rienmaniana) o sobre la superficie de Beltrami o al modelo tridimensional o los planos de Poincaré (la lobatchevskiana), reduciéndose estas dos últimas a la euclídea. Con lo cual, si la geometría euclídea es no contradictoria tampoco lo serán las otras dos. La contradicción o no, se demuestra, además de comprobar la existencia directa, por el modelo *(1891)*. A su vez, el teorema fundamental de la geometría, indica que la misma es no contradictoria, realizándose su demostración también por el modelo, ahora en traducción a los terrenos del Análisis *(CM.,* 132) necesitando para ello el principio de inducción completa.

Junto a la demostración de la no contradicción relativa, que da la posibilidad de la geometría como sistema formal, se encuentra que los distintos sistemas geométricos no son mero juego o divertimento para el lógico. «La geometría de Lobatchevski, susceptible de una interpretación concreta, cesa de ser un vano ejercicio de lógica y puede recibir aplicaciones; no tengo tiempo de hablar aquí de esas aplicaciones ni del partido que Klein y yo hemos obtenido para la integración de las ecuaciones lineales» *(1891,* 58).

2. Junto al hecho de la posibilidad formal —la no contradicción— de cada geometría, y la posibilidad de sus aplicaciones que impidan considerarlas como vanos ejercicios de lógica, se presenta el ya mencionado de que cada geometría responda a la estructura de grupo. Ello se interpreta en el sentido de que el conjunto de las proposiciones que puedan elaborarse será un conjunto cerrado, por lo cual cabe sistematizarlo en un sistema formal axiomático. El trabajo de Hilbert ha puesto de relieve la existencia y papel de los postulados implícitos que se encontraban subyacentes en la axiomática material de Euclides. En esta labor, con esta

finalidad, no formalizable, la formalización se muestra como un instrumento matemático de importancia fundamental; pero, como siempre, como instrumento de trabajo matemático fecundado por la intencionalidad que no es formalizable.

En este punto interviene la crítica que Poincaré hace a Hilbert por su intento formalizador. Hay que consignar, ante todo, que Poincaré no regatea elogios a Hilbert en momento alguno. En el análisis de 1902 de los *Fundamentos de la Geometría,* Poincaré escribe: «Su obra es, pues incompleta, pero no es una crítica la que le dirijo. Incompleta, es necesario que se resigne a serlo. Basta que haya hecho hacer a la filosofía de las matemáticas un progreso considerable comparable a los que se debía a Lobatchevski, Riemann, Helmholtz y Lie» *(DP.,* 184), mientras que al exponer las ideas sobre los *Fundamentos de la matemática* le califica de «matemático de raza» *(CM.,* 141). Sin embargo, Poincaré realiza su crítica en el sentido de que Hilbert ha ido a una exclusiva finalidad formalizadora, ocultando —y ocultándose— con tal método la auténtica realidad de su trabajo. El objeto de las geometrías no es otro que enseñar que «las leyes conocidas del movimiento de los sólidos invariables» *(1902,* 182) satisfacen ciertas condiciones. Estas no son leyes experimentales que nos imponga la experiencia, sino que el geómetra crea tales sólidos y los desplazamientos que realizan, con motivo de los cuerpos físicos y sus movimientos. La combinación de todas las posibles transformaciones no es arbitraria, satisface la estructura de grupo. «Pero todos los grupos que se pueden imaginar poseen ciertas propiedades comunes, y son precisamente esas propiedades comunes las que limitan el capricho de los inventores de geometrías» *(íd.,* 182-3). Tales propiedades comunes vienen establecidas por las premisas señaladas en el punto anterior. A cada grupo le corresponde una geometría determinada. De aquí que la verdadera realidad de la geometría sea la estructura subyacente que la determina, la de grupo.

Observa Poincaré, sin embargo, que en Hilbert «los grupos de transformaciones en el sentido de Lie no parecen jugar más que un papel secundario» *(íd.,* 183). Así, «Hilbert parece más bien disimular esas aproximaciones, no sé por qué. Sólo parece interesarle el punto de vista lógico. Estando dada una sucesión de proposiciones, constata que todas se deducen lógicamente de la primera. ¿Cuál es el fundamento de esta primer proposición, cuál su origen psicológico? No se ocupa de ello» *(id.,* 184). Lo cual, evidentemente, implica que Hilbert no ha tenido en cuenta, en la elección de los postulados, al menos de un modo explícito, su orden natural cometiendo pequeños errores lógicos en su pretendida marcha lógica pura; así, los axiomas de orden aparecen como dependiendo de un aspecto proyectivo cuando hay geometrías que satisfacen los postulados de orden pero no los proyectivos, como aquellas que se manejan en el Analisis sytus, en la topología.

En resumen, Hilbert llevado por su afán estrictamente lógico, oculta por una parte la realidad de lo que trabaja; por otra, trastorna el orden natural de los postulados precisamente por no haber seguido tal realidad, y a los que son independientes los hace depender... En 1903, a la crítica anterior agrega Poincaré una *Rectificación,* señalando cómo Hilbert, en posteriores ensayos a la primera edición de los *Fundamentos de la Geometría,* intenta presentar los axiomas de orden de manera independiente al enfoque proyectivo, a la vez que liga más estrechamente las geometrías a la noción de grupo, perfeccionando la teoría de Lie, al desembarazarla de «toda llamada a los principios del cálculo diferencial» *(id.,* 185). Rectificación que es una afirmación de las tesis de Poincaré porque quien ha rectificado es Hilbert.

La crítica no se dirige, sin embargo, a Hilbert en su totalidad. La crítica se dirige a la impotencia del sistema formal en sí para dar cuenta de la auténtica realidad que pretende reflejar, cuando se parte de que la misma ya existe. El que la obra de Hilbert sea incompleta no se debe a que Hilbert haya fracasado —como explícitamente señala en las palabras que he citado anteriormente—, sino todo lo contrario. Hilbert ha hecho *todo* lo que podía hacer. Incluso ha puesto de manifiesto, sin quizá quererlo, las limitaciones que el método tiene. Limitaciones aún más claras según la Rectificación en la que el matemático alemán trata de amoldarse a las líneas de no ocultamiento de la realidad que pretende explicitar con su formalismo. En otras palabras, Hilbert, en su obra, reflejará con nitidez el hecho de que la axiomatización formal de la geometría no da cuenta de que la realidad de la misma no se encuentra en el encadenamiento de una a otra proposición, sino en la estructura de grupo, cuyo origen genético se centra en la traducción a dicha estructura de los movimientos de los cuerpos sólidos indeformables y de los movimientos musculares y sensitivos que el individuo ha de hacer para captar los cuerpos sólidos materiales. Traducción a una u otra geometría motivada por modo exclusivo por las condiciones naturales en que se desarrolla el hombre y que le han conducido a la elección de la euclídea, cuando transportado a otros universos con condiciones distintas hubiera elegido otras geometrías, por mera adaptación fisiológica a dichos universos o, en este mismo, si fuera conveniente cambiar una por otra geometría de cara a nuevas impresiones, cabría hacerlo sin dificultad ni inconveniente alguno. Elección convencional y de comodidad para sobrevivir y evolucionar en el sentido pragmático, empírico, de la geometría; pero de uno u otro sistema de geometría, es decir, de una u otra lengua que reflejan una estructura subyacente de grupo que es lo no convencional, lo que no podrá ser objeto de convención alguna salvo eliminar todo sistema geométrico. «El objeto de la geometría es el estudio de un 'grupo' particular; pero el concepto general de grupo preexiste en nuestro espíritu al menos en potencia. Se impone a nosotros, no como forma de nuestra sensibilidad, sino como forma de nuestro entendimiento» *(1895,* 90).

Limitación del sistema formal en Aritmética

Enfrentado con la Aritmética el sistema formal presenta una limitación aún mayor que la Geometría. Según Poincaré es a partir del número natural, como construcción primaria, del cual puede obtenerse el resto de la Matemática siempre que se fecunde con la intuición. Obtención a base de convenciones, mediante la elaboración de postulados adecuados. Los sistemas de signos obtenidos no lo son por el mero capricho o por la querida elaboración de un matemático en su cuarto, sin contacto con el exterior. Tanto la experiencia, como los problemas que plantean otras ciencias, como el deseo de superar contradicciones internas, constituyen la clave para la elaboración de los sistemas convencionales lingüísticos, de los sistemas formales. Lo esencial en este tipo de construcciones es el saber que se manejan «elementos que sabemos distinguir unos de otros; sabemos por otra parte definir la suma o el producto de dos de esos elementos, y en fin tenemos reglas para reconocer entre dos números cuál es mayor y cuál es menor» *(1902,* 171). Enfocadas tales condiciones como postulados convencionales, «la noción de número puede ampliarse casi indefinidamente» *(íd.,* 171), por mero cambio de unas u otras de las convenciones a las que se sometan las operaciones, aunque cada sistema deba integrar el precedente, del cual ha sido construido de modo inmediato, dado que de modo mediato el origen se encuentra en el número natural. Este es, pues, la base de toda la Aritmética, de todo el Análisis. Constituye, además, la base para las demostraciones de consistencia relativa o indirecta de los restantes sistemas matemáticos.

Cabría suprimir la intuición del número puro reemplazando la misma por un sistema de postulados. Es lo realizado por Peano siguiendo la línea de Dedekind. En este caso, el sistema se considerará como definición implícita del número natural, pero sin derecho, desde el aspecto formal, a interpretar los signos del sistema como poseyendo un significado más o menos intuitivo. Desde este enfoque de definición implícita sólo cabe demostrar, para tal sistema, que no es contradictorio, teniendo presente que la inducción completa se enfoca como un postulado más en el interior del sistema y no como un método de razonamiento. El sistema formal tendrá que justificar tal método no pudiendo utilizarlo hasta después de esa justificación.

Ya se han indicado los tres procedimientos para la demostración de consistencia de un sistema formal. El último no puede utilizarse y no sólo por los motivos anteriores sino porque «si me apoyo sobre el principio mismo para demostrar que no implica contradicción, demuestro únicamente que si es verdadero, no es contradictorio; y esto no nos enseña nada» (*1905*, 834).

Por el primer procedimiento, por el ejemplo, la demostración se muestra imposible. La Aritmética pretende fundamentar a las restantes disciplinas. Sólo cabría utilizar como modelo una parte, un subconjunto de los naturales. Así, si se elige la serie '0, 1, 2', la misma satisface todos los postulados salvo el que establece que el sucesor de todo natural es natural; el elemento '2′' no existe. Para que se cumpliese el postulado habría que admitir que '2′=3' y que '3' pertenece también a la serie. '3' no puede ser '0' ni '1' ni '2', porque en este caso fallaría alguno de los restantes postulados. De esta forma, para que el modelo se cumpla debería estar formado por la serie '0, 1, 2, 3'. En el nuevo modelo así ampliado se puede *repetir* el razonamiento anterior, en cuyo caso se está en condiciones de aplicar la inducción completa que se querría justificar, habiéndose manifestado ya la posibilidad de reiterar una acción, es decir, la virtud creadora matemática. Ello indica, por una parte, que la inducción completa se nos aparece antes de su posible justificación; por otra, que «es, por lo tanto, imposible demostrar los axiomas para algunos números sin demostrarlos para todos: es preciso renunciar a la demostración por el ejemplo» *(CM.,* 128). Es claro que el razonamiento empleado por Poincaré sirve para demostrar la independencia de unos postulados respecto a otros, pero no para demostrar su consistencia. También, para observar que la axiomática de Peano exige el axioma del infinito de modo implícito, dado que de lo contrario, a partir de un 'a' determinado, todos los naturales tendrían el mismo sucesor.

Es evidente que, por vía directa, tampoco puede realizarse la demostración de no contradicción, dado que el número de proposiciones que pueden obtenerse al desarrollar los postulados es infinito.

La conclusión de Poincaré es inmediata. El sistema axiomático de Peano es impotente para demostrar su propia no contradicción. Sólo cabe admitir para cada uno de los postulados un acto de intuición sintética.

Si se quiere retrotraer este tipo de actos puede establecerse el intento de realizar la demostración de la consistencia mediante un modelo o ejemplo en la nueva lógica. Es el intento mencionado de Pieri quien, al igual que Poincaré y Hilbert, rechazaba la pretensión de Padoa de poder demostrar la no-contradicción aritmética en el interior de dicha aritmética. La demostración, en este caso, habría de apoyarse en postulados como el del infinito, axioma de reducibilidad, postulado de elección, cuya evidencia y estatuto lógicos se mostraban radicalmente cuestionables, a pesar de las declaraciones de algunos logicistas. Además, desde un plano formal tales postulados han de ser enfocados como carentes de interpretación alguna, por lo cual necesitarán la demostración de su no contradicción, que se mostraría imposible por medios lógicos, dado que se está en el interior de tal lógica. Si se los enfoca como juicios sintéticos a priori, entonces se abandona el sistema formal y cabe discutir los mecanismos psicológicos que conduzcan a la aceptación de unos u otros postulados y, con ello, la aceptación como más simple de unas nuevas lógicas que de las nociones aritméticas. Pero, entonces, se hará psicología, lo quieran o no los logicistas y formalistas.

Si ya la limitación anterior es clave, todavía Poincaré insistirá en el hecho de que aceptada la definición por postulados del número natural, como hay una correlación entre 'número de etapas en la demostración' y el número natural se obtiene una ambigüedad no aclarada: «¿Cómo sabré que el número de mis razonamientos es uno de los que satisfacen el principio?» *(1905,* 834). Se plantea, aquí, la existencia de una Aritmética material y una Aritmética formal y el problema de la adecuación de esta última a la primera. Adecuación que indica: *a)* El número natural es previo y no admite definición alguna; *b)* Habrá que dar un postulado que indique cómo se realiza la adecuación cuestionable, postulado que no podrá ser formalizado, ya que no podrá establecerse en el interior del sistema formal.

A pesar de estas limitaciones, cabe admitir la elección de la lógica como apoyatura de la Aritmética y pretender demostrar la consistencia de la misma. Cuestión de psicología, pero que para Poincaré, resulta improcedente. Y ello porque no puede haber lógica alguna independiente del número al cual quiera definir posteriormente. Al hablar del logicismo se ha indicado cómo el matemático francés señala las peticiones de principio de esta corriente. «Couturat repite con harta frecuencia que esta lógica nueva es totalmente independiente de la idea de número. No me entretendré contando cuántos adjetivos numerales tanto cardinales como ordinales, o adjetivos indefinidos, tales como varios, contiene su exposición. (...) Algunas veces este inconveniente se podría evitar, pero otras es esencial» *(CM.,* 127). Y análogo para la demostración con su correspondiente número de etapas.

En otras palabras, la Aritmética no puede ser formalizada porque ha de emplear el razonamiento por inducción completa, que se apoya en la intuición del número, intuición que no es formalizable. La manifestación primaria de la virtud creadora matemática se hará por procesos recurrentes, directamente constructivos, y no por definiciones implícitas, que requieren la previa existencia de esos procesos iterativos para ser elaboradas y admitidas, procesos irreducibles a definiciones explícitas igualmente.

3. *Necesidad de la inducción completa*

Interviene, aquí, el papel esencial que Poincaré atribuye al principio de inducción completa hasta el extremo de que, en lugar de hablar, realmente, de limitación de las definiciones por postulados para la expresión de la Aritmética, Poincaré se expresa, en general, en términos de este tipo de razonamiento, como si fuera él el único postulado que caracterizara al número natural. De esta forma, la conclusión obtenida por Poincaré respecto a las limitaciones del sistema formal para dar cuenta de la Aritmética quedará manifestada en que «el principio de inducción no puede ser considerado como la definición disfrazada del número entero» *(CM.,* 132).

Incide, igualmente, en este rechazo —calificable de unilateral o no totalmente comprensivo— otro punto no menos interesante: la necesidad que para la construcción matemática muestra el principio de inducción. El término 'necesidad' muestra dos connotaciones en el lenguaje utilizado por Poincaré. Una de matiz psicológico, subjetivo; la otra, pretendidamente objetiva. Cuando en 1894 publica *Sobre la naturaleza del razonamiento matemático,* la inducción completa se muestra como necesaria al *espíritu,* al cual se impone con 'necesidad' total. De aquí que se manifieste, en forma proposicional, como un verdadero juicio sintético a priori. Esta faceta se mantendrá, ciertamente, pero matizada por un segundo enfoque: la necesidad se centra en que sin tal principio no puede construir el hombre la aritmética. La necesidad no es pues, de carácter subjetivo, sino condición normativa para la elaboración de una disciplina determinada.

El paralelismo con la Geometría, al que recurre Poincaré, muestra el sentido de las palabras anteriores con mayor claridad. El quinto postulado euclídeo puede reemplazarse por una proposición contraria o por una proposición equivalente. En este último caso, con la condición de que la misma sea independiente a las anteriores, se obtiene el mismo sistema. Es lo ocurrido con los intentos de demostrar el enunciado en su versión euclídea desde los tiempos de Proclo hasta los de Legendre. El problema de sustituir uno por otro postulado ya ha sido mencionado y las condiciones que deben regir su elección. Pero cabe también la posibilidad de reemplazar una proposición por su contraria. En este caso se ha demostrado que pueden obtenerse sistemas geométricos distintos, pero no por ello contradictorios. Las geometrías no-euclídeas son posibles, es decir, existen. De modo análogo ocurre en Mecánica. Se pueden imaginar hipótesis contrarias a las admitidas como principios válidos para su desarrollo deductivo. Incluso Poincaré se dedica al ejercicio de talès reemplazamientos por hipótesis contrarias a las establecidas. «He insistido un poco sobre estas hipótesis; porque me parece que no se puede comprender bien lo que es nuestra ley de inercia generalizada, más que oponiéndole una hipótesis contraria» *(CH.,* 116). La conclusión obtenida por Poincaré de estos ensayos es clara: posibilidad de reemplazar un postulado por su contrario y obtención de otro sistema geométrico, mecánico.

Una segunda conclusión se impone, igualmente. Si los postulados que sirven de base a la geometría fueran sintéticos a priori «se impondrían entonces a nosotros con tal fuerza, que no podríamos concebir la proposición contraria, ni construir sobre ella un edificio teórico. No habría geometría no-euclídea» *(1891,* 64). En cuanto a los principios de la Mecánica, como el de inercia, la ley de aceleración, la igualdad de acción y reacción..., son, como los postulados geométricos, definiciones disfrazadas. Cualquiera de ellos «¿Es una verdad que se impone a priori al espíritu? Si fuera así, ¿cómo los griegos lo habrían desconocido?» *(CH.,* 113).

Naturalmente se exige en la aceptación de la proposición contraria de la que enuncie el postulado, que tengan algo en común el postulado primitivo y el obtenido por tal reemplazamiento. Ese algo común es que tanto uno como otro reflejen la misma realidad: el grupo en el caso de la geometría. Si lo que se hace es eliminar esta estructura, entonces se obtendría un sistema ciertamente formal, pero al que difícilmente cabría seguir llamando geometría.

En el caso de la Aritmética Poincaré observa que no cabe la disjunción en el mismo sentido que en la geometría. Es decir, puede reemplazarse el principio de inducción por otros enunciados, equivalentes, pero no por enunciados contrarios. De aquí la necesidad que tal principio tiene respecto a la Aritmética; de aquí que sea un auténtico juicio sintético a priori.

Proposiciones equivalentes

He indicado que, para Poincaré, el principio de inducción completa no es más que el reflejo de la virtud creadora del razonar matemático. Como tal reflejo puede manifestarse en proposiciones distintas, aunque equivalentes. A pesar de que ya he citado textualmente el párrafo, lo reitero: «El juicio sobre el cual reposa el razonamiento por recurrencia puede ser puesto bajo otras formas; se puede decir por ejemplo que en una colección infinita de números enteros diferentes, hay siempre uno que es menor que los demás. / Se podrá pasar fácilmente de un enunciado a otro y forjarse así la ilusión de que se ha demostrado la legitimidad del razonamiento por recurrencia. Pero siempre se detendrá, siempre se llegará a un axioma indemostrable que no será en el fondo más que la proposición a demostrar traducida en otro lenguaje» *(1894,* 22-3).

Aunque Poincaré no dé la demostración de la equivalencia entre el principio de inducción completa y el principio minimal o de buena ordenación ella es inmediata. Tal principio podría establecerse en los términos

(1) Todo subconjunto de los números ordinales posee primer elemento.

Poincaré no enuncia ningún otro principio equivalente, salvo en la discusión con Russell, donde señala que el principio de inducción completa es

(2) «todo número finito es inductivo» *(1906 b,* 867)

donde número inductivo es un número que hace parte de todas las clases recurrentes, número finito es un cardinal tal que '$n<n+1$', y clase recurrente es, por su lado, una clase de números que contiene '0' y que contiene a '$n+1$' si contiene a 'n' *(CM.,* 147). El paso de unas a otras equivalencias ha de apoyarse bien en el postulado de buena ordenación, bien en el postulado de elección de Zermelo, que son equivalentes entre sí. Postulado que exige un nuevo acto de intuición sintética, aceptable para Poincaré en el segundo de los casos, no en el primero y ello siempre que en las distintas formulaciones el cuantificador universal se interprete en el sentido no del infinito actual sino del potencial.

A pesar de la desconfianza hacia el principio de buena ordenación, cabe observar que en su versión minimal, para los números enteros, en su formulación (1), la proposición manifiesta la misma virtud que el principio de inducción completa. Ello puede resultar paradójico, pero basta observar que el principio (1) refleja la posibilidad reiterativa de una misma acción sobre una sucesión ordenada: la elección de cortes y, en cada uno de ellos, la elección de un primer elemento del subconjunto infinito.

Por otro lado, el mencionado postulado de elección de Zermelo recibe el calificativo de juicio sintético a priori; el matemático francés precisa: «sin el cual la 'teoría cardinal' sería imposible, tanto para los números finitos como para los infinitos» *(1906 a,* 313). Señalando dos páginas después, «aunque yo esté más bien dispuesto a admitir el axioma de Zermelo», frase que cobra su pleno sentido si se tiene presente que va dirigida contra la posición de Russell, quien —como ya he citado— venía a decir de este axioma que era «no verdadero sin alguna restricción» *(1905 b,* 52), y ello porque su carácter lógico no se le aparecía como ciertamente asegurado. Pero si Poincaré estima que sin este postulado la 'teoría cardinal' es imposible, y el principio de inducción completa es tal que permite la construcción de la teoría, ambos han de ser, de alguna forma, equivalentes. De hecho lo que puede demostrarse, en el interior de un sistema axiomático, es que el postulado de elección es equivalente al de buena ordenación en su formulación general que comprende como caso particular la versión minimal (1) y, con ello, al de inducción transfinita, que a su vez comprende como caso particular al de inducción completa. Es, por consiguiente, un postulado más potente y no meramente equivalente al de inducción, siempre que se admita el infinito actual, por otro lado [41].

Finalmente debo indicar que Poincaré hace mención explícita de la equivalencia con el principio de reducibilidad postulado por Russell para evitar las antinomias que surgen en la teoría de tipos ramificada. Negando que este axioma tenga carácter lógico alguno señala «es otra forma del mismo principio» *(1909 c,* 17). Suposición un tanto hipotética, amortiguada por un «supongo» previo.

Ahora bien, Poincaré matiza en cuanto al término 'inducción'. La inducción completa es el principio válido para la Aritmética, pero no es más que uno de los principios que se derivan de la virtud creadora del espíritu matemático. De aquí la posibilidad de manifestarse en formas muy variadas. «No quisiera decir cómo se ha creído que todos los razonamientos matemáticos pueden reducirse a una aplicación de este principio. Examinando estos razonamientos un poco más atentamente, se verán aplicados muchos otros problemas análogos, presentando los mismos caracteres esenciales. En esta categoría de principios el de inducción completa es el más simple de todos, y es por esto por lo cual lo he elegido como ejemplo» *(CM.,* 116). Pero con estas palabras tampoco Poincaré aclara cuáles sean tales principios y sus posibles equivalencias. Podrían aceptarse como tales, el de inducción completa, principio minimal, postulado de elección, construcción del continuo, postulados del orden *(1912 b,* 156). Todos ellos manifiestan, cier-

[41] Puede verse la demostración de esta equivalencia en J. de Lorenzo, *1972.*

tamente, la posibilidad reiterativa, aunque sus alcances sean distintos. De todos ellos Poincaré señalará el carácter de intuitivos y sus enlaces, aunque no sus equivalencias.

Pero aunque no hubiera establecido más que una de las equivalencias, como lo ha hecho, se mantiene la posibilidad de reemplazar uno de los postulados por una proposición equivalente para caracterizar un mismo sistema formal. Se tiene, así, la misma postura que en el caso geométrico. Sin embargo, el otro término de la disjunción de posibilidad, el reemplazo por una proposición contraria para obtener otro sistema formal que refleje la misma estructura subyacente, no se muestra factible a Poincaré. De aquí la necesidad del principio de inducción completa, manifestado en un juicio sintético a priori: «Que se ensaye en seguida a sustraerse a ese principio y fundar, negando esta proposición, una falsa aritmética análoga a la geometría no euclídea —no se podrá lograr» *(1891,* 65). No sé si Poincaré intentó la construcción de lo que él denomina 'falsa aritmética', haciendo el reemplazo de la inducción completa por su contraria. Intento, en este caso, fallido. Lo que sí puede comprobarse es que Poincaré utilizó de modo insistente este método de reemplazamiento como instrumento para poner de relieve el alcance de las diversas leyes en Mecánica, en Geometría, en Dinámica...

No haber logrado construir una 'falsa aritmética' de haberlo intentado, o haber intuido este hecho, conduce a Poincaré a la consecuencia de que la inducción completa se formula en proposición de carácter muy distinto al de los postulados que caracterizan los sistemas geométricos. De aquí la necesidad de la inducción completa para la Aritmética, equivalente, en realidad, a la necesidad de la estructura de grupo para la Geometría. Necesidad que se presenta no ya como algo subjetivo al espíritu de cada individuo, sino como una condición obligada, objetiva, de la Aritmética tal como ha sido construida por el hombre. Suprimir la inducción matemática equivaldría a suprimir la Aritmética conocida y, con ella, todos los sistemas matemáticos que se fundamentan en la misma. Equivaldría a la supresión del grupo de sólidos indeformables, con su secuela de supresión de la Geometría y, por supuesto, del Algebra. En otras palabras, equivaldría a suprimir el mismo espíritu matemático en el cual y mediante el cual se realizan las construcciones.

4. *El formalismo de Poincaré*

Podría señalarse que el formalismo que acepta Poincaré es un formalismo de carácter pragmático en el sentido de que, con independencia de la intuición, de construcciones o sistemas previos, el matemático trabaja con signos que carecen, mientras realiza ese trabajo, de todo correlato eidético o material. Pero que esta elaboración puramente inscripcionista se convierte en mero juego si el matemático cree que, con ella, puede dar razón última de su hacer. Los signos, las marcas, en sí, no son nada, al igual que los sistemas formales. Han de responder a dar relaciones elaboradas a partir de una práctica diaria y fecundada, posibilitada, siempre, por la intuición. Relaciones que han de ligarse entre sí, durante el trabajo, de carácter formal, por condiciones como la de consistencia. En todo caso, por encima de esas marcas, ligadas por convenciones no arbitrarias en sistemas formales, justificadas por una epistemología de carácter genético, se encuentra aquel que las crea como un lenguaje bien hecho para, además de sentir un goce estético íntimo, proporcionar un instrumento a quienes deseen obtener algún conocimiento de la naturaleza. El matemático ha de partir, en su trabajo, de algún dato previo, manifestación primaria de la virtud creadora, que es el número natural —que puede incluso materializarse en signo gráfico, en cifra— con su posibilidad reiterativa que adopta el plano del rigor mediante el razonamiento por recurrencia aunque utilice, igualmente, otros tipos de razonamiento de carácter lógico, de carácter analítico y tautológico.

Crítica al primer formalismo de Hilbert

Si éste puede ser el formalismo en Poincaré, se refuerza con la crítica que el matemático francés realiza del primer formalismo de Hilbert. Aunque alguno de los puntos de esta crítica haya sido mencionado en párrafos anteriores, reúno en lo que sigue los trazos más salientes:

Por lo pronto, Poincaré ve con agrado que Hilbert comparte sus ideas. Hilbert, 1904 —«trabajo capital, en el que se encontrarán los pensamientos más profundos» *(CM.,* 128, 129)—, reconoce tres hechos: 1. La lógica no puede desarrollarse con independencia total de la Aritmética, de la Matemática, sino que ambas han de ser elaboradas conjuntamente, dado que en las primeras nociones lógicas se encuentran implicadas ya nociones aritméticas y conjuntistas; en otras palabras, no puede existir una fundamentación puramente lógica de la Aritmética salvo petición de principio. 2. Dado un sistema 'S' de postulados para el que se ha demostrado la consistencia, si se agrega al mismo algún nuevo postulado, entonces hay que realizar la demostración de consistencia nuevamente para el sistema ampliado. 3. Emplea —aunque no lo reconozca de manera explícita, lo que deberá ser precisado posteriormente— la inducción completa en las demostraciones de consistencia, como en el caso de probar la no contradicción del sistema de postulados que caracterizan el signo formal '='.

Sin embargo, otras ideas hilbertianas se le muestran a Poincaré como no satisfactorias. Así,

1. En la Comunicación al 2.º Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en París, Hilbert había declarado: «Si se puede demostrar que los atributos conferidos a una noción no pueden nunca, por la aplicación de un número finito de deducciones lógicas, conducir a una contradicción, yo diré que se ha demostrado la existencia matemática de la noción en cuestión» *(Compte rendu,* 73). Poincaré, que admite la demostración de no contradicción como condición para la existencia, critica el enfoque de Hilbert de la cuestión. «Querrá decir: ¿es preciso que estemos seguros de no volver a encontrar contradicción después de un número *finito* de proposiciones; siendo, el número finito, por definición, el que goza de todas las propiedades recurrentes?» de forma que, si falta alguna, si se cae en una contradicción «¿convendríamos en decir que el número en cuestión no es finito? / En otros términos queremos decir: es preciso que estemos seguros de no volver a encontrar contradicción, con la condición de convenir en detenernos en el momento justo en que estaríamos a punto de encontrar una. / Basta enunciar una proposición parecida para condenarla» *(1906,* 302; *CM.,* 142).

2. Hilbert, en 1904, pretende definir el número ordinal mediante el empleo de signos gráficos únicamente; toma para ello como objeto de pensamiento un signo como '1', pero sin correlato alguno. Poincaré señala, sin embargo, que Hilbert escribe: «Las reuniones de este ente consigo mismo una, dos, tres o más veces...» *(1904,* 253), a lo cual no tiene derecho —es decir, comete círculo vicioso— porque aún no ha definido el número ordinal.

En otras palabras, o comete círculo vicioso, o Hilbert lo que pretende es definir dos cosas distintas; en este último caso Hilbert no ha precisado lo que pretende definir ni el enlace que pudiera haber entre ambas cosas. La intuición de Poincaré es clara: Hilbert, tiene, implícito, lo que el matemático francés revela, la distinción entre lógica e intuición, entre sintaxis o semántica, entre matemática y metamatemática.

3. Las últimas palabras vuelven a ponerse de relieve en la crítica que ya he mencionado respecto al concepto 'demostración'. Es término que Hilbert quiere matemático, lo cual obliga a que se demuestre que su definición no entraña contradicción. Por lo cual es, o bien superabundante, o hay círculo vicioso, o se habla de otra cosa y habrá que establecer las relaciones entre las cosas de que se habla.

Además, si se habla de demostración como de una mera sucesión de signos gráficos, carece de sentido la no-contradicción, porque dichos signos están delante, como la propia pizarra que puede contenerlos.

4. Hilbert emplea, para la demostración de la consistencia, el método del ejemplo o modelo. Lo cual es autocontradictorio con un enfoque pretendidamente formal y que sirva de fundamento a los restantes formalismos.

5. Se utiliza la inducción completa en dos sentidos: *a)* Para la sucesión de signos, dado que se puede reiterar el signo '1' para formar expresiones cualesquiera: es una inducción posteriormente calificada de *contenido,* tras el reconocimiento —de mala gana— de lo bien fundado de la crítica de Poincaré; *b)* Para la transmisión de atributos, y ello porque en 1904 la clave se centraba en probar que todas las fórmulas de una cierta clase poseen una cierta propiedad, la de ser 'homogéneas', apoyándose para ello en demostrar que las fórmulas iniciales la tienen y que las reglas con las que se opera las transmiten; es inducción *formal.*

El error de Hilbert, para Poincaré, consiste no en no haber empleado la inducción, sino en haberla empleado sin darse cuenta de que lo hacía.

Puede resumirse, pues, la crítica de Poincaré al primer formalismo hilbertiano en que éste no manifiesta con claridad la existencia de dos niveles en el tratamiento formal: el lógico, el intuitivo. Por el primero, en el que tiene cabida la formulación sígnica de los sistemas formales, se logra el rigor demostrativo; por el segundo, generalizante, se logra fecundar el empleo del primero. El plano lógico es formalizable; no el intuitivo. Serán los dos planos en que Hilbert, posteriormente, dividirá su teoría de la demostración. La inducción completa, en esa división, se manifiesta, tanto en el manejo material sígnico, como en las demostraciones generalizantes que permitan pasar de los cálculos aritmético y algebraico a proposiciones universales acerca de dichos cálculos, así como en el permitir, a la vez, realizar las demostraciones de consistencia de los sistemas formales así construidos.

PARTE 2

DONDE SE PRETENDE UNA VALORACION HISTORICO-CRITICA DE LA PARTE 1

Capítulo 5

EL HACER MATEMATICO NO ES TAUTOLOGICO NI ANALITICO

§ 1. Razonamientos matemáticos no creadores. Crítica

El esquema conceptual en el que se mueve Poincaré respecto a la lógica es, precisamente, el heredado de Leibniz. Lo he mencionado en el planteamiento de la posibilidad del hacer matemático. Se manifiesta con claridad al observar el cuadro de razonamientos y definiciones que elabora el matemático francés, y que no es otro que el programa de Leibniz en cuanto a las demostraciones. Consiste, en esencia, en considerarlas como reducciones a identidades mediante las definiciones explícitas, así como en la consideración de ser las 'verdades necesarias' proposiciones explícita o implícitamente idénticas. En otras palabras, las demostraciones requieren el principio de identidad —o proposiciones que pueden ser formulaciones aparentemente distintas del mismo, como el principio de no contradicción—, definiciones explícitas y la regla de que los iguales puedan sustituirse entre sí. Esta última es enfocada por Leibniz como la definición misma de la igualdad. Y es precisamente dicha regla, junto a las dos requisitorias con las que se liga, la que Poincaré indica como un razonamiento lógico —el que he calificado Cálculo con igualdad— «sea o no reducible al silogismo», sin volver a mencionarlo.

A este esquema contrapone Poincaré una crítica que se escinde en dos aspectos, material y formal, según los sentidos que cabe atribuir a los términos analítico y tautológico. Sentidos que, hay que reconocerlo, no están nítidamente especificados, delimitados en los escritos del matemático francés a pesar de lo cual he procurado esbozarlo en la exposición sistemática a él atribuible. Ambos sentidos se remiten a un plano material el analítico, a uno formal el tautológico.

Se observa que Poincaré agrupa los razonamientos y definiciones que, utilizados por el matemático en su trabajo y necesarios para el desarrollo del hacer matemático son, sin embargo, insuficientes, en dos clases: A) lógicos puros, con representante característico el silogismo tanto categórico como hipotético; B) matemáticos, como el método mal llamado constructivo y los cálculos aritmético, algebraico y con igualdad. No entra en si son o no reducibles entre sí ambos grupos aunque parezca decidirse por la negativa. Una segunda nota a tener presente es que, aun establecida esta clasificación, Poincaré emplea en ocasiones el término 'silogismo' en un sentido amplio, como sinónimo de cualquier tipo de transformación lógica, en la que cabe englobar, por ejemplo, las reglas directivas de sustitución, separación y reemplazamiento. Es matiz no utilizado por modo exclusivo por el matemático francés y obliga a precisiones si se quiere realizar una crítica en algunos pasajes determinados, como la que hizo Zermelo a Peano cuando éste pretende reducir todos los razonamientos a 'silogismos' y Zermelo ha de precisar «en el sentido Aristotélico-Escolástico» (Zermelo, *1908 a,* 187).

a) *Plano material: 'Analítico'*

La crítica de Poincaré, en él, consiste en afirmar que los razonamientos lógicos son insuficientes para el hacer matemático porque son estériles. Y son estériles porque van de lo general a lo particular, encontrándose la conclusión contenida ya en las premisas. Crítica de corte clásico, tradicional, de que el silogismo es incapaz de originar ciencia o conocimiento alguno, siendo instrumento inocuo para éste, aunque no para la corrección argumental.

Se hace imprescindible matizar, sin embargo, los términos que aquí entran en juego. Matización apoyada en el contexto general del pensamiento de Poincaré, aunque conduzca aparentemente a una interpretación no habitual del mismo.

Para ello se observa la influencia de su concepción general científica. En ella, aumento cognoscitivo viene a ser equivalente a paso, a elevación —síntesis constructiva inductiva— de una proposición calificable de experimental, de particular, a otra proposición más general y, finalmente, a una ley que las englobe y de la cual puedan obtenerse —deducción analítica— tanto la proposición particular que le da motivo al científico para crear la ley, como muchas otras también experimentales que permitan contrastar la validez de la misma. Ahora bien, el conocimiento no parece referirse sino a la capacidad que tiene la proposición general o ley de condensar muy diversas proposiciones. Las mismas no dan, no pueden dar, conocimiento de lo que las cosas son, sino de cómo se relacionan entre sí. Su operatividad se muestra en la capacidad predictiva, en anticipar posibles relaciones entre nuevos objetos. Pero si los términos que intervienen en cada proposición no pueden decir lo que las cosas son, y la proposición no es más que la expresión de la relación que existe entre los mismos, el conocimiento, en su sentido tradicional de aprehensión conceptual de la esencia de un objeto, queda anulado. Referirse, entonces, a generalizaciones o particularizaciones en cuanto a contenido cognoscitivo no parece tener, por todo ello, un muy claro significado. Este hecho se pone aún más de manifiesto en el terreno matemático si se tiene presente que, para Poincaré, el matemático maneja signos relacionales que no puede contrastar o falsar mediante interpretación directa alguna. Como signos, con sus interpretaciones en diversas realizaciones o modelos, de los cuales pueden llegar a dar la estructura formal subyacente común, las relaciones que representan podrán constituir un indudable conocimiento, pero no del querido en su aspecto tradicional conceptual.

Frente a ello el silogismo maneja proposiciones de la forma Sujeto-Predicado como relación fundamental, maneja términos conceptuales de los que tiene sentido afirmar que unos son más generales o particulares que otros. Lo cual se pone de manifiesto en modelo gráfico por la extensión de clases. Pero las proposiciones que enlazan los símbolos matemáticos, al no poseer esa forma, son construcciones, que podrán tener o no un correlato conceptual. De aquí que la generalización o particularización referida a dichas proposiciones tenga que interpretarse como una mayor o menor generalidad de dicha construcción.

Sólo de esta forma tiene sentido la atribución de esterilidad que Poincaré realiza a los Cálculos aritmético, algebraico y al método constructivo. Si los mismos tuvieran que interpretarse como pasos conceptuales de lo general a lo particular se estaría conducido a un error y ello porque el mismo Poincaré reconoce que estos procesos no son particularizadores, sino que permanecen, como mínimo, en el mismo nivel.

El ejemplo aritmético que Poincaré expone como característico del método constructivo es clarificador en este punto. Lo que interviene en la expresión 'a+1', o en 'a+2', no es otra cosa que un arreglo de signos —que podrían ser reemplazados por objetos distintos, como fichas— sometidos a unas condiciones y convenciones previamente fijadas. Precisamente porque son signos materiales, arreglos de tales signos, 'a+2' puede enfocarse como una combinación más complicada, no más general en el sentido proposicional tradicional, que la reunión de signos 'a+1'. La *demostración,* entonces, de que las reuniones de signos 'a+2' y '2+a' son iguales se reduce a una mera manipulación, a una descomposición de ambas reuniones concretas; análisis elaborado según reglas previas y convencionalmente establecidas, entre las cuales ha de contarse con el dato previo de una reunión inicial, la dada por 'a+1=1+a', por ejemplo. La demostración así interpretada de este ejemplo, será retomada por Hilbert posteriormente como modelo de demostración matemática, reemplazando únicamente los signos 'a', '1' y '+' por palotes y yuxtaposición, respectivamente.

La materialidad de la construcción, su concreción, la ligaba al Cálculo aritmético, según indiqué, y ello en el sentido de que, realmente, el ejemplo anterior lo es de dicho cálculo y no puramente del método constructivo. Ambos se pueden enfocar, sin embargo, como dos fases de un mismo proceso, en el sentido de que la materialidad constructiva concreta del Cálculo aritmético —materialidad concreta por operar con signos convencionales según reglas convencionales de un sistema de numeración— pasa a realizarse mediante figuras generales, más complicadas. De aquí que sus proposiciones posean carácter particular, no encerrando generalidad alguna, a la vez que son construcciones que requieren de la manipulación y, con ella, de intuición para ser percibidas. Generalidad que, por supuesto, no puede referirse a contenido conceptual alguno. Como lo general ha de venir referido al número cualquiera, y no a elementos concretos, resulta que estos procesos son estériles porque las proposiciones que sobre ellos se hagan han de permanecer en un mismo plano de concreción. El paso a proposiciones generales, a proposiciones que condensen en fórmula única todas sus posibles realizaciones —los posibles arreglos sígnicos materiales— y permitan predecir otras construcciones, constituye un paso inductivo sintético al igual que el terreno científico se eleva desde el plano de proposición experimental, falsable, al de ley por inducción empírica.

En este sentido cabe ligar la crítica material de esterilidad cognoscitiva con el término 'análisis'. 'Analítico' aplicado a los procesos matemáticos anteriores, no sería otra cosa que descomposición o división material de una figura en sus partes. Así, 'a+2' se analiza o descompone en la serie 'a+1+1', un polígono se descompone o divide en triángulos. Como definición, se utilizará la explícita o directa en su acepción nominal, convencional puramente, de mero abreviador sígnico para reuniones sígnicas, como en el ejemplo anterior '2' es el signo abreviador de la reunión '1+1.'.

'Analítico' aplicado a proceso lógico como el silogismo, cabría adoptarlo como disección en cuanto a las significaciones conceptuales que intervienen en los términos de cada proposición. Mediante esta disección se observa que en virtud de las significaciones, ciertamente la proposición conclusiva no puede mostrar significaciones distintas de las que intervengan en las premisas. De aquí que pueda atribuírsele el carácter de analítico al silogismo, pero ya con un matiz de contenido conceptual, que no posee en la anterior atribución. Al igual que en el caso anterior, se hace intervenir la definición explícita, pero ahora como fijadora de conceptos. Entre el signo abreviador y la reunión de signos se establecería, en este caso, no una convención nominal puramente abreviadora, sino una relación de sinonimia. Sinonimia que, al igual que en el caso del cálculo, ha de permitir el reemplazo, la eliminación de uno de los miembros por el otro en cualquier expresión en que intervengan. La definición cumple así su cometido de directiva de reemplazamiento, pero siempre eliminadora.

b) *Plano formal: 'Tautológico'*

En él señala Poincaré que los razonamientos lógicos se reducen a maneras disfrazadas del principio de identidad. Es lo que afirma de modo explícito y claro en su crítica al concepto de demostración, que sigue las líneas de la argumentación de Leibniz paso a paso. En este plano se reconoce que la Lógica sólo debe tener presente el acuerdo del pensamiento consigo mismo; en términos menos psicologizantes, que la Lógica sólo ha de tratar de las reglas de inferencia. No incumbe a la Lógica la elección de los axiomas, ni siquiera la elección de las reglas de inferencia. Le incumbe el estudio de las mismas una vez elegidas, así como de su correcta aplicación. Las reglas de transformación se apoyan, por modo exclusivo, en la transitividad de ciertas propiedades. Luego lo único que nos indicará la Lógica en procesos como el silogístico o en procesos que desde este punto de vista cabe calificar de lógicos o formales, en procesos como los matemáticos antes señalados —y que manejan no la transitividad sino las reglas de sustitución— es si una proposición se deriva necesariamente de otra; es decir, si se puede obtener de la misma por separación o *modus ponens,* o por reemplazo de alguna de sus partes por una que le sea equivalente —bien como abreviadora, bien como sinónima—, o por sustitución de alguna de dichas componentes por otra de la misma clase.

Naturalmente este enfoque nada tiene que ver con el anterior de generalizaciones, particularizaciones, etc. En él la clave se centra en la posibilidad de llevar, mediante tales reglas de transformación, tanto la conclusión como las premisas a los principios de identidad que regulan la lógica. Es, pues, un proceso calificable de tautológico. Proceso tautológico cuyo modelo es el silogismo, reducible al principio de identidad o apoyado en el mismo; pero también lo son los matemáticos de cálculos. Y ello porque en el aritmético ha de partirse de alguna combinación primaria, o algunas, y aplicando las reglas de transformación lo único que se obtiene es dicha combinación primaria —o las que se hayan adoptado—. No encierra, no puede encerrar, novedad lógica alguna, sino meramente psicológica en el caso de que la complicación de las transformaciones sea excesiva.

Hay que observar que, para realizar esta crítica debe tenerse presente que se debe partir de unos primeros principios establecidos anteriormente a la demostración, sin poder agregar nada durante la marcha de ésta. Es crítica a realizar, por consiguiente, tras la previa noción de sistema deductivo con el dato de sus primeras proposiciones y de las reglas de transformación pertinentes.

c) *Deducción-Inducción*

Los planos anteriores los engloba Poincaré, en su crítica, indicando que son 'deductivos'. La no aceptación de los mismos para el hacer matemático se encuentra en el hecho de que, según el matemático francés, existen procesos 'inductivos'.

En el plano material, centrado en el término 'análisis', los cálculos aritmético y algebraico constituyen meras manipulaciones convencionales con figuras o signos; son verificaciones; el método constructivo generaliza dicho tipo de manipulaciones y pasa a manejar signos o figuras de configuración cualquiera. Pero se mantiene en el mismo plano. Por el contrario, el hacer matemático consiste en realizar la generalización completa de esas manipulaciones materiales, formales. Ha de construir el matemático enunciados que engloben tales verificaciones en fórmula única pero que, a la vez, permitan nuevas construcciones aún no realizadas. Es mecanismo constructivo, sintético, plasmado en el tipo de razonamiento que se formula en el principio de inducción completa. En él se maneja no sólo el número cualquiera, sino que se asegura la validez de la propiedad considerada para todo natural. Es en este sentido en el cual Poincaré creo que afirma el poder creador de este razonamiento frente a los procesos formales, lógicos. El hacer matemático es englobador de proposiciones concretas, falsables. Es por lo que unas cuantas comprobaciones no caracterizan al mismo, al igual que unos cuantos experimentos no caracterizan una ley científica sino que la hacen simplemente más plausible.

§ 2. Papel de las definiciones

Interviene aquí el papel que hace jugar Poincaré a las definiciones. Las que considera como formales son, precisamente, las eliminadoras, es decir, las explícitas y las que califiqué de 'por abstracción'. En ambos casos, estas definiciones lo que permiten es o bien fijar un concepto desde el plano del significado, material, o bien abreviar unas reuniones de signos por otros en el plano formal. Son definiciones que siguen las directivas de reemplazamiento. El carácter 'creador' de las mismas es radicalmente nulo. Son meras convenciones abreviadoras de algo ya dado. Bien de algo que puede estar apoyado en la intuición sensible, y ha de despojarse de lo que de la misma permanezca, en cuyo caso se trata de fijar el significado de un término, bien de una mera abreviación sígnica material.

Si se observa lo indicado en la definición por abstracción, el mecanismo para Poincaré es el mismo: fijar un concepto a partir de una previa clasificación de elementos ya dados, o fijarlo de manera formal, abreviadora, como en el ejemplo que da de número fraccionario como dos enteros separados por un trazo horizontal. Se sitúa Poincaré en línea tradicional, mantenida en la actualidad, aunque haya existido cierta controversia acerca del carácter 'creador' de estas definiciones. Refiriéndose a la misma Kotarbinski señala: «Se trataba de saber si no existen casos en los cuales, para demostrar en un sistema dado un teorema no comportando el *definiendum* de una definición dada, es preciso introducir esta definición en el curso de la demostración. En este caso, las definiciones tendrían un carácter creador, ya que algunas de ellas serían indispensables a ciertas demostraciones. Hoy, sin embargo, (...) se rehúsa a las definiciones eliminadoras ese papel creador. Son abreviaturas o sinónimos, de los que en principio se puede prescindir» *(1964,* 309).

Tanto el formalismo como la corriente convencionalista comparten con fervor este punto de vista de ser las definiciones explícitas meras convenciones lingüísticas. Así lo expresaría con total nitidez Carnap señalando: «cómo una definición explícita no es otra cosa que una convención para emplear una nueva forma de escribir algo, usualmente de manera mucho más breve, el *definiens* o la nueva forma de escribir puede siempre ser eliminada» *(1931,* 34).

Imposibilidad de convertir en explícitas las implícitas y las inductivas

Junto al tipo de definiciones eliminadoras, no creadoras, se sitúan las definiciones implícitas. Originadas tras los trabajos de Gergonne, constituyen la base de la corriente axiomática. La eliminación por simple reemplazo es aquí irrealizable porque en ella se rompe el trazado clásico entre *definiendum* y *definiens.* Al ser una definición no lógica en el sentido tradicional del término, Poincaré admite para la misma un lugar de privilegio en el hacer matemático. Pero ello a condición de que se demuestre que no es contradictoria, es decir, que se demuestre la consistencia de los postulados definidores. De lo contrario, la definición no será creadora, sino que se ha de apoyar en la previa existencia de aquella teoría que pretenda sistematizar. En este caso la puesta en sistema axiomático consistirá, realmente, en buscar aquellas proposiciones —reduciéndolas al mínimo— que se han aceptado bien explícita, bien implícitamente a lo largo del trabajo intuitivo o, al menos, no formal puro. El trabajo demostrativo podrá caer así bajo la acusación de tautológico, por sistematizar algo ya dado previamente, sin creación alguna.

El logicismo rechaza la definición implícita, por considerarla un análisis insuficiente de conceptos. Se pretende su reemplazo por definiciones explícitas. Es lo intentado respecto al sistema de Peano para la Aritmética. Pero si un sistema axiomático admite una interpretación o modelo único —o varios pero isomorfos entre sí—, es decir, si el sistema es categórico o monomorfo, entonces podrá realizarse tal paso de definición implícita a explícita porque los términos que en ella intervienen quedarán determinados de modo unívoco. Si el sistema no es categórico, si admite modelos no isomorfos entre sí, entonces la interpretación o fijación de significados para los términos que en él intervienen no podrá quedar unívocamente determinada, por lo que una definición de tipo explícito de los mismos se hará imposible. En el caso de la axiomática de Peano las interpretaciones conocidas de los primeros años del siglo permitían esperar su categoricidad o monomorfismo y así se llegó a creer. Sin embargo, pueden elaborarse del mismo interpretaciones no isomorfas, interpretaciones no canónicas en este caso, con lo que dicho monomorfismo ha quedado demostrado que es imposible. Esta afirmación puede generalizarse a otros sistemas formales, por lo que el paso de definición implícita a explícita se muestra como un ideal sólo realizable para sistemas formales de interés mínimo.

Donde Poincaré ha señalado más nítidamente el límite respecto al papel de las definiciones y la nulidad reduccionista a explícita y, por consiguiente, a directiva eliminadora, es en el de las definiciones inductivas. De hecho, una operación como la adición entre naturales, representada por '+', no puede ser definida de modo explícito como llegó a pensar Leibniz. Su definición sólo puede venir dada de dos formas: o de modo implícito mediante las propiedades asociativas y conmutativas —propiedad asociativa que Leibniz descuidó en la verificación de su demostración analítica retomada por Poincaré, como señalaran Bolzano y Frege— o bien de modo recursivo, como insistiera Poincaré. Aunque en ninguno de los dos casos pueda eliminarse el signo '+', el matemático francés prefiere el segundo mecanismo definitorio.

En el inductivo o recurrente, dos son las proposiciones constituyentes, como ya señalé. Refiriéndose a dichas proposiciones o premisas, Kotarbinski dice: «La definición inductiva no indica la vía que permite eliminar el símbolo definido más que en el caso en que maneja la equivalencia 1. En la equivalencia 2, ese signo figura en los dos miembros. Encontrar una fórmula general de eliminación, equivalente a una definición inductiva dada, presenta dificultades. Por el contrario, es posible, utilizando una definición inductiva, eliminar el signo definido del primer miembro de la equivalencia 2, para cada uno de los *x*, por medio de marchas reductivas sucesivas» *(1964,* 308).

La dificultad de encontrar una fórmula de eliminación señalada en las palabras de Kotarbinski es total. Precisamente uno de los pretendidos éxitos apuntados en el haber logicista consiste en intentar resolver dicha dificultad. Siguiendo la idea de Frege dada en su definición de clase hereditaria, y paralela de Dedekind de su concepto de cadena —nociones impredicativas, en las que se cae forzosamente en este intento—, Mostowski, tras el trabajo de Gödel, *1931,* expresado fundamentalmente en su *teorema VII,* demuestra cómo obtener una definición explícita equivalente a la definición inductiva tipo, es decir, a la definición de dos argumentos

1. $f(1, y)=g(y)$
2. $f(x+1, y)=h(x, y, f(x, y))$

donde la función recursiva 'f' se obtiene de '1', la función sucesor y la función identidad mediante el esquema anterior en el cual 'g' y 'h' son funciones recursivas primitivas introducidas previamente *(Mostowski, 1952,* 21-23). Naturalmente la reducción se apoya en el concepto de *mínimo* o primer elemento —y se recuerda que la existencia de mínimo es equivalente a la admisión del principio de inducción completa—. Por otro lado, si bien tal reducción es posible cuando se manejan conjuntos finitos, no ocurre lo mismo cuando las clases que se han de manejar son infinitas. Para la definición inductiva utilizada en la semántica del sistema formal en el cual realiza Mostowski la reducción mencionada, como posee un carácter infinitista, no hay reducción posible a definición explícita como ha de reconocer el mismo Mostowski *(1951,* 60), siguiendo para ello la demostración de Tarski *(1931,* 177). En general, como demostrara Tarski, hay distintos tipos de definiciones inductivas de tal forma que las de orden superior no pueden ser reducidas a definiciones explícitas. En términos más próximos a los utilizados por Russell, y tomando para ello las palabras de Arthur Pap, «un símbolo definido recursivamente no es eliminable de una sentencia en la cual se presenta con argumentos variables, como $(x)(y)(x+y=y+x)$» *(Pap, 1958,* 28).

Si los procesos implícito e inductivo se muestran irreducibles, en general, a los puramente eliminatorios aparece claro que, salvo realizar una ampliación del término lógica, el hacer matemático no puede reducirse a un proceso puramente tautológico, dado que no hay posibilidad de efectuar tales reemplazamientos hasta llegar a obtener una identidad, porque las definiciones que intervienen no son eliminadoras. De aquí que, con Poincaré, deba admitirse la existencia de procesos propios del hacer matemático, procesos manifestados en la inducción o recurrencia —en el sentido de introducir elementos nuevos en el proceso demostrativo—, por un lado; en la necesidad de un cierto tipo de intuición para el manejo de las reglas de transformación, por otro, como inseparable del mecanismo demostrativo tanto formal como matemático.

§ 3. Problema de decisión. Gödel

Al argumento de no ser tautológicos los razonamientos matemáticos cabe agregar otro, desde el interior de los sistemas formales. En él no se hace distinción de niveles razonadores. Simplemente basta señalar que la reducción a identidades lógicas de una proposición aritmética determinada exigiría haber resuelto de manera definitiva el problema de decisión para las proposiciones aritméticas. Problema de decisión resuelto, ciertamente, pero de manera negativa. Es resultado que constituye una de las limitaciones de los formalismos y que se condensa en los teoremas de limitación de Church, Kleene, Turing..., por los cuales no puede construirse sistema formal alguno lo suficientemente potente como para obtener, en él, un algoritmo de decisión por el cual se sepa si una fórmula dada es o no un teorema del sistema.

Como reconoce Gödel tras precisar el sentido del término 'analítico', «puede tener el sentido puramente formal de que los términos que intervienen pueden definirse (o explícitamente o mediante reglas para eliminarlos de las oraciones que los contienen) de tal forma que los axiomas y teoremas vengan a ser casos especiales de la ley de identidad y las proposiciones refutables vengan a ser negaciones de esta ley. En este sentido aun la teoría de los naturales es demostrablemente no-analítica, puesto que se requiere de las reglas de eliminación que permitan realizar la eliminación en un número finito de etapas en cada caso. (Nota p. p.: Porque esto implicaría la existencia de un proceso de decisión para todas las proposiciones aritméticas)» *(Gödel, 1944,* 230). A lo cual agrega Gödel que este sentido de 'analítico' debería ser denominado 'tautológico'.

Si desde un aspecto formal Gödel reconoce que la Aritmética no es una tautología, sin embargo admite que pudiera calificarse como 'analítica' en el sentido aquí calificado de material. Y ello en función de que toda proposición matemática, en virtud de las significaciones, cabría reducirla a expresión de la forma '$a=a$', «siempre que la reducción se haga en virtud no de los términos que en ella intervienen, sino en virtud de su significado que no puede ser expresado completamente en un conjunto de reglas formales» *(íd.)*. Lo que no es otra cosa que afirmar lo establecido anteriormente en la crítica hecha desde el plano material.

§ 4. Frege: La no creatividad de la definición

Puede ser interesante, en este punto, comparar la posición de Poincaré con la de Frege, aunque sea brevemente. Frege polemiza violentamente con los matemáticos inscripcionistas formalistas en cuanto al papel no creador de la definición. Como Poincaré, sostiene que no basta postular un signo o marca para decir de él que es un objeto matemático existente, pero se opone a la condición de no-contradicción como equivalente a la de existencia. Por otro lado, Frege parece estimar que la definición por abstracción —una de sus creaciones— posee un carácter especial, que agrega 'algo' a lo establecido en las proposiciones de partida *(1884,* § 88). Ello implicaría aceptar un cierto carácter creador a la misma. Frente a ello, la explícita carece de tal papel creador, al igual que la implícita, en oposición aquí con Poincaré.

Así, Frege indicará que el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} x+1=2 \\ x+2=1 \end{array}\right\}$ implica una contradicción, pero sólo entre los números reales y los complejos. Por lo cual bastaría ampliar, desde un enfoque formalista, el sistema numérico «creando nuevos números de acuerdo con las nuevas exigencias», las de satisfacer el sistema de ecuaciones anterior. «Una vez así creado, todo lo que habría que hacer es esperar y ver si alguien consigue detectar en los mismos una contradicción (...). ¿Y por qué no crear aún nuevos números que permitan la suma de series divergentes? Pero basta ya: el matemático no puede crear cosas a voluntad más de lo que el geógrafo lo pueda; como a éste, únicamente le es dado descubrir lo que hay y darle un nombre» *(1884*, § 96).

El 'basta ya' cierra, o abre, polémica. Indica Frege que se sitúa en el plano de admitir una ontología realista radical. El matemático descubre como el explorador, como Colón descubrió América dirá posteriormente Russell. Pero es curioso observar que la creación de nuevos campos numéricos que satisfagan el sistema dado puede llevarse a cabo aunque, como diría Poincaré, constituya un vano juego del espíritu siempre que no se encuentre alguna aplicación experimental, una interpretación o realización en la física, por ejemplo. Y aún más el ejemplo de Frege de las series divergentes. Desde Abel y Cauchy tales series fueron desterradas del hacer matemático a pesar de que, utilizándolas, se obtenían resultados exactos. Ironía extraña, corresponde a Poincaré, pocos años después de publicado el libro de Frege, crear el concepto de *serie asintótica* con el cual manejar las series divergentes, que tras esta creación vuelven a penetrar en el hacer matemático como instrumentos totalmente lícitos en los terrenos del Análisis, principalmente con su empleo para la integración de ecuaciones diferenciales, pudiendo realizarse lo que parecía imposible a Frege. Incluso la continuación de los trabajos de Poincaré debidos a Cesaro y, sobre todo, a Fejer, han dado como resultado el constituirse en el modelo canónico de los métodos de sumación de las series de funciones, divergentes o no. (Tema al que, justo es reconocer, Rey Pastor y, principalmente, Ricardo San Juan dedicaron con éxito gran parte de su trabajo). No se han creado o ampliado más campos numéricos, pero sí métodos constructivos, generalizados posteriormente, para el manejo de unos términos. La definición en sí no ha sido la creadora, ciertamente; pero es porque ninguna definición, en sí, puede serlo. Lo es el hacer matemático que se refleja en la misma; lo otro constituye un abuso de lenguaje. El matemático, en su hacer, parte de una definición y construye o elabora nuevos métodos que se reflejarán en nuevas proposiciones y nuevos términos y, en ellos, si la definición es explícita, podrá realizar la eliminación, pero no en caso de no ser explícita.

Lo 'analítico', lo 'sintético'

En el gran lógico-matemático alemán veo, por otro lado, una de las fuentes originales en la posterior crítica que se ha reiterado a Kant respecto a su consideración de ser los juicios aritméticos juicios sintéticos a priori, fundamentada en atribuir significaciones distintas a los términos que se manejan.

Para Frege la distinción entre analítico y sintético, a priori y a posteriori no atañe al contenido del juicio sino a la legitimidad del acto de juzgar. Por ello las considera como distinciones de carácter epistemológico, pero se aparta de los matices de Kant. Dada una proposición, para saber si es analítica o sintética, Frege indica que se la debe retrotraer «hasta las verdades originarias» mediante el empleo únicamente de las reglas de inferencia y de las definiciones. Si la proposición se retrotrae a verdades originarias que son «leyes lógicas generales» y definiciones, la proposición será *analítica;* será *sintética* cuando tales verdades «no son de naturaleza lógica general» sino que están relacionadas con un campo particular del saber. Una proposición se dirá *a posteriori* cuando su prueba no puede ser validada sin alguna apelación a los hechos, es decir, a verdades sin universalidad e indemostrables; se dirá *a priori* cuando tal prueba sólo requiera leyes generales que no pueden ni precisan ser demostradas *(1884,* § 3).

Los juicios de la Aritmética han de ser analíticos, dado que si se admitieran como sintéticos a priori, «no es posible más que apelar a una intuición pura como fundamento último del conocimiento; si bien es difícil decir aquí si se trata de una intuición espacial o temporal, o de qué otro tipo pueda ser» *(íd.,* § 12). Por el contrario, los geométricos han de ser sintéticos dado que «rigen el dominio de lo espacialmente intuitivo» (§ 14).

La evolución posterior ha demostrado que los principios de la Aritmética pueden derivarse —admitiendo el infinito actual y los métodos impredicativos— de verdades originarias como las que definen axiomáticamente la teoría de conjuntos además de verdades originarias como postulados del infinito y de elección. Verdades originarias que difícilmente cabe considerar como estrictamente lógicas, por lo que este criterio de Frege da como resultado que los juicios aritméticos son sintéticos y no analíticos, en su sentido fregeano. Además, el criterio de reducir una proposición dada a las verdades originarias, como se ha indicado en el punto anterior, exigiría resuelto afirmativamente el criterio de decisión. Luego este criterio de analiticidad es, desde el punto de vista actual, irrealizable.

A pesar de lo cual, las palabras anteriores permiten obtener con claridad que el sentido de los términos 'analítico' y 'sintético' lo utiliza Frege con significado diferente al empleado por Poincaré. Se observan, sin embargo, otros puntos en el matemático alemán no menos interesantes en el contexto en el que estoy situado. Así, el criterio de la proposición contraria, que Poincaré utiliza igualmente. «Para el pensamiento conceptual se puede aceptar siempre el opuesto de este o aquel axioma, sin que uno entre en contradicciones consigo mismo, cuando saca conclusiones de tales hipótesis contrarias a la intuición. Esta posibilidad muestra que los axiomas geométricos son independientes entre sí y de las leyes lógicas primitivas; o sea, que son sintéticos» (§ 14). Es lo que no puede decirse de los principios aritméticos que abarcan lo real, lo intuible y lo pensable, por lo que son juicios analíticos. En otras palabras, Frege da un segundo criterio de analiticidad, semejante al formal kantiano: Un juicio es analítico cuando su contrario es impensable; es sintético cuando su contrario es pensable y no lleva a contradicción. Poincaré invierte las atribuciones en la aplicación de este criterio y dirá: las proposiciones geométricas son convenciones; las proposiciones aritméticas, juicios sintéticos a priori.

Ahora bien, Frege se opone también a Leibniz (§ 16) en la consideración de éste de ser las proposiciones aritméticas analíticas y, por tanto, estériles, preguntándose con un acaso la ciencia de los números se reduce a identidades y cómo es posible que de formas lógicas, vacías, se obtenga un contenido como el manifestado en la ciencia de los números. Es, nueva coincidencia, la misma pregunta y rechazo que se hace Poincaré respecto al carácter tautológico de la Matemática en *1894*. Que no se obtenga conocimiento alguno le parece claro a Frege si se detiene en la mera manipulación sígnica; de aquí que obtenga que la Matemática deba poseer un contenido, no pudiendo quedarse en mero inscripcionismo formalista. Las «verdades originarias» no pueden ser, pues, identidades lógicas —en términos de Poincaré, no pueden ser meras tautologías—. Pero al ser juicios analíticos meras consecuencias de transformaciones de las verdades originarias por el solo empleo de las reglas de inferencia y de las definiciones, la acusación de esterilidad se mantendría. Y Frege, como Poincaré, frente a Leibniz, pretende que no es éste el caso. Poincaré lo resuelve constructivamente aceptando la posibilidad de que un término sea significativo aún sin nombrar nada. Frege pretende que se nombre algo. Sin embargo, hay cierto paralelismo entre ambos. En *1884*, § 17, Frege sostiene que las verdades fundadas en la intuición deben permitir que se deduzcan de ellas nuevos enunciados no contenidos en las mismas, lo que no exime de la necesidad de extraerlos, de deducir. Cabe una posibilidad: se dejan los hechos como están y se admite su contenido como condición. Entonces, se reemplazan los hechos por condiciones (por condicionales o hipótesis) en un razonamiento de forma que de una serie de condiciones (de silogismos hipotéticos diría Poincaré) se obtiene un resultado, una conclusión. Esta sería un juicio analítico, una ley general «no sólo aplicable a los hechos presentes», aunque su descubrimiento pueda requerir de la observación (de la intuición). «Las verdades de la aritmética serían entonces a las de la Lógica lo que los teoremas son a los axiomas de la geometría. Cada una de ellas contendría concentrado en su interior todo un encadenamiento deductivo para usos futuros.» Así, según Frege, se habría superado el carácter de esterilidad de los juicios analíticos. Pero precisamente esta superación es la característica de los juicios sintéticos para Poincaré: ser construidos como proposiciones englobadoras generales, que permitan verificaciones nuevas y no sólo aquellas que le han dado origen.

Como se ve el término 'analítico' presenta en Frege tres matices, de los cuales los dos últimos mencionados corresponden al término 'sintético' manejado por Poincaré, mientras que el primer matiz correspondería al de 'tautología' tanto en el sentido de Poincaré como en el señalado de Gödel.

§ 5. 'Tautología'. Crítica neopositivista: Hans Hahn

Las palabras citadas de Gödel, la distinción de Frege se insertan en la selva de sentidos que, continuada tras los ensayos de los filósofos analistas, se ha logrado producir en torno a los términos analítico y sintético. Sentidos entre los cuales se cuenta el matizado con 'tautología'.

Apoyándose en que una tautología, plano formal, no es otra cosa que una manifestación del principio de identidad o, en otras palabras, que mediante transformaciones exclusivamente lógicas —separación, sustitución, reemplazamiento— puede llevarse o reducirse a una expresión de la forma 'a=a', Poincaré rechaza que la totalidad de las proposiciones matemáticas puedan considerarse tautológicas. Por los argumentos expuestos en el párrafo 3 anterior, la tesis del matemático francés la veo radicalmente correcta desde un plano estrictamente formal, demostradamente correcta como escribiría Gödel. Ahora bien, cabe interpretar el término 'tautología' en un sentido algo diferente, originado tras Wittgenstein.

De una proposición se puede afirmar que es tautológica cuando, además de tener un sentido dentro del sistema en el cual se elabora, carece de contenido fáctico alguno. En este caso, Poincaré admitiría sin vacilar que las proposiciones matemáticas son tautológicas, ya que es él quien insiste en que los matemáticos no tratan con objetos ni conceptos, sino con relaciones entre objetos y construcciones acerca de las mismas, etc. Con este cambio de sentido los sistemas matemáticos construidos responderían hasta cierto punto al ideal de ciencia deductiva expresado por Pascal. Incluso al postulado de realidad, por procurar el matemático que tales cadenas no sean arbitrarias y posean una interpretación en las ciencias experimentales. Interpretación que cabría apoyar en la intuición y que impediría que las mismas sean construcciones radicalmente arbitrarias, juegos al estilo del ajedrez. Se puede admitir —el mismo Poincaré lo hace— que las primeras definiciones y las condiciones a que han de someterse no son más que convenciones que fijan la forma en que se ligan unas palabras con otras para poder hablar acerca de los objetos. Con lo cual las proposiciones matemáticas no serían otra cosa que convenciones lingüísticas fijadas por el matemático, dado que la materia que éste maneja, o en el que fija su hacer, está compuesta, precisamente, por un conjunto de palabras que se pueden reemplazar por signos, formalmente. Tautologías o convenciones no arbitrarias, tampoco, dado que en su génesis, el hombre parte de la experiencia y del deseo de evitar cualquier tipo de contradicción —cuya ley no sería otra cosa que el establecimiento de cómo usar la partícula 'no'— en el desenvolvimiento de las cadenas proposicionales. En cada instante histórico, por otro lado, las circunstancias que dan paso a la aceptación de unas u otras convenciones, las circunstancias motivadoras de dichas convenciones lingüísticas, cambian. Cambio motivado, entre otros factores, por la aceptación y desarrollo de unos sistemas determinados, de unas convenciones anteriores. De aquí que, en cada instante histórico, puedan ser aceptadas nuevas convenciones lingüísticas mientras que otras deban ser relegadas por quedar incluidas en las últimas. No habría reglas apriorísticas para el razonamiento, o 'leyes del pensamiento'. Las mismas dependerán del uso de los términos respecto a la materia concreta a que se apliquen. Naturalmente las reglas no dan paso a enriquecimiento cognoscitivo alguno, sino que únicamente tienen por objeto transformar lo establecido en las convenciones de partida, y ello con pleno rigor, sin que en este paso intervenga para nada la apreciación personal individual. El enriquecimiento o la adquisición de las convenciones de partida debería encontrarse en otro plano: el de la intuición, la idea feliz, la analogía... Pero obtenido un nuevo símbolo como reflejo de alguna nueva relación, obtenida una nueva palabra que englobe muchos otros procesos, obtenida una nueva regla de transformación, la apreciación personal indicada ha de quedar eliminada en beneficio del rigor total, de la supresión de cualquier arbitrariedad electiva. No desaparecería nunca la necesidad de la intuición ya que, además de su papel en la obtención de las hipótesis de recurrencia, se muestra imprescindible para conocer las reglas que el matemático tiene que utilizar, para conocer el fin con el cual saber aplicar tales reglas de transformación en la demostración propiamente dicha.

Con el nuevo sentido del término 'tautología' podría realizarse, incluso, una extrapolación del pensamiento de Poincaré y sostener que el convencionalismo lingüístico a que conduce es consecuente con sus ideas. Es interpretación plausible. Ya lo hizo, por ejemplo, Le Roy en cuanto a los terrenos de la ciencia en general, y en cuya réplica el mismo Poincaré tuvo que reconocer que el nominalismo lingüístico parecería triunfar en la Matemática. De hecho, tal convencionalismo lingüístico es el sostenido, con sus condiciones correspondientes, por Poincaré para la expresión del hacer matemático como he señalado en Cap. 5.

Debo mantener, sin embargo, que el término 'tautología' así utilizado no corresponde al sentido en el que lo utiliza Poincaré, sino más bien al de 'convención' y que este convencionalismo lingüístico como propio del matemático francés únicamente se aplicaría a los sistemas formales construidos por el matemático, pero no a los procesos de creación y construcción sintéticos manifestados básicamente en la recurrencia y que constituyen el auténtico hacer matemático, para el cual su reflejo lingüístico es secundario.

En este punto menciono la crítica realizada por el gran matemático Hans Hahn a Poincaré en 1933 [42]. Crítica elegida por paradigmática. Tras señalar las convenciones que se adoptan en la construcción de un cálculo aritmético, Hahn afirma que no hay duda alguna en cuanto a la corrección de la idea de que la Mate-

---

[42] Especialmente Sección III, 158-9.

mática sea un edificio tautológico, aunque «la demostración del carácter tautológico de la matemática no esté completo en todos sus detalles» *(1933 b,* 158). Reconoce los méritos del criticismo filosófico de Poincaré, al que tanto deben los pensadores del Círculo de Viena, y pretende justificar el rechazo del carácter tautológico de la Matemática por parte del mismo en términos de psicología, reconociendo que es difícil aceptar que teoremas que tanto cuesta encontrar y demostrar, con resultados a veces sorprendentes, no sean otra cosa que meras tautologías. Y achaca a Poincaré olvidar un pequeño detalle en esta repugnancia psíquica: «olvida el hecho de que no somos omniscientes. (...) Un ser omnisciente no necesita lógica ni matemáticas» *(íd.,* 159). El argumento de Hans Hahn contra Poincaré estriba, en el fondo, en indicar que éste no distingue entre la novedad psicológica y la novedad lógica en la deducción lógica —cuya esencia para Hahn se encuentra en el *modus ponens (íd.,* 156)—. Distinción que sí realizaba Poincaré, como se pone de manifiesto leyendo sus escritos, por lo que la crítica de Hahn no se centra, realmente, en sus ideas. Además, es Hans Hahn quien olvida, precisamente, unos pequeños detalles muy significativos en este contexto:

a) Que es él quien argumenta desde un terreno psicológico, ya que reconoce que el programa a demostrar aún no ha sido realizado, aunque *no duda* en la futura realización de tal demostración. Y desde la certeza lógica que le produce tal ausencia de duda ataca de psicologista a Poincaré, quien argumentaba desde la certeza psicológica de que tal demostración sería imposible de llevarla a cabo.

b) Que Poincaré no se sirve, o al menos no trata de manera consciente de hacerlo, de ningún espíritu omnisciente o superior [43], sino que reitera e insiste en la necesidad de que los demás no se dejen arrastrar por el espejismo de servirse de ese espíritu omnisciente. Antes que Hans Hahn, Poincaré menciona las mismas palabras de que tal espíritu no requeriría esfuerzo alguno para hacer matemática. Palabras que, por otro lado, son muy clásicas, señaladas ya por d'Alembert, «para quien pudiera abarcarlo todo de una sola mirada, el universo no sería más que un hecho único y una gran verdad».

---

[43] Es de notar aquí el agnosticismo religioso de Poincaré y su insistencia en que la obra científica deba realizarse en ambiente de radical libertad, tanto política como religiosa, sin presiones autoritarias de tipo alguno sobre el investigador.

c) Detalle algo más importante: el término 'tautología' lo utiliza Hahn con un sentido diferente al que treinta años antes utilizaba Poincaré. Sentidos que he procurado aclarar en el punto anterior. Diferencia por la que no cabe atribuir a uno lo que ese uno no piensa. Sentidos distintos que, por ejemplo, von Mises en 1939 no olvida matizar, aunque se refiera no directamente a Poincaré sino a dos matemáticos que sostienen la misma postura, a pesar de encontrarse ligados a la escuela de Hilbert [44].

d) Que realiza una extrapolación de la naturaleza del Cálculo aritmético al resto de la Matemática. Y ello en el sentido de que tal cálculo aritmético, ejemplificado con el '7+5=12' de Kant o cualquiera de sus variantes, puede ser interpretado como teniendo presente por modo exclusivo unas convenciones que regulan el sistema de numeración decimal posicional. Pero que tal cálculo, por ello mismo, puede ser considerado como algo extramatemático, al igual que los procesos estrictamente algorítmicos como la resolución de una ecuación de primero o segundo grado. Que no pertenezcan al hacer matemático tales tipos de algoritmos quizá pueda ser afirmación todavía sorprendente para algunos, pero ello no implica que no sea correcta [45]. No significa tampoco que se deba olvidar que los mismos han sido instrumentos muy útiles al matemático, aunque en el mismo plano que las reglas lingüísticas aprendidas en su infancia, a la vez o posteriormente que las del cálculo. Y si no se interpreta en el sentido convencio-

---

[44] R. von Mises se refiere, en este caso, a «dos eminentes matemáticos contemporáneos», a quienes 'molesta' la consideración de tautología de la Matemática. La razón de von Mises es: «Se trata de una resistencia psicológicamente comprensible a una nueva terminología.» Los autores que no cita explícitamente von Mises son Hans Rademacher y Otto Toeplitz, *1930*. La observación que molesta a von Mises viene expresada al final de la obra donde se puede leer: «La demostración depende enteramente del puro razonamiento. A causa de esto queda claramente manifiesto hasta qué punto pueden ser ingeniosas y difíciles las matemáticas. En algunos casos alcanzan su meta combinando y extendiendo sus numerosas ramas, pero también revela su verdadero espíritu en ejemplos como éste, donde el razonamiento se desarrolla con la ayuda de un mínimo de conocimiento matemático. Si este último capítulo parece requerir una difícil sucesión de reflexiones, si enseña cómo puede construir la matemática una estructura real y significativa sobre una base tan ligera, entonces probablemente exhibe de la forma más evidente el verdadero motivo de este libro» *(1930*, 288). Se antepone el razonamiento matemático a cualquier posible encadenamiento deductivo.

[45] Comparar con Freudenthal, *1967*, especialmente *Intr.*, donde sostiene el mismo punto de vista, matizando la necesidad que el matemático tiene de construir tales algoritmos o, al menos, de saber cómo se construyen y cómo los resuelve una computadora electrónica.

nal sólo cabe hacerlo, entonces, desde un terreno constructivo formalista, como el señalado por Kant y seguido en este aspecto por Hilbert fundamentalmente, aunque la interpretación que he dado de dicho cálculo según Poincaré se inscribe también en esta línea. Desde la cual cabría indicar que lo importante, en un momento determinado —y serían términos muy cercanos a Poincaré— no es el cálculo en sí, sino el establecimiento del mismo, es decir, el establecimiento de, por ejemplo, si 'a' es un número y 'b' también, entonces 'a+b' es un número. Proposición que se da por aceptada en la formulación clásica. Y que conduce a observar que el niño realiza un cálculo convencional con signos —de los que desconoce sentido alguno— y maneja parte de la serie de los naturales al igual que una máquina, pero desconoce la recurrencia total necesaria para el establecimiento de la proposición anterior, proposición general que no está en condiciones de construir. En este punto ya he indicado que Poincaré aceptaría la tesis lingüística de que tal cálculo no sería más que un sistema convencional o de tautologías, pero la aceptación de esta tesis conlleva en el matemático francés la consideración de insuficiente para la construcción de las restantes parcelas que se van logrando en el hacer matemático.

§ 6. Tradición histórica de la crítica material

Los pequeños detalles que se manifiestan en los puntos anteriores como atribuidos al olvido de Hans Hahn, no son únicos del gran matemático austríaco. Tampoco, la esencia de la crítica que dirige a Poincaré. Es crítica que se inscribe en una larga tradición filosófica, que se remonta como mínimo a Bacon, Galileo, Descartes... y que contrapone aumento cognoscitivo con rigor deductivo. Tradición que se mantiene y que puede resumirse en frase de tratado escolar como «Pero se sabe hoy que el razonamiento no inventa; ordena y saca consecuencias, nada más. Es una de las reglas mejor establecidas del método científico moderno que una verdad no puede ser descubierta por razonamiento. Sólo la intuición —matemática o experimental— puede darnos a conocer una *realidad*» *(Abel Rey,* 67).

Los polos de la dicotomía Experiencia-Razón como posibles fuentes de conocimiento, sus interrelaciones, han sido una de las constantes en la historia del pensamiento, uno de sus motores.

Dicotomía en la que ha existido, en general, un leve predominio para el segundo polo, por una permanente desconfianza en la experiencia pura, en la mera observación desnuda. Muy justificable desconfianza, además. Y con el grave problema que se plantea a todo empirismo de dar justificación de la validez, aceptada universalmente, de las proposiciones lógicas y matemáticas, que no pueden derivarse de la experiencia directa, por lo que en su aceptación hacen intervenir, ya, elementos no puramente empíricos. Dualismo epistemológico que se reflejará en el dualismo Lógica-Intuición en el sentido de que por la primera se controlan, como señalaría Ernst Mach «los conocimientos tomados a otras fuentes» *(1905,* 240), cuya base radicará en la intuición. Pero ésta en sus dos formas: sensible o procedente de la experiencia, y es la que da el contenido de la intuición, y pura e independiente de dicha experiencia. Con palabras de Kant, en quien se origina realmente la diferencia anterior, aceptada como principio general en el ambiente en el que se mueve Poincaré: «Nuestro conocimiento emana de dos fuentes principales del espíritu: la primera consiste en la capacidad de recibir las representaciones (la receptividad de las impresiones), y la segunda en la facultad de conocer un objeto por medio de esas representaciones (la espontaneidad de los conceptos). Por la primera nos es dado un objeto, por la segunda *es pensado* en relación con esta representación (como pura determinación del espíritu). Constituyen, pues, los elementos de todo nuestro conocimiento, la intuición y los conceptos. (...) Ambos son o puros o empíricos: empíricos si en ellos se contiene una sensación (que supone la presencia real del objeto); puros, si en la representación no se mezcla sensación alguna» [46]. En este cuadro, la Matemática se inscribe en el terreno de la intuición pura, no en el de los conceptos.

Cuadro sostenido en el medio francés, en el cual las reglas de la lógica se ven estériles porque sirven, únicamente, para controlar los conocimientos adquiridos mediante la intuición. El silogismo, como razonamiento, no es más que el paso de juicios universales a particulares y debe ser inocuo en el sentido de no poder intervenir en el contenido del conocimiento. Son los términos que contra las reglas lógicas empleará el matemático francés, continuando la tradición, aunque ya he indicado la interpretación que

---

[46] Kant, *1781.* Parte 2.ª de la Teoría elemental trascendental. Lógica trascendental, 1. De la lógica en general, t. I, p. 198.

considero adecuada de tales expresiones en el contexto de su pensamiento.

Naturalmente la defensa contra este tipo de argumentos lanzados a procesos como el silogismo es clara y terminante desde un punto de vista estrictamente formal. Defensa que, a su vez, se ha convertido en leit-motiv para algunos pensadores ligados ya al logicismo, ya al empirismo vienés, ya al convencionalismo analítico. Los argumentos reiterados una y otra vez son [47]:

1. «El razonamiento matemático —igual que el lógico— es una técnica conceptual para explicitar lo que está implícitamente contenido en un conjunto de premisas. Las conclusiones a que conduce esta técnica no afirman nada que sea *teóricamente nuevo* en el sentido de no estar ya contenido en las premisas. Pero los resultados pueden perfectamente ser psicológicamente nuevos» (Hempel, *1945 a,* 20). Es decir, es preciso distinguir la novedad psicológica de la conclusión respecto a la novedad lógica de la misma [48]. La novedad lógica, de existir, implicaría que la conclu-

---

[47] Dos posibles consecuencias pueden obtenerse de este tipo de expresiones. Una es la mantenida por E. Mach: «Además, Kant había reconocido desde hace tiempo que las ciencias como la aritmética y la geometría no se edifican como puras deducciones lógicas, sino que otras fuentes de conocimiento les son necesarias. No se ve más en la intuición pura a priori una fuente de conocimientos» (Mach, *1905,* 241). Para Mach tal fuente de conocimientos ha de ser empírica, ya que «sin duda, pocos hombres han podido creer a la lógica capaz de crear conocimiento con nada» *(íd.),* y «la inducción completa [que Mach atribuye erróneamente a Bernoulli] como el silogismo, no amplía nuestros conocimientos *(íd.,* 242). De aquí que, a partir de la experiencia, se proceda por abstracción, etc. Es enfoque empírico que no resiste un análisis serio.

Pero igualmente se puede continuar el pensamiento de Kant en cuanto a la no deducibilidad lógica matemática, pero no por necesitar de conocimiento ajeno alguno, sino por requerir de una construcción, posibilitada precisamente por la intuición pura (ver Beth en Beth-Piaget. *1961,* cap. I); aunque tal construcción no implique de modo necesario un aumento de conocimiento, sino simplemente una posibilidad del mismo en cuanto la construcción se aplique a un determinado dominio y se pase, entonces, a la Matemática aplicada, que ya se convierte en ciencia experimental. Esta segunda corriente es la que considero como propia de Poincaré.

[48] Ver, por ejemplo, Cohen-Nagel, *1934,* t. I, 203-207. Para defensas de corte más tradicional, atacables desde el punto de vista de encerrar un cierto psicologismo, puede verse Jolivet, *1960;* Selvaggi, *1953.* Igualmente Milhaud, *1897,* donde se defiende el silogismo de la acusación de esterilidad con términos dinámicos como «El silogismo para nosotros no se opone en forma alguna a la marcha del pensamiento» (131). Y ello porque hay que explicitar las premisas, en cuya elección y, sobre todo, manejo que se hace de las mismas se verifica ya un acto sintético, que bastaría para desechar toda idea de inmovilismo e inercia.

sión es independiente de las premisas y, naturalmente, en cualquier deducción esa independencia es imposible. De aquí que la acusación de esterilidad no sea otra cosa que la afirmación de una de las condiciones formales de la validez de la deducción, precisamente. Si a la novedad a la que se refiere la acusación es a una novedad psicológica, entonces sólo cabe objetar que quien la hace comete una clara *ignoratio elenchi,* porque tal novedad psicológica hace referencia al contenido material y no a la forma inferencial.

Ignoratio elenchi cometida igualmente por quienes sostienen que el silogismo aumenta, de hecho, nuestro conocimiento, sin observar que el aumento nada tiene que ver con dicho proceso si éste se enfoca formalmente. Cabe admitir, sin embargo, que al aplicar el razonamiento formal se produce aumento cognoscitivo, pero ello es debido a que, si se obliga a seguir estrictamente un proceso razonador formal, deben precisarse muy nítidamente los elementos que en él intervienen y, a veces, se observa que se estaban realizando suposiciones no especificadas, representaciones intuitivas, construcciones mentales que deben descartarse o aceptarse, pero ya de modo explícito; precisiones y delimitaciones constituyen, ciertamente, un enriquecimiento de nuestro conocimiento. Pero ello lo hace en un estadio previo al empleo real de las reglas formales, por lo que en el mismo no se produce aumento alguno, constituyendo procesos paralelos, en metáfora geométrica [49].

2. Cuando se habla de que la conclusión está contenida en las premisas se utiliza una metáfora geométrica, al igual que al hablar de 'proceso' se puede considerar que se utiliza una metáfora jurídica o dinámica. Desde un enfoque formal, tales metáforas lo único que quieren indicar es que dicha conclusión se encuentra implicada por las premisas de partida. La acusación, al igual que la anterior, no resulta ser otra cosa, entonces, que la afirmación de otra de las condiciones imprescindibles de validez de cualquier inferencia formal. No constituye, pues, acusación alguna.

Es interesante observar que ambas defensas basadas en la diferencia entre valor formal y valor cognoscitivo atribuida a Carnap, y que se encuentra expuesta de manera general ya en Frege, de manera difusa en Mach, de manera rigurosa en Hempel, von Mises, Cohen-Nagel..., se lancen por Morris Cohen y Hahn de

[49] Puede verse, a este respecto, la justificación que de este error (ver nota 48) muy clásico da Mach, *1905,* 241 ss.

modo explícito contra Poincaré al que se acusa de cometer la reiterada *ignoratio elenchi*, cuando en éste tal diferencia y consiguientes defensas se encuentran manifestadas con radical claridad, de modo explícito, como he citado textualmente en su lugar.

La explicación de tan errónea atribución creo que se encuentra en el olvido de un pequeño detalle, consistente en la no lectura de los escritos de Poincaré. Sin embargo, podría justificarse, hasta cierto punto, tal error por la forma expositiva de Poincaré, nada sistemática. En ella, Poincaré utiliza la terminología clásica sin precisar siquiera si en su empleo cambia o no el sentido de la misma. Es lo que ocurre, por ejemplo, al sostener de modo constante que la definición ha de realizarse únicamente *per genus proximum et differentiam specificam,* cuando es método radicalmente inadecuado para el desarrollo matemático. Inadecuación, por otro lado, que sostiene de modo implícito cuando sostiene la existencia de definiciones irreducibles a las eliminadoras como las implícitas y las inductivas. Inadecuación que pone de manifiesto explícitamente Beth cuando escribe: «Finalmente, la teoría de la definición de la lógica tradicional es completamente inadecuada; únicamente reconoce la definición *per genus proximum et differentiam specificam* como satisfactoria. Consideremos como ejemplo la definición: 'Dos números naturales se dicen primos relativos entre sí si no existe número natural diferente de 1 por el que ambos sean divisibles.' Se puede estar inclinado a considerar el concepto 'número' como *genus proximum* pero esto no es correcto ya que ninguna *species* particular de números naturales está definida sino más bien una *relación* entre dos números naturales. Es por consiguiente difícil concordar la definición anterior con las concepciones tradicionales. *(Nota p. p.* Es verdad que la definición discutida puede ser formulada *per genus proximum et differentiam specificam,* si la noción de *par ordenado* se toma como genus proximum; pero si intentamos definir esta última noción, vemos que la dificultad ha sido únicamente trasladada)» (Beth, *1965,* 46).

Compatibilidad en Poincaré de las críticas formal y material

En cuanto a la mezcla de los planos material y formal en los escritos de Poincaré se puede observar que no es contradictoria si se lee con atención. El primer plano Poincaré lo acepta no en su sentido tradicional de aumento cognoscitivo conceptual sino en el de generalización como proceso constructivo, sintético; desde un plano de la intuición que posibilite dicha construcción. En este sentido, el enfoque de Poincaré sigue el sentido kantiano de sintético como construcción, en el cual se interpreta como posibilitado por la intuición y no por el concepto. De aquí que este plano material sea coherente con el puramente formal. Plano formal que critica, por otro lado, no llevándolo hasta sus últimas consecuencias, que conducirían bien al convencionalismo lingüístico apoyado en el sentido del término 'tautología' como convención lingüística, bien al formalismo inscripcionista. Si ya he mencionado la aproximación del matemático francés a la primera tendencia, se observa que Poincaré se aleja mucho más de la segunda. Precisamente de la tendencia reinante entre los matemáticos pragmáticos, como una consecuencia al parecer inevitable del proceso de aritmetización del análisis. Proceso en el cual se sitúan en el primer plano los operadores sobre conjuntos de objetos abstractos, y que pueden o no satisfacer determinadas propiedades —asociatividad, conmutatividad, distributividad, elemento neutro—. Los operadores, para ser admitidos, han de someterse al cumplimiento de estas propiedades que se enfocan, entonces, como las definiciones axiomáticas de los mismos, aunque la naturaleza de los objetos sobre los cuales operen quede sin especificar y nada importe, además, tal naturaleza. Corresponde a Hankel sistematizar esta corriente, nacida en los medios británicos de principios de siglo, convirtiendo el principio de Peacock en lo que se denominará 'principio de permanencia de las leyes formales', enunciado en 1867. Consecuencia de esta posición se tiene la afirmación de Heine, por ejemplo: «Me acojo al punto de vista puramente formal de la definición, puesto que denomino números a ciertos signos concretos, de modo que no puede cuestionarse la existencia de estos números» [50]. Posición llevada a sus extremos con carácter pretendidamente filosófico y no pragmático, por Thomae, con quien polemizó vivamente Frege. Sin llevarlo a extremos insostenibles, pero sí aceptando esta versión desde una posición casi enteramente pragmática, la concepción inscripcionista ha te-

[50] E. Heine: «Die elemente der functionenlehre», *Journal de Crelle 74,* 1872, pp. 172-188. Cita de p. 173. Tomado de Frege, prólogo al vol. I, de 1893, en Frege, *1971,* 135, y Thiel, *1972,* 44 *n.* Para la corriente inglesa y el principio de Peacock puede verse J. de Lorenzo, *1971.*

nido amplio eco entre los matemáticos ya que permite, como a Heine, desembarazarse de cuestiones como las que se refieren a la naturaleza de los objetos que se manejan. Así, la escuela bourbakista calificará a dichas cuestiones como dificultades semifilosóficas, semimatemáticas, que si bien han permitido reducir en un primer momento todos los conceptos matemáticos a los de número natural, y después a los de conjunto, tales «dificultades no se han desvanecido más que cuando se ha desvanecido la noción misma de conjunto (y, con ello, todos los pseudoproblemas metafísicos acerca de los 'seres' matemáticos» (Bourbaki, *1948,* 40 *n)*.

La aproximación de Poincaré a esta línea formalista parecía clara si se tienen en cuenta algunas expresiones en cuanto al concepto de ciencia. Ahora bien, su rechazo es más claro aún, como he señalado al hablar de la construcción del continuo matemático. El formalista inscripcionista olvida que el objeto propio del trabajo matemático no puede ser la mera marca en el papel, en la pizarra. Y el matemático ha de construir su objeto porque no todo lo ha traído hecho la naturaleza. En esa construcción, apoyada en la intuición de poder reiterar una acción, se encuentra que el razonamiento —que se mueve en la pantalla de lo posible, como precisará posteriormente Herman Weyl [51]— debe crear, también, sus propias reglas. En otras palabras, el proceso o método con el cual se manejan ciertos contenidos relacionales simbólicos no puede ser independiente de dicho contenido, ya que es este proceso el constructor del mismo. De aquí que sea imposible separar en Poincaré los dos enfoques, material y formal. Separación posible desde el formalismo y ello por el despojo de todo referencial, tanto conceptual como constructivo a las marcas que utiliza; desde el logicista en cuanto que admite la previa existencia de un mundo conceptual que el hombre se limita a descubrir, limitando los procesos constructivos a meros desarrollos de lo ya dado. Es posición nítidamente expresada por Morris Cohen, por ejemplo, rechazando toda posible virtud creadora del razonamiento humano, a pesar de que reconoce que «ningún dogma puede ignorar el hecho de que el razonamiento matemático aumenta efectivamente nuestro conocimiento» *(1913,* 205). Aumento logrado porque las proposiciones que maneja son meras reglas formales, idénticas a las lógicas, que «se aplican universalmente a todas las proposiciones» *(íd.)*, lo cual hace que ten-

---

[51] Ver tanto Weyl, *1940,* como *1949.*

gan «una esfera de aplicación tan amplia y que sean tantas las nuevas posibilidades que de día en día se descubren en su campo» *(íd.)*.

En la imposible separación de los dos planos en el pensamiento de Poincaré aparece, naturalmente, un problema: la fijación de un criterio delimitador entre aquellos procesos que se admiten como analíticos, aunque sean necesarios para el desarrollo del hacer matemático, y aquellos procesos auténticamente constructivos, caracterizadores del razonar matemático y de los cuales las proposiciones que los enuncian podrían calificarse de sintéticas a priori, de constructivas con independencia de la experiencia. Los principios analíticos, por comunes a toda disciplina, no podrán evidentemente caracterizar a una sola de ellas. La delimitación se encontraría, según el matemático francés, en la ya tantas veces reiterada capacidad reiterativa de una acción desde que la misma es posible, y que se manifiesta en la elaboración de los conceptos y estructuras centrales del hacer matemático, el espacio, el grupo, la geometría, la inducción en sus diversas manifestaciones... Así enunciada, la delimitación como capacidad iterativa posee un indiscutible carácter psicologista, matiz inevitable al pretender unificar ambos planos en su aspecto genético. Matiz psicologista que Poincaré admite como absolutamente imprescindible tanto para su posición como para las mantenidas por los demás. Desde su profesión de fe, contrapuesta a la profesión de fe de los pretendidamente antipsicologistas, el matemático ha de construir su propio objeto y en tal construcción no hay, no puede haber, regla apriorística alguna. Construcción que supone un indudable enriquecimiento, una generalización que debe apoyarse en algo propio y no en verificaciones concretas, aunque se deba someter a las reglas demostrativas que en el transcurso del proceso se elaboren, única garantía de su no arbitrariedad.

Profesión de fe de matiz psicologista. Pero también lo es, he dicho, la de quienes pretenden antipsicologizar, moviéndose en terrenos de esperanza, duda, certeza... Psicologismo que he criticado en Hans Hahn y que podría continuarse mencionando a autores como Hempel, von Mises... Este último, en paralelo a Hahn reconoce que todavía no puede darse aplicación práctica alguna, positiva, de la teoría de los tipos en la constitución de un sistema conceptual general o en la construcción lógico-matemática de un lenguaje científico amplio que abarque grandes zonas del pensamiento científico, al estilo de las utopías de Leibniz.

A pesar de lo cual «uno puede tener la esperanza de que la actual lógica matemática, uno de cuyos pilares es la teoría de los tipos de Russell constituye un primer paso hacia una útil estructura conceptual que no dé paso a tan absurdas cuestiones» *(1939,* 130). Absurdas cuestiones, para von Mises, son casualmente las provocadas por las querellas de los universales, que durante siglos han regido las discusiones filosóficas. Antiguos pseudoproblemas, reavivados, precisamente, por quienes más han defendido la teoría de los tipos, contra la esperanza depositada en la misma por von Mises.

En otras palabras, y tratando de resumir la interpretación que he dado como aceptable del pensamiento de Poincaré. La comprobación de que se verifica en unos cuantos casos, finitos obligadamente, una cierta propiedad, permite obtener una proposición general, la hipótesis de recurrencia. Dicha proposición contiene, en su construcción englobadora, algo nuevo, supone en cierta medida un aumento cognoscitivo. Tal hipótesis se construye tras una fase de tanteos, analogía, intuición sensible... Pero la misma debe ser controlada. Como encierra la posibilidad de materializarse en una infinidad de proposiciones, dicho control únicamente puede lograrse mediante un proceso no analítico, sino constructivo igualmente. En ejemplo trivial: Si '1' es un número y '1' es un número, la suma '1+1' también lo es. Se reitera este proceso material con '2' —simple abreviatura convencional de la construcción anterior— y '1', por ejemplo, obteniéndose una serie de proposiciones particulares. De ellas se pasa a una proposición en la que se afirme que 'a+1' es un número. Lo cual supone ya un cierto grado de generalización. Generalización total la expresada en 'si 'a' es un número y 'b' es un número, entonces 'a+b' es un número'. Esta implica ya una infinidad de posibles verificaciones. Las mismas se han obtenido y se pueden justificar únicamente mediante actos de recurrencia, de construcciones sintéticas. Y a partir de estas inducciones pueden demostrarse las propiedades de la adición, también por recurrencia. De aquí que se tenga, por una parte, un proceso generalizador en cuanto constructivo, englobador, y, por otro lado, un proceso inferencial apoyado en el mismo proceso y que da cuenta de esa generalización. Es el entronque, por ello, de los dos planos aparentemente contrapuestos y que, desde esta versión, no son más que dos fases o caras de un mismo proceso sintético. Motivo, a la vez, de que los razonamientos formales y tautológicos no caractericen de modo unívoco el hacer matemático, a pesar de su empleo en ciertas fases del mismo, fundamentalmente en la expresiva, en la plasmadora de las construcciones en el papel o en la pizarra. Motivo, finalmente, de que el razonamiento matemático no se muestre como tautológico ni como analítico.

CAPÍTULO 6

AUTOLIMITACION DE POINCARE A LA ARITMETICA

§ 1. LA ARITMÉTICA COMO PROBLEMA

Entornos de 1880

Rechazados los razonamientos lógicos por sus características de ser tautológicos o formales, analíticos o materiales, Poincaré se autolimita a la Aritmética elemental en búsqueda de la manifestación de la virtud creadora. Y, tras el manejo sígnico material, tras la reunión de objetos en expresiones concretas, observa que las proposiciones generales que sobre las mismas se hagan han de venir construidas por la inducción completa o cualquiera de sus equivalentes. Se muestra, de esta manera, como una síntesis englobadora a la vez que como una regla de inferencia de total rigor. Inducción completa que no es más que la más simple de las manifestaciones de la virtud creadora, insistirá el matemático francés.

Junto a este argumento, explícito en Poincaré, quizá quepa considerar otras razones por las cuales se produce esta autolimitación. Por una parte, se observa que ya en los primeros ensayos críticos —orientados básicamente hacia los terrenos geométricos— Poincaré combate la corriente de aritmetización del análisis por considerarla insatisfactoria. A la vez, se encuentran aquellos matemáticos que pretenden erradicar la intuición también de la Aritmética, enfocada de manera formalista y, por consiguiente, axiomática, mientras que, en posición antagónica, otros pretenden reducir la Aritmética a disciplina lógica, desterrando también la intuición. Explicaciones que se muestran perentorias a partir de 1880 tras la aparición de las paradojas de la intuición sensible, que obligan a demostrar lo admitido hasta entonces como intuitivo: las propiedades de la adición y multiplicación con los naturales. Según Bourbaki sólo parece haber realizado tal demostración Grassmann en 1861 utilizando para ello la operación '$x \mapsto x+1$' y la recurrencia aunque ésta de un modo implícito a pesar de que fuera enunciada por Pascal y manejada de modo explícito y luego continuara utilizándose de modo constante, aunque siempre de manera implícita (Bourbaki, *1969*, 38). Naturalmente hay que contar con el intento de demostración de Leibniz ya citado y la desconfianza que sentía hacia la validez universal de propiedades como la conmutatividad. Que se muestre necesario realizar las demostraciones se observa en el hecho de que los distintos autores lo expresen y señalen de modo claro cómo las demostraciones no existían. Todas las explicaciones parten de una misma base: la reducción del Análisis a la Aritmética, dado que a partir de los números naturales, y mediante el proceso genético o el axiomático se van elaborando los enteros, racionales, reales, complejos y, con ellos, todas las ramas de la Matemática. La Geometría permanece marginada dado que se constituye como sistema axiomático material y se justifica, en todo caso, por el Análisis —es decir, por la Aritmética— desde la reducción cartesiana. Justificar, entonces, la Aritmética, viene a ser equivalente a justificar el resto de la Matemática hasta entonces conocida.

Es concepción que, ya he indicado, no le parece correcta a Poincaré en su totalidad. Admitida para ciertas partes de la Matemática, no lo acepta para los números naturales, por una parte; por otra, el mecanismo da un salto al enfrentarse con el continuo, salto que no le parece justificado dado que esta noción es algo más compleja que la simple formulación de unos axiomas o postulados aritméticos al intervenir nociones procedentes de otros campos, por lo que ha de ser construida a partir de la previa construcción del continuo sensible, aunque en dicha construcción se necesita la misma virtud creadora que para la construcción de la propia Aritmética, es decir, la posibilidad reiterativa. A pesar de lo cual, debe darse una justificación de dicha manifestación creadora en los terrenos aritméticos, considerados como primarios e irreducibles a los demás a la vez que se le muestran como no empíricos ni definibles mediante sistema formal alguno o mediante principios lógicos exclusivamente.

En otras palabras, la autolimitación de Poincaré a la Aritmética se encuentra justificada teniendo presente que, en su entorno histórico, la corriente de aritmetización del análisis había conducido a dar explicación —a partir de los entornos de 1880— de la Aritmética como apoyatura para el resto de la Matemática.

Explicación que, a grandes rasgos, se pretende desde posiciones calificables de Empirista, Formalista inscripcionista, Axiomática, Logicista. Como objetivo central, todas tienen el deseo de desterrar la intuición en cualquiera de sus formas —salvo la primera— como elemento constitutivo del hacer matemático. Tal destierro se pretende en las dos últimas hasta de la génesis de las proposiciones y conceptos.

Es clasificación que, como todas, simplifica, ciertamente, las distintas posiciones. A pesar de lo cual la mantengo por operativa dado que la misma hace ver aún más claramente las ideas de Poincaré, por mero contraste. Voy a esbozar únicamente las tres últimas y ello en función de este contraste, aunque el mismo no lo explicite en cada punto. Esbozo, dado que el fin perseguido aquí es el de situar la obra de Poincaré en este haz de entrecruzamientos y no el estudio de las distintas posiciones. Las mismas se ligan entre sí de modo constante, lo que va a permitir confluencias posteriores, principalmente desde el aspecto metodológico. Desde el terreno conceptual permanecerán escindidas en dos grandes líneas, que se mantienen en el momento actual: la que pretende unos fundamentos combinatorios o sintácticos, la que pretende unos fundamentos semánticos o conjuntistas [52].

De la corriente empirista baste decir, como hizo resaltar Frege en 1884, que la misma se encuentra subyacente en la evidencia aceptada por todos los pensadores anteriores, desde Leibniz a Kant, desde Weiertrass a Cantor; evidencia del objeto matemático material como unidad del cual obtener agregados de multiplicidades y así pasar del 'uno' a las diversas 'magnitudes'. Evidencia intuitiva apoyada en la sensación empírica. Evidencia que se mostrará, igualmente, como esencial para comprender el formalismo inscripcionista que requiere del signo gráfico, material, y su comprensión intuitiva sensible. Que la corriente empirista estuviera ampliamente difundida se ve en el hecho de que poco antes del ensayo de Poincaré sobre el razonamiento matemático, Ballue publicaba en la misma revista un artículo sosteniendo el origen empírico de las proposiciones aritméticas y la imposibilidad de fundamentar la teoría del número natural sin hacer llamadas a la experiencia concreta de 'pluralidades' de objetos, así como igualmente atacando el diletantismo de una exposición axiomática de la aritmética, vano placer de enfocar esta disciplina como «una

[52] Ver Kreisel-Krivine, *1967*. Apéndice II.

construcción del espíritu» *(1894*, 322). Posición mantenida por Ernst Mach, *1905*, por ejemplo, en toda su pureza.

1. *Formalismo inscripcionista*

Es lugar común enfocarlo como la consecuencia propia de la Aritmetización. Su tesis central estriba en la postulación de la validez de las reglas aritméticas, que se calificarán de 'universales', de un sistema S a otro S', enfocado como una extensión del primero. Extensión considerada como una creación del espíritu humano. En ella la naturaleza de los objetos que intervienen en S' no importa, sino únicamente su forma, es decir, los postulados que los estructuran. Postulados que poseen, por consiguiente, un doble aspecto: ser directivas de creación por ser los auténticos caracterizadores del sistema ampliado, a la vez que ser postulados, hipótesis, dado que, en principio «en matemáticas nuestros razonamientos (...) tienen por principio, no constatar verdades que conciernen a existencias reales, sino determinar la filiación lógica de las consecuencias que derivan de una hipótesis dada» [53]. Lo cual implica que, al ser meras hipótesis las leyes formales, el hacer matemático se enfoque en paralelo a las ciencias experimentales, con el mismo mecanismo generalizante, inductivo o genético, pero en el cual no se contrasta con objetos reales, físicos, sino que se decreta, libremente, no importando la naturaleza de los signos con los que se opera sino únicamente que verifiquen las condiciones impuestas.

La arbitrariedad que esta libertad constructiva implicaría viene condicionada por dos principios fundamentales. Por una parte, que el sistema ampliado S' debe contener una parte que sea, en términos actuales, isomorfa al sistema S del que se origina. Es, en principio, el postulado de permanencia de las leyes formales enunciado por Peacock. Con él la libertad amplificadora queda absolutamente restringida en sus primeros momentos, así como el posible enlace con las aplicaciones, dado que se parte del número natural enlazado con las pluralidades físicas, materiales. Con ello, además, al no tener que preocuparse más que de esas leyes formales, los signos materiales que entran en juego, estructurándose, pueden interpretarse en toda su generalidad, pudiéndose apli-

[53] Stewart: *Elements de la philosophie de l'esprit humain*, vol. II, p. 106. Trad. francesa de Peisse, 1813. Tomado de Blanché, *1955*, 19.

car a distintos campos y verificarse para datos particulares. En términos de un matemático español, adaptador de la obra de Dirichlet en España: «Siempre que una combinación entre objetos expresada por los signos generales de la Aritmética universal, obedezca a leyes de variabilidad o invariabilidad —como son las leyes conmutativa, asociativa y distributiva—, dicha combinación seguirá obedeciendo a las mismas leyes cuando se sustituyan los objetos que figuran en ella por números particulares» (Jiménez Rueda, *1889,* 54).

Por otra parte, el sistema S′ se admite siempre que las condiciones impuestas sean no-contradictorias. Condición de no-contradicción ya que no puede darse un 'objeto' o interpretación sensible para dicho sistema debido a la desconfianza que se tiene respecto a tal posible interpretación sensible a causa de las paradojas de la intuición. Admisión de un sistema como equivalente a la admisión de su existencia o de su no contradicción se apoya, igualmente, en la creencia en la libertad constructiva del matemático que no ha de describir algo ya hecho —en cuyo caso sobra la demostración existencial— sino que ha de construirlo y, en tal proceso, sus decretos no pueden dar paso a contradicción alguna, porque en ese caso serían estériles. De ahí la necesidad de la no contradicción.

Ahora bien, si los objetos, su naturaleza, no importa, el matemático debe confinarse, restrictivamente, al manejo de unos signos en su práctica, manifestación de su libre poder creador, más bien manipulador. «El número ya no es hoy por más tiempo una cosa, una sustancia que exista por derecho propio aparte del sujeto que lo piensa y los objetos que dan lugar a él, un elemento subsistente por sí mismo como lo fue para los pitagóricos», afirmará Hankel en 1867 [54]. Y Heine, en las palabras que he citado, se limitará a reseñar su enfoque formalista. Enfoque desde el cual, al considerar como objetos los signos materiales, impide cualquier cuestión existencial. Lo que manifiesta Hankel diciendo «La pregunta acerca de si un número existe sólo resulta inteligible por referencia al sujeto pensante o los objetos pensados, cuyas relaciones representan números. Como imposible en un sentido estricto el matemático sólo considera a lo que es lógicamente imposible, esto es, contradictorio en sí mismo» [55]. Estos signos, que

---

[54] Hankel, *1867: Theorie der complexen Zahlensystem,* p. 6. Citado de Frege, *1884,* § 92.
[55] *Id.*

impiden desde un enfoque formalista inscripcionista plantearse cuestiones acerca de la existencia, constituyen más que el reflejo de una actividad puramente intelectual del matemático, lo que expresará el mismo Hankel «La base para la erección de una aritmética general es por lo tanto una aritmética puramente intelectual separada de toda intuición, una pura teoría de formas, que tiene por objeto no la combinación de quantos y sus imágenes, los números, sino objetos intelectuales a los que pueden (pero no necesitan) corresponder objetos o relaciones reales» [56]. Y es a estos objetos intelectuales a los que puede afectar la problemática de su existencia como no-contradicción.

Una derivación, o exageración, de esta línea es la sostenida por Thomae, quien se limita a la mera manipulación sígnica. «La concepción formal de la aritmética acepta límites más modestos que su concepción lógica. No se pregunta qué sean o hayan de ser los números, sino qué es lo que en la aritmética se exige de ellos. Para el formalista, la aritmética es un juego con signos que decimos vacíos. (...) Las reglas de la aritmética son tales que por medio de simples axiomas puede lograrse que los números se refieran a multiplicidades perceptibles» [57].

La apelación de Thomae a la experiencia sensible es clara. Su debilidad, también. Dado que si el matemático ha de limitarse al manejo de reuniones de signos, entonces se verá impotente para realizar proposiciones acerca de series infinitas de signos, como señalara Poincaré, aparte de que quedará sin justificar tal combinación si no se hace uso de principios no formalizables en el mismo plano, como los contenidos en las reglas del juego para el manejo de los signos y su propia formación. Principios entre los que el matemático francés destaca el de recurrencia. Debilidad en esta exageración formalista que se afinca en su no distinción entre juego y reglas de juego, como señalaría claramente Frege y que en términos más actuales se bautizaría entre sintaxis y semántica o lengua y metalengua del sistema formal en su intento de fundamentación combinatoria. Una segunda objeción, señalada igualmente por Frege y por Poincaré, consiste en que se debe conocer primero una justificación del por qué elegir unas reglas del juego y no otras. Lo cual supone ya, un previo conocimiento

[56] *Id.*, p. 10. Citado de Weyl, *1949,* 30.

[57] Thomae, *1898: Elementare Theorie der analytischen functionem einer complexen Veränderlichen.* Tomado de Kneale, *1961,* 418, según cita de Frege, *1903,* § 88.

intuitivo de lo que se pretende como carente de dicho contenido.
A la condición de no-contradicción en sí como equivalente a existencia dirige Frege un fuerte ataque. Afirma: «Estrictamente hablando, no hay otro modo de establecer que un concepto se halla libre de contradicción que procediendo primero a mostrar algo a lo que tenga aplicación dicho concepto. La inferencia conversa constituye, empero, una falacia» *(1884,* § 95). Frege olvida que precisamente la mostración de algo no es criterio suficiente de existencia en el terreno matemático. Conceptos como el de función continua podía mostrar 'algo' en lo cual se manifestara como no contradictorio; pero igualmente podía mostrar 'algo' que sí lo era. Y consecuentes con este criterio de mostración había que abandonar el concepto manejado, reemplazándolo por otros que dieran explicación de los distintos 'algos' mostrados. Además, si el hacer matemático se quiere consecuente, es un hacer con relaciones, luego no con conceptos, de donde la mostración se muestra inconsecuente. Por ello la imposición de la no contradicción, pero sólo para los objetos intelectuales, como indicara Hankel, y en este punto le siguiera Poincaré, ya que la existencia estrictamente inscripcionista no es cuestionable. Ello implica, naturalmente, la invariancia del concepto para Frege, dado de una vez para siempre y la varianza del mismo para el hacer matemático, variación que permite analizar en un concepto dado en un momento, varios componentes que han de desglosarse y reiterar la división. Las ontologías de base son, nuevamente, diferentes.

2. *Axiomática*

La corriente axiomatizadora se mantenía, esencialmente, en los terrenos geométricos, siguiendo la tradición euclídea. Apoyada en el postulado de dualidad de Gergonne-Poncelet, la Geometría proyectiva mostraba que lo importante en ella eran los postulados que, relacionándose entre sí, permitían caracterizar bien unos objetos (puntos-rectas, por ejemplo), bien otros, sus duales (rectas-puntos, en el caso anterior), sin más que interpretar los objetos de una u otra forma en el contexto de los postulados. Ello condujo a Gergonne a establecer el concepto de definición por postulados o definición implícita de un término, fijadora del significado del mismo por el uso que de él indiquen los postulados en los cuales se encuentre. Supone una generalización de la definición que cabría calificar contextual, no directa o eliminadora, a la que hace referencia Gergonne con las palabras: «Estos tipos de frases que dan así la inteligencia de una de las palabras de las que ellas se componen, por medio de la significación conocida de las otras, podrán ser llamadas *definiciones implícitas,* por oposición a las definiciones ordinarias, que se llamarán *definiciones explícitas*» [58].

Eligiendo de un modo conveniente un conjunto de frases o postulados se ha elegido un sistema que caracterizará, a la vez, a los términos que en tales postulados se dejen sin definición explícita alguna. Caracterización de los mismos, por consiguiente, indirecta, convertidos los postulados, en cierta manera, en definición implícita a la vez que en directivas del uso de los términos que en ellos intervienen [59]. Puede observarse que la elección de un sistema de postulados encierra en sí, al igual que en la corriente formalista, el dejar de lado problemas como los de la naturaleza de los objetos que se manejan, ya que lo único que importa es que esos objetos verifiquen las relaciones dadas por los postulados, siendo una disciplina y su dual 'modelos' de un mismo sistema axiomático que, para ser considerado como estructura englobadora de ambos, debe ser formalizado todo lo posible.

Naturalmente estas consideraciones no se llegaron a materializar o concretar súbitamente e incluso en dicha concreción encontraron cierta resistencia por parte de alguno de los matemáticos que más contribuyeron al estudio de la axiomática y, con ello, al posterior proceso de la axiomática formal.

La primera axiomatización geométrica material —dejando a un lado el problema que suscitaría los *Elementos* de Euclides— fue debida a Pasch, en 1882, con sus *Lecciones de Geometría moderna,* obra que, en esencia, «se ocupa solamente de las propiedades proyectivas de las figuras» *(1882,* VIII). Y como el autor indica en el prólogo a la edición alemana y especialmente en el escrito para la edición española, en 1912: «*La finalidad de la obra era,* en primer término, organizar completamente la Geometría como exige la naturaleza de la Matemática, y al mismo tiempo *hacer resaltar el origen empírico* de los conceptos y nociones geométricos. En realidad, en algunos trabajos [(y es clara la referencia implícita a Hilbert y la escuela italiana de Peano,

[58] Gergonne, *1818:* «Essai sur la théorie des définitions», p. 23. Citado según Enriques, *1948,* p. 129.

[59] Puede verse, a este respecto, Blanché, *1955,* p. 32.

principalmente a Padoa y a Pieri, a quienes no cita Pasch, reenviando sin embargo a Schur)] no se concede a esta tendencia todo su valor, o es relegada a segundo término» *(íd.,* IX-X) [60]. Ahora bien, aunque el origen de las nociones geométricas sea, para Moritz Pasch, empírico, resulta que él mismo destierra todo posible empirismo al igual que toda llamada a la intuición —sea en forma de figura geométrica como auxiliar, que sólo admite para hacer más aceptables los axiomas, sea en llamada intuitiva al significado de los primeros términos— en el desarrollo deductivo, que ha de ser independiente del sentido que se asigne a tales nociones y a las proposiciones que las ligan. Con ello el mismo Pasch contribuye a que deba admitirse en la axiomatización la existencia de unos conceptos primitivos indefinibles —tengan el origen que tengan, en el sentido de obtenerse de la experiencia, analogía con otros ya elaborados, de la intuición o visión de un mundo de esencias...— que pueden ser reemplazados por unos signos arbitrarios y primeras proposiciones indemostrables, a partir de las cuales deben definirse y demostrarse las restantes nociones y proposiciones, respectivamente, mediante la utilización de las reglas de inferencia.

En rápida evolución —a la que también contribuye Poincaré en los terrenos de búsqueda de axiomas implícitos, su minimalización y su valor dentro del sistema, y en los de 'modelos' de una misma estructura [61]— corresponde a Hilbert el mérito de realizar una versión prácticamente definitiva en 1889 de la axiomatización geométrica y ello en versión muy próxima al formalismo, con preocupación primordial en las convenciones o postulados de partida, manifestando que la naturaleza de los objetos que relacionan es radicalmente secundario. Hilbert une, de esta manera, tanto la axiomatización material geométrica como la formalista, aunque aún no dé el paso definitivo. Paso definitivo que se debería a otra faceta de esta misma evolución: la necesidad de un simbolismo adecuado para evitar que la intuición que se pretende suprimir aparezca por otro lado. Simbolismo que, a la vez, obli-

---

60 Subrayados míos.

61 Así, *1891* y *1892*. Refiriéndose a los modelos no-euclídeos de Poincaré, *1892*, p. 75 —en *CH.*, 83 ss.—, A. Buhl indica, «la concepción de Poincaré ha sido reproducida en todas partes, por ejemplo, por J. Hadamard en sus *Lecciones de Geometría elemental* (nota B) y, sin salir de *Scientia*, por M. Barbarin en su elegante Opúsculo sobre *La geometría no-euclídea*» (Buhl, *1912*, 67). Habría que agregar que por el propio Laurent, *1899* y *1902*, etcétera, a quien anota Buhl.

gará a precisar lo que se entiende por regla deductiva formal, no especificada hasta el momento ni siquiera por el formalismo que se apoyaba —inconsecuentemente— en un contenido de los signos con que operaba. Inconsecuencia que pretende superar Poincaré indicando cuáles de tales razonamientos pueden aplicarse bien a los significados, bien a los signos con los cuales se opera. Aunque ello de manera aún no precisa.

Richard Dedekind

Junto a la tendencia axiomática material geométrica anterior se encuentra la que pretende axiomatizar directamente la Aritmética. En este sentido hay que mencionar especialmente la figura de Dedekind, cuyas ideas serán expuestas en forma definitivamente axiomática por Peano. Es línea en la que se encontraban Schröder, Kronecker, Hemholtz. Dedekind, refiriéndose de modo explícito a las memorias de los tres citados, agregará: «La aparición de estas memorias es el motivo que me ha determinado a llevar adelante mi concepción bajo muchos aspectos semejante aunque esencialmente diferente por el fundamento.» Concepción que, como indica Cavaillés, se remonta al 24 de noviembre de 1858 y que irá plasmando en borradores que se escalonan de 1872 a 1878 (Cavaillés, *1938*, 119); conversión súbita al estilo de las sufridas por Pascal o Descartes.

Dedekind publica el resultado de sus trabajos en 1888. *Was sind und was sollen die Zahlen?*, que podría traducirse por «¿Qué son los números y cuál es su propósito?», indica ya una posición que se contrapone al formalismo inscripcionista de un Thomae, por ejemplo, para quien tal pregunta carece de sentido. No para una posición formalista a lo Hankel —que en parte comparte Poincaré— para quien la misma tiene sentido y una respuesta: realmente en paralelo a la que dará el mismo Dedekind. Quien, ya en el *Prefacio*, da contestación a sus dos preguntas así como una exposición de lo que parece entender por Lógica, que es conveniente resaltar.

Partiendo de que «todo lo que es demostrable no debe ser admitido en la ciencia sin demostración», indica que este postulado no está satisfecho en «la ciencia más simple de todas, a saber en aquella parte de la lógica que trata con la teoría de números». El objetivo de la obra consistirá, entonces, en fundamentar dicha parte con todo el rigor deseable. «Llamando aritmética (álgebra, análisis) sólo a una parte de la lógica, estoy afirmando ya que sostengo que el concepto de número es totalmente independiente de representaciones o intuiciones del espacio y el tiempo, y que creo más bien que es un producto de las puras leyes del pensamiento.» Las respuestas que da Dedekind son: «Los números son libres creaciones del espíritu humano y sirven como medio para establecer la diversidad de las cosas más fácilmente y con mayor precisión.» Por previa construcción estrictamente lógica de la ciencia de los números y su posterior manejo —manejo que conduce a su dominio por parte del matemático— éste está en condiciones de examinar las representaciones espaciotemporales refiriéndolas precisamente a este sistema que el espíritu ha construido a partir de las leyes del pensamiento. Y mediante esta observación —lograda únicamente mediante «un ejercicio incesante desde nuestros primeros años»— se obtendrá «la habilidad del espíritu para referir unas cosas a otras, para hacer que una cosa corresponda a otra, o para aplicar una cosa en otra, sin cuya habilidad ningún pensamiento es posible. Desde mi punto de vista, toda la ciencia de los números debe ser erigida sobre esta única, y en todo caso indispensable, fundamentación». Con ello Dedekind pretende desterrar tanto las llamadas a la intuición sensible como a la interior, apoyando todo el trabajo en la idea básica de aplicación entre cosas u objetos, en la de relación entre los mismos. Dedekind, con esta única e indispensable fundamentación, organiza la teoría de números en torno al concepto de aplicación, con el cual pretende justificar, además, la teoría completa de los conjuntos finitos y, lo que aquí interesa especialmente, la inducción tanto en su aspecto de definición como en su aspecto de demostración.

Requiere Dedekind, para ello, de los elementos siguientes: «Una *cosa* es todo objeto de nuestro pensamiento». Si «diferentes cosas a, b, c..., pueden ser concebidos desde un mismo punto de vista, por algún motivo, se pueden reunir en el espíritu y entonces se dice que constituyen un *sistema* S». Sistema que, de esta manera, no es otro que el de conjunto en su versión intuitiva, dado en su aspecto extensional mediante el postulado de comprehensión o abstracción en su versión intuitiva o ingenua. Sistema o conjunto que ha de ser determinado o caracterizado atendiendo a sus elementos y ello mediante un postulado calificado de extensionalidad posteriormente: «Un tal sistema S (...) está completamente determinado si, para cada cosa, está determinado si es o no elemento de S. El sistema S es, por tanto, igual que el sistema T (...) si todo elemento de S es también elemento de T, y todo elemento de T es también elemento de S.» Dedekind distingue entre elemento y sistema formado por el elemento, aunque parece confundir, notacionalmente, ambos términos. Como los elementos abstractos son indistinguibles entre sí, únicamente cabe establecer, desde un tratamiento lógico, relaciones entre los sistemas. Relaciones que son la unión, intersección y, fundamentalmente desde el enfoque de Dedekind, la aplicación de un sistema en otro. La aplicación admitida es la inyectiva y no por modo exclusivo la biyectiva como hacía Cantor. Con esta base conjuntista ingenua, la aplicación sobre la que va a girar todo el tratado de fundamentación aritmética será la de un sistema en sí mismo, aplicación que dará paso al concepto esencial de *cadena*. Como señalara Cavaillés: «Qué otro modo de separación, en efecto, entre conjuntos, indiscernibles aunque abstractos, que la relación de parte a todo» *(1938,* 122).

Una cadena respecto a la aplicación 'f' de S en sí mismo puede definirse en los términos:

> Si f es una inyección de S en sí mismo, un subconjunto K de S se dice *cadena asociada a f* si $f(K) \subset K$.

En otros términos, si K es cerrado bajo la aplicación 'f'. Por ser cerrado, el concepto de cadena es invariante respecto a la aplicación a la que se asocia; es decir, la cadena de una cadena es una cadena y '$f(f(K)) \subset f(K) \subset K \subset S$'. Igualmente se verifica la invariancia respecto a la unión y a la intersección. Por esta invariancia puede admitirse la existencia de la *cadena propia* de cualquier subconjunto K de S, indicada por K_0, y que no es más que la intersección de *todas* las cadenas que contienen a K. Se observa que este concepto de cadena propia encierra, ya, un proceso de iteración indefinida, aunque transfinita, ya que su formación exige la intersección de *todas* las cadenas obtenidas mediante la reiteración de la misma aplicación.

A partir de los elementos anteriores Dedekind puede justificar el principio de inducción completa, principio que cabe formular para sistemas y aplicaciones inyectivas en los términos:

> Si una propiedad es verdadera para K y si la aplicación f la transmite, entonces tal propiedad es verdadera para la cadena propia de K, K_0, respecto a f.

La demostración de esta proposición es inmediata, pero hay que observar que, para realizarla, se ha de partir del concepto de sistema, encajamiento de sistemas —reflejo de la transitividad de la aplicación f y de la propiedad de cierre que entraña—, reiteración transfinita de una aplicación u operación —aunque Dedekind pretenda que la justificación obtenida es independiente del infinito, introducido por definición y consiguiente demostración posteriormente.

Introducción obligada, ya que con sólo estos dos conceptos, sistema y aplicación, dado que la reiteración no se cuenta de modo explícito, Dedekind no puede seguir justificando la Aritmética. Requiere el sistema infinito porque ya en la justificación previa, si no se admite, la inducción matemática realmente no existe. De esta forma, la introducción del infinito creo que es tardía, dado que ya se ha tenido que suponer, aunque de modo implícito, que los sistemas de partida lo eran para poder definir el concepto de cadena propia según el objetivo final propuesto.

Admitido el conjunto infinito Dedekind tiene que distinguir, entonces, entre los conjuntos infinitos y los finitos, siendo estos últimos un subsistema o parte propia de los primeros. La introducción del conjunto infinito la realiza Dedekind en dos versiones, realmente. Por un lado, aceptando la existencia de «un mundo de mis pensamientos», del que cada individuo posee una imagen, pensamiento de tal pensamiento, que es biyectiva con tal mundo. Como se puede tener el pensamiento de un pensamiento, el proceso reiterativo es claro, y el mundo total de tales pensamientos sería infinito; aunque, realmente, sería un infinito potencial. Sin embargo, Dedekind se detiene no en la reiteración del pensamiento de pensamientos, que supondría ir agregando un mundo en cada instante, por así decir, sino en la relación que puede establecer entre esos mundos, con lo que da por supuesto la existencia de la infinidad de dicho mundo de pensamientos. La segunda versión hace que el concepto de conjunto infinito dependa de la aplicación del todo a la parte, como en la equipotencia de conjuntos, que permite dar paso a la cardinalidad en el enfoque de Cantor.

Es en este segundo enfoque donde la introducción del infinito supone un cambio revolucionario metodológico: si el infinito se introduce por la iteración —sea transfinita o finita— el mismo vendría a depender entonces del orden preexistente y la inducción completa no podría ser fundamentada salvo petición de principio; si el infinito se introduce mediante la aplicación biyectiva de un sistema con una de sus partes propias, entonces cabe definir el orden y, con él, la reiteración que supone, es decir, la inducción completa a la que es equivalente. Es el enfoque seguido por Dedekind cuando define: Un sistema S se dice infinito si existe una aplicación biyectiva f en una subclase propia de S; si la aplicación no existe, el sistema se dirá finito. Tras lo cual, Dedekind pasa a caracterizar, realmente, el sistema de los números naturales N.

Un sistema N se dirá *simplemente infinito* si es la cadena propia de uno de sus elementos respecto a la aplicación biyectiva f de N en una de sus partes propias. Tal elemento, que cabe consignar como generador, no pertenece a la imagen f(N) de N mediante f. Con lo cual puede decirse que un sistema simplemente infinito N no es más que la cadena propia de un sistema unitario [62]. Es claro que todo sistema infinito contiene un sistema simplemente infinito y que se encuentra ordenado por la aplicación f que lo define. Se comprueba, igualmente, que todo elemento precede, en dicho orden, a su imagen y que la ordenación es buena ordenación, por lo que toda parte del sistema tendrá primer elemento. El primer elemento del sistema simplemente infinito, que precede a los restantes, se denomina *número básico.*

En resumen, las condiciones que Dedekind impone a un sistema N para que sea simplemente infinito son: existencia de un elemento o número *e* en N y de una aplicación f de N en sí mismo como elementos indefinidos que satisfacen las condiciones:

1. $f(N) \subset N$
2. $N = \{e\}_0$
3. $e \notin f(N)$
4. f es biyectiva, es decir, $\forall\,(a, b) \in N \times N\ (a \neq b \Longleftrightarrow f(a) \neq f(b))$

---

[62] «Si quisiéramos evitar mi expresión técnica 'cadena', diría: un elemento n de S pertenece a la sucesión N si y sólo si n es un elemento de *toda* parte K de S que posee las siguientes propiedades: (i) el elemento 1 pertenece a K y (ii) la imagen f(K) es una parte de K. En mi lenguaje técnico: N es la intersección 1_0, o $f_0(1)$, de todas aquellas cadenas K (en S) a las que pertenece el elemento 1. Sólo ahora la sucesión N está caracterizada completamente» (Dedekind, *1890,* 101). Es decir, sólo tras el concepto de cadena propia queda justificada una afirmación como 'saber si n es o no elemento de la sucesión de naturales N'. Afirmación que, si se supone conocida la sucesión N podría establecerse en la forma: n pertenece a N si y sólo si reiterando el número 1 —o reiterando un número finito de veces la aplicación f o sucesor— se obtiene n. Pero este procedimiento no asegura que, dado un término t fuera de N, sea o no alcanzable en N a partir de 1. Encerrando lo anterior, además, un posible círculo vicioso *(id.,* 100).

Limitado a un sistema simplemente infinito Dedekind demuestra la posibilidad de la recurrencia, principalmente de las definiciones por inducción, observando que la inducción completa es válida para toda cadena —como ya se ha hecho notar— mientras que las definiciones por recurrencia lo son únicamente para cadenas del tipo simplemente infinito. A pesar de lo cual se demuestra la inducción completa, para N, enfocado como la parte común maximal de todas las cadenas que posean a *e* como elemento. Lo cual quiere decir que N se halla contenida en toda cadena que satisface el principio de inducción completa [63]. Es definición, claramente, impredicativa.

En esta justificación de las definiciones por recurrencia Dedekind utiliza ampliamente el método de demostración por inducción completa, dado que es método previamente justificado y demostrado y es el único que permite, realmente, las demostraciones justificadoras.

Elaborado el concepto de sistema simplemente infinito, Dedekind pasa a restringirlo a la serie de los números naturales. Es un proceso de sucesivas restricciones, como puede observarse, a partir de los conceptos considerados primitivos de sistema y aplicación: «Si consideramos un sistema simplemente infinito N, ordenado por su aplicación f, abstraemos enteramente la naturaleza particular de los elementos reteniendo solamente su distinguibilidad y las relaciones entre ellos que se obtienen de la aplicación f por la cual están ordenados, entonces esos elementos se llamarán *números naturales* o *números ordinales* o simplemente *números*, y el elemento inicial 1 es denominado *número básico de la serie de números N*. En vista de esta independencia de los elementos de cualquier otro contenido podemos considerar justificadamente a los números

[63] Que N es la clase minimal puede demostrarse en la forma siguiente: Sea A una clase inductiva, es decir, una clase que satisface los postulados

1. $1 \in A$
2. $x \in A \Rightarrow x+1 \in A$

Sea N la clase de los naturales pertenecientes a $A \cdot N \neq \emptyset$, ya que, al menos, $1 \in A$, luego $1 \in N$. Como, por definición, la clase de los naturales es tal que sus elementos pertenecen a *todo* conjunto inductivo, basta demostrar que N es conjunto inductivo. La primera condición, evidente. Supongamos que $k \in N$; como N está formado por todos los naturales que hay en A, resultará que $k \in A$; luego $k+1 \in A$ por 2. Al ser $k+1$ un natural, por serlo k, resulta que $k+1 \in N$. Luego N es conjunto inductivo y $N \subset A$. Por ser A una clase inductiva cualquiera, por generalización, N está contenido en todas las clases inductivas. De aquí que esté contenido en la intersección de las mismas.

como una libre creación del espíritu humano». Las relaciones o leyes que se derivan por modo exclusivo de las condiciones 1, 2, 3, 4 y permanecen por tanto invariables para todos los sistemas ordenados simplemente infinitos constituyen el objeto inmediato de la ciencia del número o aritmética.

La pretendida fundamentación de la Aritmética realizada por Dedekind se apoya, y reitero, en los conceptos de sistema y aplicación, explícitos; en la reiteración transfinita, implícito. Finalmente, en la formulación de los cuatro principios, que demuestra a partir de los conceptos anteriores, pero en los cuales se condensan todas las propiedades de la aritmética. Principios que, por consiguiente, cabría admitir como los postulados de un sistema axiomático caracterizador de la ciencia del número.

Peano

Esto último es lo que realiza, precisamente, Peano en 1889, en sus *Arithmetices Principia, Nova Methodo Exposita,* donde el objetivo es el de exponer las proposiciones de cualquier ciencia por signos lógicos únicamente, siempre que se le agreguen signos que representen los objetos de la misma. No hay, pues, intención de reducción conceptual alguna, sino que se pretende obtener la misma precisión que la lograda en el álgebra para la lógica y la aritmética (*1889,* 86). Lo que en Dedekind quedaba como idea implícita, la definición por postulados de la Aritmética, será puesta de relieve por el matemático turinés. Que, para ello, ha de unir a la corriente axiomatizadora que Dedekind sigue de modo implícito, la tendencia formalista. Peano admitirá como términos indefinidos los de 'sucesor', 'cero' —aunque de entrada admita 'uno'—, 'número natural' y la constante lógica 'ser igual a'. Términos que quedarán caracterizados o definidos implícitamente por los postulados que hoy llevan su nombre:

1. $0 \in N$
2. Si $a \in N$ entonces $f(a) \in N$
3. $a \neq b \Longleftrightarrow f(a) \neq f(b)$
4. $0 \notin f(a)$ para todo *a* de N

donde 'f' es la aplicación 'sucesor de'. A estos cuatro postulados Peano ha de agregar el principio de inducción completa, que no es más que un teorema en la construcción de Dedekind. Inducción canónica que adoptaría la forma canónica

$$5. \quad \forall f((f(0) \wedge (f(k-1) \Longrightarrow f(k))) \Longrightarrow \forall n f(n))$$

Con lo cual se observa que los postulados de Peano 1 y 5 corresponden al papel que juega el principio 2 de Dedekind, mientras que el 2, 3 y 4 corresponden a los 1, 4 y 3 respectivamente de Dedekind [64].

Con tal axiomatización cabría justificar, al menos se pretende, toda la Aritmética y, con ella, toda la Matemática. Incluso podría sostenerse la relativa independencia de la Aritmética respecto a la Lógica en cuanto a que los primeros términos son indefinibles de manera explícita, no pudiéndose reducir a otros conceptos lógicos más primitivos. Admitido este sistema axiomático, o cualquier otro que fuera más simple o elegante, el matemático axiomatizador podría considerar terminada su labor en cuanto a fundamentación o justificación ulterior de la Matemática, siempre que lograra demostrar la consistencia de sus postulados. Lo cual no se veía como problema acuciante en los entornos de 1890 y muy posteriores, así como tampoco dar una explicación más o menos satisfactoria del por qué de la elección de unos u otros postulados. A ello se unía la imperiosa necesidad de encontrar un simbolismo adecuado desde el enfoque formalista, con el cual desterrar la intuición de modo definitivo, a la vez que permitiera alcanzar el ideal leibniziano del 'calculemos' mediante una lengua característica adecuada. Necesidad entrevista por la escuela italiana —así como por Frege— y a cuya satisfacción dedicaron atención preferente, logrando una notación casi enteramente adecuada.

---

[64] Peano adopta nueve axiomas como propios de la Aritmética. De ellos, cuatro versan acerca de la identidad —sus 2, 3, 4, 5— permaneciendo los restantes como los 'axiomas de Peano'. Los mismos son:

1. $1 \in N$
2. $a \in N \Longrightarrow a+1 \in N$
3. $a, b \in N \Longrightarrow (a=b \Longrightarrow a+1=b+1)$
4. $a \in N \Longrightarrow a+1 \neq 1$
5. $A \in K \wedge 1 \in A \wedge (x \in A \Longrightarrow x+1 \in A) \Longrightarrow (A \Longrightarrow K)$

La formulación del principio de inducción está realizada en términos de clases, envolviendo la noción de clase de todas las clases K.

Notas críticas

Ahora bien, la pretendida fundamentación realizada por Dedekind, así como la orientación axiomática dada a la misma por Peano, presentan una serie de cuestiones que las hacen insatisfactorias. Entre ellas menciono:

1. La elaboración de Dedekind se vicia de psicología al tener que hacer llamada al mundo de los pensamientos para poder manejar el sistema infinito. Y si logra paliar tal fallo dando el criterio de infinitud mediante la aplicación biyectiva resulta que el mismo es insostenible, como señalara Beth: «la demostración de existencia dada por Dedekind, y la demostración de la existencia de un conjunto infinito de la que ella depende son insostenibles» *(1955,* 19). Mientras que Hilbert indicaba: «En cierto aspecto podría designar a su método como *trascendental,* puesto que conduce la demostración de la existencia del infinito por caminos cuya orientación fundamental es utilizada de manera semejante a la filosofía, caminos que ciertamente yo no puedo tomar como practicables y seguros, a causa de las inevitables contradicciones que se presentan en la noción que emplea de la totalidad de todos los objetos» *(1904,* 252), clave de las antinomias cantorianas.

2. Pretende dar una explicación de carácter puramente lógico a partir de unos conceptos como sistema y aplicación, pero desemboca en un sistema realmente axiomático. Metodológicamente supone un análisis insuficiente, y un giro no muy correcto.

3. Su caracterización lo es de los sistemas simplemente infinitos. Pero pretende dar cuenta de un sistema denominado de los números naturales. Para ello ha de realizar nueva psicología, y emplea la capacidad abstractiva del pensamiento respecto a la naturaleza de los objetos que intervengan en las diversas multiplicidades. La caracterización de los naturales no es, pues, satisfactoria. Por otro lado, su sistema N ha de contener 'todas' las propiedades de los naturales. Pero ello supone que las mismas sean conocidas y se encuentren enumeradas, con lo cual se cometería un círculo vicioso porque tal enumeración exige el empleo del número natural que se pretende definir, como señalara Poincaré. De aquí el paso dado por Peano de considerar como enumeración implícita de las mismas los cinco postulados. Pero ello incide en el cambio de finalidad señalado en 2.

4. Si se admite que el fin es dar la axiomática de los naturales se observa que los postulados caracterizan cualquier progresión y no meramente la de los números naturales. Lo cual queda explícitamente reconocido por Dedekind. La relación que liga las distintas progresiones —o sistemas simplemente infinitos— ha de ser biyectiva y tal que mantenga sus ordenaciones respectivas, como indica el matemático alemán. Pero ello sólo es posible si el sistema se encuentra axiomatizado mediante el transporte de todas las proposiciones —lo cual es imposible por la infinitud— o bien mediante un razonamiento por inducción completa, que se encuentra entre las proposiciones a transportar. Habría que acudir, entonces, a un metaprincipio de inducción completa para justificar la inducción completa, o admitir que la misma no se encuentra justificada.

5. La aplicación biyectiva a establecer entre sistemas retiene de éstos por modo exclusivo su distinguibilidad, no sus cualidades. Pero en este caso se están admitiendo ya como unidades en cuanto a cantidad, por lo que el número que pretendía definirse posteriormente como elemento de N se ha introducido ya en el sistema, sustituyendo a los objetos cualificados las unidades numéricas cualesquiera [65].

6. Se requiere, para la definición de cadena propia, de la intersección de *todas* las cadenas que la contengan, luego se exige que ya esté contenida en dicha totalidad. La definición de cadena propia es impredicativa. La construcción de Dedekind, por consiguiente, contiene una de las claves para la aparición de las paradojas, luego es insostenible (Poincaré).

7. El principio de inducción completa ha de encerrar una generalización respecto a *todas* las propiedades de los números naturales para que pueda verificarse la categoricidad del sistema de axiomas. En este caso, se cae en la misma suposición que la de «todos los conjuntos», encerrando el mismo tipo de antinomias que éste.

Si Peano transforma la línea de Dedekind en una formulación radicalmente axiomática cabría, igualmente, mantener que hay en el pensamiento del matemático alemán un segundo enfoque, quizá

[65] Puede verse Piaget, *1960,* 6 ss., y *1972,* § 25.

más explícito, de reduccionismo de la aritmética a los principios estrictamente lógicos. Y ello en función de que parte de los conceptos de sistema y aplicación para definir cualquier otro elemento aritmético. Como observara Weyl: «Siguiendo a Dedekind, se dice que un conjunto C de números naturales es una *cadena* si, para todo número x contenido en C, su 'imagen' $x'=x+1$ también pertenece a C. El hecho de que cualquier número natural se puede alcanzar comenzando por 1, pasando a su imagen $1'(=2)$, obteniendo por repetición $2'(=3)$, y *así sucesivamente* —la idea de este 'y así sucesivamente', que parece lógicamente irreductible, pero constituye la esencia de la sucesión de los números naturales, se expresa según el siguiente principio: *Toda cadena que contiene al 1 es idéntica con todo N_0*. Por lo tanto la inducción completa puede basarse en el uso transfinito de los conceptos 'todo' y 'existe'; de esta manera la teoría de conjuntos elimina la separación entre las matemáticas y la lógica» *(Weyl 1949,* 53). En otras palabras, la inducción completa quedaría justificada desde un enfoque conjuntista. En lo que se encontraba de acuerdo Beth cuando, al discutir el razonamiento por recurrencia y las objeciones que hiciera Poincaré a la reducción del mismo al silogismo, agrega: «La primera objeción ha sido hecha ya por Poincaré, quien concluye que el razonamiento por recurrencia no es susceptible de una justificación lógica y quiere fundarlo sobre una intuición original de las matemáticas. Esta conclusión no está justificada; veremos, en efecto, que es posible dar una justificación lógica del razonamiento y de la definición por recurrencia» *(1955,* 16)[66]. Justificación lógica apoyada en la exposición de la obra de Dedekind. Sin embargo, tal fundamentación desde el punto de vista de la teoría de conjuntos no puede identificarse, sin más, con una justificación lógica, dado que la teoría de conjuntos deberá fundamentarse, a la vez, en los terrenos de la axiomática para superar algunas dificultades, entre otras las apuntadas en los puntos 6 y 7 anteriores.

Cabe observar, finalmente, que la fundamentación de los números naturales en el enfoque de Dedekind es primariamente ordinal, lo cual mantendrá Peano —y posteriormente Poincaré y la axiomática conjuntista—. El número cardinal aparece mediante la biyección entre el conjunto de los naturales y los elementos del conjunto a numerar. De esta forma el cardinal lo es de un conjunto

[66] Ver, igualmente, Beth, en Beth-Piaget, 1961.

ordenado en el cual se prescinde, realmente, de este orden. Es consecuencia, este enfoque, de la motivación explicativa de Dedekind para la Aritmética: observar, por así decir, a ésta y a la sucesión natural como un hecho empírico —ontología, en el fondo, realista, a pesar de su afirmación de ser libres creaciones del espíritu humano— obteniendo las propiedades centrales, a justificar posteriormente. Actitud metodológica narrada por él mismo en *Dedekind 1890*.

3. *Logicismo: Gottlob Frege*

Camino paralelo al segundo enfoque de la obra de Dedekind es el seguido por Gottlob Frege, pero llevado hasta el final, sin giro metodológico axiomatizador. Giro en el que se apoyará la construcción axiomática posterior de la teoría de conjuntos, por mostrarse más operativo para el hacer matemático que el radicalismo analizador fregeano, además de ser uno de los caminos superadores de las antinomias implícitas tanto en la construcción de Dedekind como en la de Frege. El análisis de éste se pretende más radical, con base exclusiva en la Lógica, con destierro del psicologismo en cualquiera de sus formas o manifestaciones, lo que entraña una inversión respecto a los planteamientos anteriores. En apoyo de esta inversión Frege ha de crear un simbolismo adecuado, así como producir modificaciones sustanciales en lo que hasta el momento se consideraba lógica, con distinción de planos de lenguaje y metalenguaje, demostración y reglas de inferencia, empleo de cuantificadores, etc.

Su punto de partida es el mismo que el de Dedekind, el posterior de Poincaré, el de cualquier matemático: todo lo que pueda ser demostrado, debe ser demostrado. Punto de partida que no siempre se cumple, ni siquiera por aquellos que lo anteponen como lema de sus creaciones. Frege, igualmente, establece que para fundamentar cualquier disciplina «los conceptos que se necesitan deden ser concebidos con rigor» *(1983*, 158). De aquí que se justifique una revisión crítica de lo expresado por otros autores, para mostrar cómo tal rigor se encuentra ausente. Entre esos autores, Dedekind, el más profundo de los que hasta el momento han tratado estas cuestiones. En su obra se encuentran fallos que pueden resumirse en: *a)* Psicologismo, como ya se ha indicado; *b)* Confusión, al identificar sistema de sólo un elemento con ese elemento, así como en la subordinación de conceptos o inclusión de conjuntos o sistemas, falto de una notación simbólica adecuada; *c)* Pragmatismo, al aceptar o rechazar la clase vacía —y su número 0 correspondiente— según conveniencias pragmáticas y no por un estudio estrictamente lógico, de aquí que Dedekind comience la sucesión de los naturales por '1' y no por '0' como Frege, lo cual es fundamental en ambos autores [67].

Imprecisiones en Dedekind, extensibles a los demás autores como Schröder, por no realizar un análisis sistemático de lo que Frege considera esencial, la distinción entre objeto y concepto, base de las ideas fregeanas: «la asignación de número contiene una afirmación sobre un concepto. He reducido el número a la relación de equinumericidad y ésta a la aplicación biyectiva. De la palabra 'aplicación' puede decirse lo mismo que de la palabra 'conjunto'. Ambas se usan ahora con frecuencia en la matemática, y en la mayoría de los casos falta una comprensión profunda de lo que realmente se quiere designar con ello. Si es correcta mi idea de que la aritmética es una rama de la lógica, entonces habrá que elegir en vez de 'aplicación' una expresión puramente lógica. Y escojo la de 'relación'. Concepto y relación son las piedras fundamentales sobre las que construyo mi edificio» *(1893,* 161). Son las piedras equivalentes a la 'aplicación' y el 'conjunto' en Dedekind, en Cantor.

Lo que me interesa destacar es, en Frege, su intento reduccionista de la Aritmética a sólo la Lógica, apoyado en ambas piedras fundamentales y contenido en exposición no simbólica en *Los fundamentos de la Aritmética* de 1884, auténtico manifiesto del programa logicista en el que espera haber hecho verosímil «la idea de que las leyes aritméticas son juicios analíticos (...). La aritmética, por tanto, sería solamente una lógica más extensamente desarrollada» (§ 87). Aunque lo hago con brevedad y para poner de relieve, de modo casi exclusivo, los puntos de enlace con Poincaré, alguno ya mencionado como en el caso de los términos 'analítico' y 'sintético', papel creador de las definiciones y, fundamentalmente, del rechazo por parte de Poincaré de definiciones impredicativas contenidas en la exposición de Russell, heredero de Frege en cuanto al análisis conceptual, a veces al terminólogico e, incluso, al

[67] Algún autor considera esta distinción como no esencial, así Kneebone, *1963,* 147 *n.* No lo es para el desarrollo pragmático de la Aritmética, dado que $[0, n]$ y $[1, n+1]$ son biyectivos, pero sí en cuanto al aspecto de fundamentos.

de ejemplificaciones. Debo reseñar, igualmente, que en muchos momentos 'traduciré' el lenguaje conceptual fregeano a términos conjuntistas, más habituales en los terrenos matemáticos.

Tras una crítica, no sin punto de ironía en ocasiones, de las opiniones de filósofos y matemáticos en torno a los conceptos base de la Aritmética y de la cual puede afirmar: «A veces me he asombrado de que en un punto se acercan mucho a mi concepción, en otros, en cambio, se apartan tan radicalmente» *(Intr.)*, Frege acepta que «la mejor manera de deducir los números individuales es como lo hacen Leibniz, S. Mill, H. Grassmann y otros, a partir del uno y cada vez por adición del uno» (§ 18). En otras palabras, la mejor manera de deducirlos es la inductiva, método con el cual Grassmann pretende demostrar las propiedades asociativa y conmutativa de los naturales, así como posteriormente Hankel, demostración lograda de modo casi perfecto por Poincaré en 1894. Pero Frege insiste en que ello no es más que una caracterización individual, no general, y además incompleta en el sentido de que no se ha definido ni la unidad ni la adición. Se necesitan enunciados generales para deducir de estas definiciones las fórmulas numéricas y, para ello, es preciso dar la definición de número en general, así como la de sucesor de un número a otro. Por lo cual Frege pretende dar la noción de número como objeto individual y de aquello de lo que se habla en dicha noción.

Para él el número no es una propiedad de las cosas (§ 29), teniendo que excluir su uso como predicado o atributo (§ 60). Así, «Decimos 'el número uno', y con el artículo determinado indicamos un objeto determinado, único (...). En 1 tenemos un nombre propio» (§ 38). Pero al asignar un número, el mismo afirma algo de un concepto. Lo que se obtiene por abstracción de las cosas no es el número, sino el concepto al cual puede asignársele un número. «Los números sólo se asignan a los conceptos» (§ 48). Si al concepto se llega mediante la abstracción de las cosas, éste no es el único medio de alcanzarlo. «Se puede llegar también al concepto partiendo de sus características; y, en tal caso, es posible que ninguna caiga bajo este concepto» (§ 49). En otras palabras, el concepto se puede obtener mediante abstracción de las cosas que caen bajo él, o mediante sus características, que no han de ser las que lo componen. Una tercera forma, la que utilizará Frege, realmente, consiste en generar el concepto mediante la definición por abstracción, que tiene un poder unificador muy superior al de una simple apercepción sintética (§ 48). Ello permite, además, elaborar una distinción entre los conceptos. «Si, por ejemplo, se reúnen bajo un concepto todos los conceptos bajo los que cae sólo *un* objeto, entonces la unicidad es una característica de este concepto. Bajo este concepto caería, por ejemplo, el concepto 'luna de la Tierra', pero no el cuerpo celeste que lleva este nombre. De este modo, se puede hacer caer un concepto bajo otro superior, bajo un concepto, por así decir, de segundo orden. No hay que confundir esta relación, sin embargo, con la de subordinación» (§ 53). En términos extensionales y de la teoría conjuntista ello quiere decir que dado un conjunto 'C_1', éste puede ser elemento de otro conjunto de 'segundo nivel' 'C_2', y entonces '$x \in C_1$' y '$C_1 \in C_2$', pero '$x \notin C_2$', mientras que la relación de subordinación sería la de inclusión de conjuntos, es decir, '$C_1 \subset C_2$', en cuyo caso '$x \in C_2$'.

Tras estas previas caracterizaciones, los objetivos de Frege se centran en dar la definición de número en general y en la construcción de los números individuales completando las definiciones inductivas, es decir, en definir el primer elemento de los naturales y el sucesor o siguiente inmediato de un número natural, número que ha de estar, siempre, en una serie. Y ello no sólo por completar tales definiciones inductivas, sino para reducirlas a definiciones explícitas, a ecuaciones como en la aritmética. Es la clave para eliminar la independencia de los razonamientos recurrentes respecto a la lógica. Y ello porque dado un número se sabrá si es elemento de la serie mediante la aplicación reiterada del operador sucesor a partir de un primer dado, pero este mecanismo, para poner el mismo ejemplo de Frege, no permite averiguar si a un concepto determinado le corresponde el número *Julio César* y no se podría demostrar que si *a* y *b* caen bajo el mismo concepto entonces $a=b$ (§ 56). Es el mismo argumento que el utilizado por Dedekind.

Para lograr la reducción Frege utiliza un nuevo mecanismo, el de la definición por abstracción mediante el empleo de la relación de equivalencia, relación de 'igualdad' que permitirá caracterizar el número como una clase de equivalencia según una relación de equivalencia previamente dada, la aplicación biyectiva. «Parece que en tiempos recientes, la opinión de que la igualdad de números debe definirse mediante una aplicación biyectiva ha recibido muy buena acogida por parte de los matemáticos» (§ 63), y mencionará a Schröder, Kossak, Cantor, indicando que la misma puede proceder de Hume.

Ello significa que ha de estudiarse previamente la noción de los juicios relacionales «a se halla en la relación f con b». De tal forma que todo enunciado con dos variables libres se considera como una relación cuyo campo es, precisamente, un conjunto de pares ordenados. Por lo que decir que los conceptos F y G están correlacionados por la relación f significa que todo objeto que cae bajo el concepto F se encuentra en la relación f con un objeto que cae bajo el concepto G y recíprocamente. En terminología más moderna, 'afb' o bien 'fab' es una relación cuyo dominio es 'F' si 'Fa' y su recorrido es 'G' si 'Gb'. Simbólicamente,

$$fFG \equiv \forall a, \exists b((a, b) \in FxG \wedge fab))$$

La relación que interesa destacar es una relación de carácter hoy calificable de funcional, es decir, que si 'fab' y 'fac', entonces 'b=c'. Restringiendo la misma, además, a la relación biyectiva, es decir a la relación funcional en los dos sentidos (§§ 70-72).

Caracterizada así la aplicación biyectiva como relación lógica, Frege da las definiciones base de su concepto de número: Tales definiciones, establecidas por vez primera en § 68, se especifican con detalle en § 72. Son:

1. 'El concepto F es equinumérico al concepto G' significa lo mismo que 'Existe una relación f tal que a los objetos que caen bajo el concepto F les aplica biyectivamente los objetos que caen bajo G'.

$$FEqG \equiv \forall (a, b) \in FxG, \exists f, f: a \leftrightarrow b$$

2. «El número que corresponde al concepto F es la extensión del concepto 'equinumérico al concepto F'.»
3. 'n es un número' es una expresión del mismo significado que 'existe un concepto tal que *n* es el número que le corresponde'.

La última definición no es circular, como se desprende de las anteriores, a las que se remite.

La conclusión es, al menos, 'chocante' como dirá Kneale *(1961,* 428). Ya que lo obtenido es, en términos conjuntistas, que un número cardinal asociado a un conjunto 'F' es el conjunto de todos los conjuntos equipotentes —o equinuméricos— al conjunto 'F'. Que Frege percibiera la dificultad se observa en la nota que agrega al § 68, donde señala que en lugar de 'extensión del concepto' cabría poner sin más 'concepto', y ello porque 'equinumérico al concepto F' sólo puede aplicarse a conceptos, luego el concepto expresado por ella habrá de ser un conjunto de conceptos. Ello supondría una clara contradicción con lo señalado de que un número no puede ser concepto sino que ha de ser un objeto y, por otro lado, los conceptos podrían ser de la misma extensión, sin coincidir. A lo cual agrega «Creo que ambas objeciones pueden ser eliminadas; pero esto nos llevaría demasiado lejos. Presupongo que se sabe lo que es la extensión de un concepto.» Eliminación, suposición que revelan que los conceptos no estaban concebidos con rigor por Frege, no dominador del mecanismo de la definición mediante relaciones de equivalencia. Y precisamente aquí se instala, por insuficiente análisis, la gran debilidad de su construcción: la extensión del concepto, la clase de clases como se interpretará posteriormente, lleva encerrada la antinomia si no se hacen restricciones convenientes, mediante un adecuado análisis de las mismas.

Tras la definición de 'número' Frege pasa a establecer la definición de los números individuales, según el esquema dado en la forma general del contenido de un juicio «*a* cae bajo el concepto F» ('Fa'). Con lo cual '0' es el número que corresponde al concepto 'desigual consigo mismo', definición adecuada ya que ningún objeto cae bajo este concepto. Para definir otros números ha de utilizar el esquema 'n sigue inmediatamente a m en la serie de los números naturales' en el mismo significado que 'existe un concepto F y un objeto x que cae bajo él de tal tipo que el número que corresponde al concepto F es n, y que bajo el número que corresponde al concepto 'que cae bajo F, pero no es igual a x' es m'; en otras palabras, para que n sea sucesor inmediato de m es necesario y suficiente que exista un concepto F y un objeto x que satisfagan las condiciones: 1. x cae bajo F; 2. n es el número del concepto F; 3. m es el número del concepto 'cae bajo F y no es igual a x'. Con lo cual puede definirse '1' como el número del concepto 'idéntico a 0'.

Con estas definiciones Frege pasa a establecer distintas proposiciones como son:

1. 1 es sucesor inmediato de 0 y si a es un sucesor inmediato de 0 entonces a=1.
2. La relación sucesor inmediato es biyectiva.
3. Si a es un número entonces a es el sucesor inmediato de otro b.

4. 0 no es el sucesor de ningún número a.

5. Dado un concepto F y un objeto x que cae bajo él y si y es un objeto que cae bajo F entonces x=y, resulta que el número asociado a F es 1.

6. Si al concepto F le corresponde el número 1 entonces existe un objeto x que cae bajo F y si y cae bajo F entonces x=y.

Con lo cual Frege no ha dado aún la caracterización de la serie de los números naturales y, con ella, la justificación de los razonamientos inductivos. Su enfoque hace que el número aparezca, ante todo, como cardinal por lo que puede definirse un número asociado a un concepto sin necesidad de la relación anteriormente citada de sucesor inmediato. Pero, realmente, lo que se pretende es, precisamente, caracterizar tal sucesión. Y, como observara Dedekind, la misma, es decir una f-serie, corresponde a una relación que verifique, intuitivamente, las propiedades: 1. Biyectiva; 2. Tiene un único elemento inicial; 3. No tiene elemento final; 4. Dos miembros cualesquiera de la f-serie pueden relacionarse entre sí mediante un número finito de etapas. La idea de f-serie es, así, la de toda progresión y no sólo la de los números naturales. De aquí que Frege caracterice, en primer lugar, tal idea intuitiva de progresión con toda generalidad para después restringirla a la de los números naturales. Es el mismo proceso que el efectuado respecto a los números individuales. En este punto, § 79, Frege hace llamada a que tal concepto fue definido en su *Begriffsschrift* de 1879. En el mismo, dada una f-serie, Frege define respecto a la misma una propiedad F como hereditaria *(1879,* § 24). El sentido de esta propiedad lo ejemplifica familiarmente: la relación 'f' puede ser la de 'hijo de', mientras que la propiedad 'F' puede ser la de 'ser humano'; cada hijo de un ser humano es un ser humano. Por lo que 'ser humano' es propiedad hereditaria respecto a la relación 'hijo de'. Es relación que puede expresarse en los términos

$$\mathrm{Her}\,(F, f) \equiv \forall x(Fx \wedge fxy \Rightarrow Fy)$$

Tras lo cual pasa a definir la relación 'descendiente', o 'antepasado' o 'ancestral', en términos de 'y es sucesor inmediato de x' o 'x precede de modo inmediato a y'. La relación de ser ancestral en la f-serie vendrá simbolizada por

$$f_{*}xy \equiv (\mathrm{pr}_1 f)x \wedge \forall F((\mathrm{Her}(F, f) \wedge Fx) \Rightarrow Fy)$$

donde '$(pr_1 f)x$' simboliza que 'x' es elemento del dominio de la relación 'f' o de su primera proyección, mientras que 'f_*ab' puede leerse intuitivamente en el caso de que la f-serie sea la de los números naturales, como 'a es menor que b' *(1879,* § 26).

Hay que observar que en la definición explícita de la relación f-ancestral, aparece una cuantificación de predicado, es decir, ha de verificarse para *todas* las propiedades 'F', lo cual encerrará impredicatividad, porque en ese total debe encontrarse la propia relación f-ancestral. Cae, además, en la posibilidad de la antinomia, en cuanto se hable de todas las relaciones ancestrales.

En parecida noción antinómica caerá, nuevamente, Frege al situarse en el conjunto de todos los números al retomar la definición de sucesor inmediato o relación ancestral en 1884, § 79. La clave se encuentra en que, en terminología conjuntista, 'y es un f-sucesor de x' significa lo mismo que 'y pertenece a la intersección de todos los conjuntos F —F subconjunto del conjunto C de todos los números— tales que $fx \in F$, x caiga bajo F y $f(F) \subset F$'. Con las palabras de Frege, que reconoce varía algo la terminología de su *Begriffsschrift,* dado que no menciona ahora la relación hereditaria:

'y es sucesor inmediato de x en la f-serie'

significa lo mismo que

'si todo objeto con el que x está en relación f cae bajo el concepto F y, si del hecho de que *d* caiga bajo el concepto F, se sigue, en general, sea lo que sea *d,* que todo objeto con el que *d* está en la relación f, cae bajo el concepto F, entonces y cae bajo el concepto F, sea F el concepto que sea'.

Tras esta definición y para cumplir el proyecto de caracterizar los números naturales habría que demostrar una proposición relativa no ya a la f-serie, sino a la serie de los números naturales, en particular. Para lo cual Frege introduce el concepto de segmento generado por un número determinado, retomado igualmente de su *Begriffsschrift* (§ 29): 'z pertenece a la f-serie que empieza con x' significa lo mismo que $z=x$ o bien f_*xz *(1884,* § 81). Y entonces, lo que habría que demostrar es que el número correspondiente a un segmento limitado inicial de la serie de los números sigue inmediatamente al último número del segmento. Para aclarar lo anterior: lo que habría que demostrar es que si el segmento inicial generado por '6' es $S_7=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}=$

[0,6], entonces el cardinal de S_7 ha de ser el sucesor inmediato de 6, es decir, 7. He aquí la razón de que para Frege sea esencial comenzar los números naturales por 0 y no por 1. Pero Frege no da la demostración, faltando nuevamente a su compromiso, esta vez de demostrar todo lo demostrable. «Nos llevaría demasiado lejos aquí realizar la demostración misma. Sólo indicaremos brevemente sus líneas generales» (§ 82). En los términos fregeanos el teorema a demostrar se enuncia con las palabras:

> Si *a* sigue inmediatamente a *d* en la serie de los números naturales, y si para *d* vale que el número que corresponde al concepto 'perteneciente a la serie de los números naturales que termina con n' sigue inmediatamente a *d* en la serie de los números naturales, entonces también vale para *a* que el número que corresponde al concepto 'perteneciente a la serie de los números naturales que termina con *a*' sigue inmediatamente a *a* en la serie de los números naturales.

Lo cual quiere decir que si *a* es el sucesor inmediato de *d* y *d* pertenece a la intersección de todos los F, $F \subset C$, tales que $f(d) \in F$ y $f(F) \subset F$, también *a* pertenece a dicha intersección. O, en términos no extensionales, que si *a* es el sucesor inmediato de *d* y *d* goza de todas las propiedades calificables de hereditarias, entonces *a* goza también de dichas propiedades [68].

Las líneas de la demostración consisten en afirmar que habría que demostrar que *a* es el número que corresponde al segmento S_a. Para lo cual hay que demostrar que este concepto es de igual extensión que 'perteneciente a la serie de los naturales que termina con *a* pero no es igual a *a*'. Y, para realizar la demostración Frege observa que se requiere el enunciado de que 'ningún objeto que pertenezca a la serie de los naturales que empiezan con 0, puede seguirse a sí mismo', es decir, para todo natural *a*, ha de verificarse '$a \neq a+1$'. Añadido dicho enunciado como condición, resulta, finalmente, que la expresión 'n es un número finito' es lo mismo que 'n pertenece a la serie de los naturales que empieza con 0'. Que Frege deba agregar tal condición es debido a que en los cardinales transfinitos no se verifica la desigualdad, convertida en condición de finitud de los naturales.

---

68 En el fondo es la misma caracterización que la de Dedekind de asegurar la validez de la inducción completa mediante una definición del número natural que hace referencia a todas las propiedades hereditarias de una serie o a la intersección común máxima de todas las cadenas que poseen 1 como elemento. Dedekind observó este hecho en 1890 cuando, según confiesa *(1890,* 101), leyó por primera vez la obra de Frege.

En otras palabras, se pasa en Frege al manejo de los números cardinales inductivo. Frente al enfoque de Dedekind mediante clases reflexivas, mediante clases que son equipotentes con una parte propia suya, Frege prefiere comenzar la serie inductivamente, a partir del 0. Dedekind, por su enfoque de reflexividad, tiene que partir del infinito para alcanzar lo finito, como un rincón suyo. Frege no lo requiere siendo su enfoque de carácter más constructivo como reconocería Carnap *(1931)*. El poner ambos enfoques en relación es lo pretendido precisamente por Russell y criticado por Poincaré. La inductividad y la reflexividad son mutuamente excluyentes no pudiéndose realizar el paso de una a otra sin el empleo del postulado de elección. El concepto de número inductivo se obtiene de modo inmediato tras la relación 'predecesor inmediato', recíproca de la relación ancestral, en el sentido de que puede definirse como '$\mathrm{Pred}(m, n) \equiv \mathrm{sum}(m, 1) = n$'. Tras lo cual un número inductivo 'm' es o '0' o es obtenible de '0' mediante un número finito de adiciones de '1'. En otras palabras, 'm' es un número inductivo si se sigue de la relación 'Pred' entre '0' y 'm'; simbólicamente

$$\mathrm{Ind}\,(m) \equiv \mathrm{Pred}(0, n)$$

Que es lo afirmado en la última definición de Frege citada de número finito y que puesta en enlace con la propiedad definida antes de hereditaria según el esquema de 'ancestral', ahora para la serie de los números naturales, establecería

$$\mathrm{Ind}(x) \equiv \forall F((\mathrm{Her}(F) \wedge FO \Longrightarrow Fx)$$

Es la que permite justificar el principio de inducción completa, aunque sea impredicativa, en el sentido de que

$$\mathrm{Ind}(x) \equiv \forall F(FO \wedge \forall y(Fy \Longrightarrow F\mathrm{sum}(y, 1))) \Longrightarrow Fx)$$

Es decir, el número natural o el número inductivo finito se define como aquel en el cual puede realizarse la inducción completa.

§ 2. Algunas repercusiones de Poincaré 1894

El esbozo de las distintas justificaciones en torno a la fundamentación de la Aritmética indica que era problemática ampliamente sentida en los entornos de 1890; problemática que superará, realmente, las cuestiones surgidas con las geometrías no-euclídeas dado que la cuestión geométrica se halla en fase de cierre. Ya he señalado cómo todas las distintas justificaciones se escindirán en la combinatoria o sintáctica —marcadamente formalista— y la semántica —marcadamente conjuntista—. Pero, mucho antes de que se produjera esta única dicotomía —con todos los matices, por supuesto—, tales justificaciones de carácter fundacional tenían que pasar por la crisis de las antinomias. Antinomias implícitas en las tendencias reduccionistas de Frege, de Dedekind, como he procurado ir exponiendo en las páginas precedentes. Sin embargo, en los entornos de 1895 las mismas aún no se habían presentado. Tardarán poco tiempo en mostrarse, con su violenta repercusión.

Entornos de 1895. Conviene precisar algunas fechas: 1879 supone el *Begriffsschrift* de Frege; 1882 la geometría de Pasch; 1884 los *Fundamentos* de Frege; 1888 la obra interrogativa de Dedekind; 1889 los principios de la aritmética de Peano; 1890-91 los dos primeros volúmenes del álgebra de la lógica de Schröder; 1893 la segunda edición de la de Dedekind y el primer volumen de *Las leyes fundamentales de la aritmética* de Frege..., sin mencionar los trabajos de Cantor, Hemholtz, los correspondientes a los formalistas, el folleto de Peano de 1894 que dará paso a la primera versión de su *Formulario,* 1895, etc.

En este entramado Poincaré, en 1893, publica «El continuo matemático» y en 1894, «Sobre la naturaleza del razonamiento matemático». Es Poincaré, con sus treinta y nueve años, una de las grandes figuras, por no decir *la* figura de la matemática mundial del momento y no sólo de la Matemática. Unicamente Hilbert se le podrá comparar, pero muy posteriormente. Del ensayo últimamente citado se dirá que, en palabras de van Dantzing, «hizo época», ya que «fue la señal para que una multitud de matemáticos inauguraran un movimiento en pro de la revisión de los conceptos clásicos, movimiento que culminó con la completa absorción de la lógica dentro del cuerpo de la matemática» *(van Dantzing, 1971,* 83). Palabras quizá excesivas en la atribución prioritaria del movimiento crítico, según lo esbozado anteriormente, pero no exentas de razón en cuanto a la difusión alcanzada, extrañamente, debido quizá a la personalidad de Poincaré, debido quizá a que vio un problema allí donde los demás creyeron que, siguiendo el camino emprendido por ellos, llegarían a justificar un reduccionismo lógico total, injustificado para Poincaré. De lo que no cabe duda es de que el matemático francés se convirtió en el portavoz —con todo el riesgo que ello ha implicado— del papel que la inducción completa representaba en el hacer matemático. Se ha ligado su nombre a dicho principio como lugar común, como si no hubiera dicho otra cosa —y si la ha dicho ha sido la crítica al logicismo—. Es lo que las páginas siguientes tienen como objetivo poner de relieve, junto al hecho de que la profundidad que puede encontrarse en autores como Dedekind, o Frege, en Cantor y en el mismo Poincaré, se encuentra un tanto alejada en muchos de los autores que se citan en lo que sigue.

1. *Opiniones generales*

1. Lachelas será el primero en señalar, el mismo 1894, que la exposición del matemático francés podría encuadrarse en la corriente formalista, dado que en el desarrollo de las demostraciones olvida el contenido intuitivo del número natural al suprimir de su significado habitual a los signos 1, =, +, sosteniendo que las definiciones de carácter recurrente de las operaciones no intervendrían para nada en las demostraciones. En la respuesta a algunas objeciones, tardía, de Poincaré, *1897 a,* justifica su posición Poincaré señalando que su intención consistía en exponer el razonamiento matemático lo más claramente posible y, para ello, ha de adoptar un punto de vista cercano al formalismo. Lo cual no excluye, en modo alguno, la interpretación normal de los signos, que se encuentra presupuesta siempre. La acusación de Lachelas podría haber sido dirigida a Leibniz, por ejemplo, dado que en la verificación de éste adoptada para ejemplificación por Poincaré, se tiene un paso de unas igualdades a otras —gracias al empleo de las definiciones dadas, por modo exclusivo—, igualdades entre signos meramente, por lo que bien podría pensarse en el juego de unas transformaciones con fichas, al ejemplo del ajedrez tan requerido por los formalistas. Ahora bien, es acusación carente de base —como si, por otro lado tuviera sentido, incluso, realizar acusación alguna—. En muchos momentos de la práctica matemática ocurre un olvido temporal del significado de los signos que se están manejando sin por ello tener que ser acusado quien lo maneja de formalista inscripcionista [69]. Pero que

[69] Cabe recordar cómo Frege reconocía la existencia de una Aritmética material como soporte de una formal, y la posibilidad del olvido del contenido de los signos en el manejo pragmático para, en la conclusión, volver a asignar contenido a los signos (Frege, *1884)*. Igualmente Tarski, *1941,* 140-1).

ello sea una práctica no implica, ciertamente, que sea una posición fundamentada. Entre otras cosas porque difícilmente podría compatibilizarse una postura inscripcionista radical con el análisis que hace Poincaré del continuo matemático, por ejemplo, donde precisa los límites que considera aceptables respecto a tal formalismo y no meramente al inscripcionista. Por otro lado, en la interpretación que he dado al pensamiento de Poincaré, la acusación sería aún más improcedente, ya que en ella el hacer matemático no maneja conceptos, sino relaciones entre objetos, por lo cual es difícil olvidar un referencial que no se posee. Lo que no puede olvidarse es el uso de los signos que poseen significación, pero no nombran objeto alguno.

Frente a la interpretación de Lachelas, puede situarse la que realizan Daval-Guilbaud *(1945,* 4)[70], al sostener que Poincaré no puede ser considerado en forma alguna como formalista ya que admite un contenido para el pensamiento matemático. Contenido que para ambos autores se manifiesta en la elección que Poincaré hace para exponer sus tesis: la Aritmética. Daval-Guilbaud se inclinan a reconocer que ello supone, por parte de Poincaré, la admisión del contenido de la Aritmética para el razonamiento de inducción completa. Ambos autores parecen olvidar, como lo hiciera van Dantzing, que la autolimitación a la Aritmética tiene otras motivaciones muy distintas; además, el no formalismo de Poincaré debería ser matizado, ya que salvo para la Aritmética y para la justificación de los sistemas formales, por sus motivaciones genéticas, el mismo es propio de Poincaré, formalismo entendido en cuanto a estudio de sistemas formales y no, meramente, en el sentido inscripcionista, posición insostenible para el propio Poincaré.

Heyting es quien, 1955, señala las dos vertientes en el pensamiento de Poincaré: formalista en cuanto a sus criterios de existencia; intuicionista, en cuanto a dar un contenido a la Aritmética. Olvidando el entorno anterior, Heyting llega a asegurar que es en Poincaré de donde nacen ambas corrientes a partir de 1908. Corrientes no contrapuestas, como se ha querido ver, dado que en el formalismo, salvo para el manejo sígnico y la búsqueda de estructuras, lo que predomina es, precisamente, la intuición y ello en la misma línea del matemático francés.

---

[70] Contra la misma se manifiesta Mooij admitiendo, por el contrario, un cierto formalismo en Poincaré, fundamentalmente por su enlace con Hilbert. Mooij, *1966,* 57 *n,* igualmente cap. VII y p. 151.

2. Interpretaciones, opuestas, que pueden ser coherentes; al menos lo son consideradas independientemente unas de otras. El formalismo de Lachelas, el antiformalismo de Daval-Guilbaud, el sincretismo de Heyting, son aspectos que pueden encontrarse en los escritos de Poincaré. Más próxima a la realidad la interpretación de Heyting. Pero si dichas posturas pretenden una mínima coherencia interna, cabe aún otra, más frecuente de lo que cabría esperar y que, por ello mismo, hace un mal servicio al pensamiento. Voy a representar esta postura, aquí, por G. H. Luquet. Permite calibrar, además, el estado en el cual se encontraban los problemas de la fundamentación en un amplio sector del ambiente francés, aun profesionalmente matemático y filosófico. La tesis se deriva de que, tras Poincaré, se considera admitido que el razonamiento matemático va de lo 'particular' a lo 'general', idea que «ha hecho escuela. Es así como aparece en Brunschvicg», indicará Mooij *(1966, 55 n)*, por no decir que es en favor y en contra de esta idea como se moverán muchos otros pensadores franceses. Luquet —autor más tarde de un tratado de lógica— sostiene, *1910 a,* que los métodos de deducción matemática son el analítico, el sintético y el calificado tradicionalmente como por reducción al absurdo. Los dos primeros, para situar en su época adecuada los términos que utiliza Luquet, componen el «análisis de los geómetras» en el decir de Vieta [71]. Para Luquet, los tres métodos son deductivos, ya que una deducción es un «encadenamiento lógico de las proposiciones en el cual la conclusión se obtiene de las premisas en virtud de sólo el principio de identidad y sus corolarios» *(1910 a, 262 n)*. A esto Luquet lo considera una generalización del sentido tradicional del término deducción, sentido que se limitaba a una «aplicación de una fórmula general a un caso particular, análogo a un silogismo en *Barbara*» *(íd.)*. Junto a los razonamientos deductivos anteriores Luquet debe reconocer que, tras los trabajos de algún autor moderno —no menciona explícitamente a Poincaré— también se usa la inducción en matemáticas. Inducción utilizada en dos formas: ordinaria y completa. La primera consiste en extender a todas las magnitudes de una misma especie los teoremas considerados en un caso particular. El ejemplo, geométrico: lo que es cierto de este cuadrado, es válido para todo cuadrado. De la segunda inducción prefiere dar un ejemplo de su uso más que una definición

[71] Puede verse, a este respecto, J. de Lorenzo, *1967*.

completa: la demostración de la desigualdad de Bernoulli. En ambos casos, para Luquet, la clave se encuentra en el caso particular, pero respecto al cual la propiedad demostrada no se liga con su carácter individual, concreto, sino genérico. Y en este ligarse de modo genérico la propiedad con el elemento particular se centra la generalización. Lo cual le conduce a sostener que la inducción completa es lo mismo que el método de concordancia inductiva de las ciencias experimentales. «Por ello, como los métodos de las ciencias concretas mismas, el razonamiento por recurrencia no da una completa satisfacción al espíritu... No está considerado más que como un sustituto de la demostración propiamente dicha para el caso en que el estado de la ciencia o el grado de cultura de los alumnos no permita dar ésta» *(id.,* 265).

Luquet no dice para 'quién está considerado'. Si me he detenido exponiendo las ideas de este autor es porque, verdaderamente, tales ideas confusas han estado ampliamente generalizadas, fundamentalmente las contenidas en el último párrafo transcrito. Y, segundo motivo, porque la réplica de Goblot *(1910)* fue inmediata, señalando cómo el núcleo central de la exposición de Luquet —lo que de más valioso hay en la misma, por otro lado— no era más que una copia de las ideas emitidas por él mismo —hasta en la elección de los ejemplos— al comentar la obra de Poincaré; y a ambos autores Luquet ni siquiera citaba.

3. Gastón Milhaud, tanto en 1897 como en 1903, se pregunta por la necesidad de que el principio de inducción matemática encierre una infinidad de silogismos. Cree que Poincaré tiene que admitir la misma porque, de lo contrario, si únicamente hubiera un número finito de ellos, se realizaría una mera verificación particular. Artificio conceptual para Milhaud, ya que «¿qué importa lo que puede haber de particular en ese número, si el modo de demostración es general?» *(1897,* 127). Que la demostración sea general se le presenta a Milhaud fundamentada en el manejo del objeto cualquiera y en el hecho de que «el nuevo número sigue al precedente». El infinito se encuentra encerrado no en la cascada de silogismos, sino en el número cualquiera, en cada noción general con la que razone el matemático, y el número cualquiera interviene precisamente en una de las premisas de la inducción completa por lo que la generalidad de la conclusión de dicho razonamiento se fundamenta en esa premisa y no en el encerrar una infinidad de silogismos; pero ello es lo que ocurre en el si-

logismo. Sostener lo contrario, como hace Poincaré, le parece motivado a Milhaud por un sentimiento de carácter psicologista que obligará a «hacer intervenir el conjunto de los números naturales en esa demostración aritmética». Y ello no le parece aceptable a Milhaud —quien no acepta el infinito actual—. El infinito, aparece «no diré 'demostrado' sino únicamente 'enunciado'» en frases como 'Si el teorema es verdadero para p, lo es para $p+1$', 'En *un triángulo,* la suma de los ángulos'. De esta forma interpreta Milhaud el pensamiento de Poincaré. Olvida que la cascada de silogismos encerrados en fórmula única significa que un sorites no puede justificar el razonamiento por recurrencia sino que se justifica por él; pero, en este punto, cabe justificar la posición de Milhaud en el sentido de que Poincaré posee un estilo brillante que impide su lectura. Por otro lado, Milhaud parece desconocer el papel que juega en sus ejemplos el elemento cualquiera, papel de paradigma, que ha de ser cuantificado en la conclusión. Papel que Euclides había puesto de relieve, ya, con sus metateoremas de particularización y generalización: Dado un elemento cualquiera se verifica... Como el elemento elegido es cualquiera, puede ser reemplazado por otro, luego se verifica para *todo* elemento... Quedarse en el elemento cualquiera en la inducción es quedarse en la inducción simple, sin ver la necesidad del cuantificador universal. Cuantificador que, por otra parte, plantea el problema del infinito actual como agudamente señala Milhaud, haciendo que este tipo de razonamiento penetre en los terrenos de lo que posteriormente se denominará métodos transfinitos. Rechazado el infinito, entonces, la inducción completa no posee elemento alguno que la distinga de una inferencia propiamente lógica, del silogismo concretamente, según Milhaud. Por lo que puede sostener, frente a Poincaré, que la inducción completa no dota a la Aritmética de proceso de razonamiento propio alguno.

4. Frente a Milhaud cabe situar a un filósofo fuertemente influido por Poincaré y con una potencia e interés propio indiscutible. Para Goblot no hay en la matemática, realmente, ni deducción ni inducción; hay construcción. Si bien este hecho lo había previsto Poincaré, el fallo del mismo para Goblot reside en haberse dejado llevar excesivamente por la analogía con la inducción empírica, aunque reconoce que Poincaré «se cuida mucho de confundir el razonamiento por recurrencia con la inducción» *(1910,* 68). Lo que recuerda a la inducción, acierta Goblot,

no es la demostración de que si una propiedad es válida para 'n' lo sea para 'n+1', no es el paso de un número a su sucesor sino la repetición indefinida de una misma operación. Pero, según Goblot, esta repetición lo único que puede producir es «una costumbre de espíritu, una espera, algo como 'esas consecuencias empíricas' que, según Leibniz, imitan y reemplazan el razonamiento en los animales y en la experiencia vulgar del hombre. Si esta espera es satisfecha frecuentemente y nunca frustrada, la repetición justifica la creencia, cuya posibilidad creciente puede llegar a ser *prácticamente* indiscernible de una certidumbre» *(íd.,* 68-9). Suprimir esta certeza de carácter psicológico conduce a admitir que en Matemática no se utiliza, jamás, el razonamiento inductivo ya que los matemáticos «no hacen constataciones empíricas». Si la reiteración de una misma acción es una creencia puramente psicológica, entonces el infinito que implica cae bajo la misma acusación. Infinito, pues, que desaparece convertido en mera creencia. Al considerar Poincaré que uno de los caracteres de la irreducibilidad de la Matemática a la Lógica se halla en ese infinito, la misma desaparece igualmente.

La Matemática actúa mediante razonamientos estrictamente deductivos y no inductivos. Pero aquí el término 'deducción' se muestra con sentido diferente al tradicional y al utilizado por Poincaré, ya que «el razonamiento, en general, no es nunca analítico, sino sintético y constructivo» *(íd.,* 63). Goblot reconoce que «es necesario, en efecto, renunciar a llamar deducción al razonamiento que va 'de lo general a lo particular', ya que las matemáticas, que son ciertamente deductivas, proceden constantemente de lo 'particular a lo general'» *(íd.,* 67). Lo que caracteriza al razonamiento deductivo es «que la conclusión esté construida exclusivamente con ayuda de operaciones lógicas, en virtud de las cuales sea necesariamente verdadera y no pueda ser rechazada sin absurdidad» *(íd.,* 67). Criterios que permitan averiguar cuáles sean tales operaciones lógicas no se indican de manera explícita, con lo cual la necesidad de la conclusión queda sin precisión, aunque pudiera equipararse al criterio de no contradicción exigido por Poincaré. Resulta que la inducción «no se compone más que de operaciones lógicas; la verificación que concierne a un número determinado, 1, cero o cualquier otro, no tiene nada de constatación empírica, porque consiste en reconocer que haciendo n=1 se obtiene una identidad. Es pues un razonamiento deductivo» *(íd.,* 69). La clave del mismo consiste en la transitividad de la certeza de la propiedad 'f' para 'n', a la certeza para 'n+1' de la misma 'f'. Demostración que, para él, es una construcción que no ha tenido Poincaré demasiado en cuenta. Para Goblot el aumento cognoscitivo viene dado porque tal construcción se refiere a operaciones concretas, incluso gráficas, que son las que, en el fondo, constituyen para él lo verdaderamente esencial del razonamiento matemático, la manifestación de lo que cabe calificar como la «espontaneidad creadora del espíritu». Con idea feliz de Daval-Guilbaud —admitida también por Piaget [72]— la recurrencia en Poincaré constituye la admisión de una especie de razonamiento de segundo orden *(1945,* 18), mientras que el de Goblot permanece en uno de primero, regulado por las «proposiciones anteriormente admitidas», lo cual implica una confusión de las operaciones matemáticas con las operaciones o «acciones materiales (o mentalizadas) cualesquiera» (Piaget, *1950,* 292).

5. De las críticas dirigidas a la posición de Poincaré me interesa destacar realmente la dificultad que parece presentar tanto la inducción completa como método de razonamiento, como la interpretación del pensamiento de Poincaré. En las críticas, sin tener en cuenta el equívoco del término 'inducción' se destaca la ambigüedad que los términos 'número cualquiera' parecen conllevar, al igual que el cuantificador universal. Este se liga con la pregunta que se hace Milhaud respecto a la necesidad de utilizar la totalidad de la sucesión de los números naturales cuando el caso paradigmático, por así decir, del número cualquiera bastaría. Dificultad en cuanto a la no aceptación del infinito actual y necesidad, en este caso, de interpretar dicho cuantificador como un imperativo para ir construyendo la sucesión, enfocada como no dada. Afinca sus raíces, esta dificultad, en la diferente forma de enfocar tal infinitud, constructiva o no. Contraste entre ambas que reflejará Barker, por ejemplo, señalando la oposición que se manifiesta entre el método diagonal de Cantor y la aceptación de la inducción completa dado que «puede objetarse que el razonamiento ordinario por inducción matemática parece también, en cierto sentido, exigir el llevar a cabo un número infinito de pasos» *(1964,* 116-7). Tras lo cual Barker se pregunta si es posible obtener una conclusión universal sin que, de hecho, se pueda efectuar la tarea de revisar uno a uno todos los naturales que sir-

[72] Piaget, *1950,* especialmente cap. III, § 3, pp. 285-293.

ven de argumento. Naturalmente la diferencia entre ambos casos reside en que en el método diagonal de Cantor no hay proceso constructivo alguno para realizar tal comparación diagonal, mientras que en el método de inducción como directiva se encuentra tal proceso y lo que asegura es que se tome el número particular que se tome la misma se cumple. Pero Barker va más allá de Milhaud explicando la aceptación de la constructividad de la inducción completa por parte de los matemáticos intuicionistas mediante el hecho de que tal conclusión no necesita entenderse en el sentido de que se halla recorrido, de facto, toda la serie numérica. «En cambio puede considerarse como si dijese que para cualquier número natural elegido podemos contar desde cero hasta él y demostrar que el requisito, sea el que fuere, es cierto de él» (*id.*, 117). Barker sigue aquí, de modo claro, aunque no lo explicite, la exposición de Heyting justificadora de la inducción completa, hecha según el esquema

$$\frac{\begin{array}{l}\forall k(f(k) \Rightarrow f(k+1))\\ f(1)\end{array}}{\forall n\, f(n)}$$

Pero, en este caso, el infinito abierto se ha reemplazado por el número cualquiera, en el sentido de que se admite la posibilidad de saber contar desde cero hasta un número cualquiera 'k', sin precisar dicho 'k' [73].

6. En esta línea, que afecta a la aceptación o no del infinito actual y a su papel en el principio de inducción completa, pueden considerarse las reflexiones de Borel. En 1899 se plantea la «cuestión de saber si es legítimo introducir un *nuevo principio de inducción* o, si se prefiere, *un nuevo modo de razonamiento*» (*1899*, 135), ante el transfinito creado por Cantor, y ello partiendo de la posición de Poincaré de la inducción completa como razonamiento propio de la Aritmética. Como uno de los constituyentes de la misma se manifiesta para Borel la sucesión de los naturales enfocada ordinalmente, es decir, como dada por el principio 'tras todo natural hay otro', que basta para dar idea del infinito abierto. Por otro lado, el principio de inducción completa muestra su fundamento en el término «cualquiera que», que aparece en la

[73] Heyting, *1966*. Para una crítica de la justificación dada por Heyting del razonamiento por inducción completa, Papert, *1960 b*, 121.

conclusión, en el cuantificador universal, afirmando que «son esas palabras quienes transforman la proposición particular de la que se ha partido en una proposición general» (*íd.*, 141). En menos de un año, Borel reconoce que para el concepto de sucesión ordinal de números naturales la proposición 'tras todo natural hay otro' no basta para legitimar el infinito abierto. Para obtener el mismo hay que agregar una segunda nota: «la operación por la cual la adición de una unidad permite con cada natural formar el siguiente puede ser indefinidamente considerada como siendo, desde un cierto punto de vista, la *misma*. Es claro, en efecto, que no es, *en sí*, lo mismo agregar 1 a 1 para obtener dos, o agregar 1 a 2 para obtener 3. No se puede pretender tampoco que se esté conducido *naturalmente* a considerar como idénticas la operación por la cual se pasa de 1 a 2 y aquella por la cual se pasa de 2 a 3» (*1900*, 145). El infinito abierto —cuyo concepto implica una antinomia ya que «aplicando un número *limitado* de veces un modo cualquiera de formación, no se tendrá más que un número *limitado* de naturales: no se puede crear lo ilimitado con lo limitado, el infinito con lo finito. Pero, sin embargo, no se puede decir que la sucesión de los números naturales esté limitada, ya que después de un natural viene otro» (*íd.*, 143)— viene legitimado por la sucesión, pero como ésta no se encuentra actualmente dada, sino en permanente construcción, ha de incluirse una operación de conservación que asegure que cada operación sucesor dé otro elemento de la misma sucesión. Con lo cual, las acciones que legitiman la sucesión ordinal son dos: la acción por la cual todo natural tiene sucesor, y la operación de conservación de la operación sucesor. Ahora bien, la primera no es más que el enunciado particular válido para el concepto de sucesión de números naturales. En cuanto tiene que generalizarse, como Borel pretende para la inducción transfinita, y como para los cardinales transfinitos no sería válida la desigualdad '$a \neq a+1$', entonces la clave va a encontrarse en el método de reiteración indefinida de una acción con su conservación correspondiente. Borel llega, tras un retorno, a la posición que mantenía Poincaré. Pero pretende ir más allá para justificar la introducción de los cardinales transfinitos de Cantor que, desde un plano puramente pragmático, maneja, pero que se le muestran como difíciles de aceptar racionalmente por entrañar el infinito actual. De aquí que indique que la operación de conservación se muestra más difícil de justificar en la inducción transfinita, llegando a rechazar la posibilidad de la misma. Precisamente la operación de conservación que destaca Borel posee un carácter constructivo ausente en la admisión previa del conjunto sobre el cual realizar la operación sucesor o cualquiera otra, conjunto que, dado, es el que permite dicha conservación.

2. *La inducción completa es demasiado particular*

Junto a críticas como las reseñadas en los párrafos anteriores, que hacen referencia a alguna característica del principio de inducción completa, se pueden agrupar aquellas que se dirigen a este tipo de razonamiento considerándolo como excesivamente limitado, con muy poca difusión en los terrenos matemáticos.

De autores mencionados, Milhaud lo explicita con nitidez, escribiendo «es demasiado particular» *(1897, 127)*, no empleándose de modo constante y, principalmente, no da cuenta de «los razonamientos de Euclides» ni de los propios razonamientos aritméticos «que conducen a conclusiones generales sin emplear manifiestamente este método» *(íd.)*. Método que, insiste, «no nos parece presentar carácter alguno lógico que no se encuentre en las demostraciones habituales de las Matemáticas» *(íd.)*.

Morris H. Cohen, tras breve exposición del pensamiento de Poincaré, limitado al parecer a la inducción completa, escribe: «Indudablemente, el principio de inducción tiene amplia aplicación, si bien existen muchas regiones, aun en la aritmética, donde resulta difícil descubrir su papel, por ejemplo, la ciencia de los números primos» *(1931, 198)*. Concesión para después señalar que puede incluso ser un método de descubrimiento, pero en este caso Cohen parece confundir con la inducción simple o más bien con la hipótesis de recurrencia, por lo que impone la condición de que la misma sólo puede aceptarse después de que «se les haya demostrado deductivamente» *(íd.)*. Lo cual viene a decir que, tras esa confusión, el principio de inducción completa se reduce a los métodos deductivos no teniendo carácter especial alguno.

Que no aparezca claramente en toda la Aritmética o no lo haga en la teoría de los números primos, por ejemplo, se debe a que las operaciones de adición y multiplicación pueden aceptarse de manera axiomática, aunque conserven, siempre, su carácter de definiciones inductivas. En todo caso, el método de inducción completa sólo cabe reemplazarlo por un método indirecto, por el mecanismo de reducción al absurdo con la previa aceptación de otro principio que le es equivalente: el de buena ordenación. Así demuestra Euclides, precisamente, la infinitud potencial de los números primos, utilizando la demostración por reducción al absurdo y la iteración de la operación sucesor, inductiva. Y ello porque no acepta la existencia del infinito actual, por lo que tiene que emplear dicha iteración, es decir, la recurrencia. Si se rechaza la posibilidad de la misma y si el tercero excluido no se acepta como principio válido para conjuntos infinitos, entonces la teoría de los números primos se vería imposibilitada sin el recurso a la inducción completa.

Puede observarse lo dicho no ya con el ejemplo de Euclides, muy clásico ya [74], sino con la proposición siguiente

'$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)\ (2n+1)}{6}$ es válida para todo natural n'.

La demostración se puede intentar argumentando en la forma:

Si '$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$' no fuera igual a $\dfrac{\text{'}n(n+1)\ (2n+1)\text{'}}{6}$

para algún n, los naturales que no la satisfacen constituyen un conjunto C, subconjunto de los naturales N. Por ser subconjunto de N ha de existir en C un primer elemento e. Este elemento ha de ser distinto de 1, ya que 1 satisface la igualdad, como se comprueba de manera trivial. Pero e tampoco puede ser mayor que 1, porque entonces 1 sería una excepción contra el supuesto de ser e el primer elemento. Luego $C=\varnothing$ y, por consiguiente, no existe natural alguno que no satisfaga la igualdad señalada, por lo que puede concluirse que la misma se verifica para todo natural n.

Se observa que la demostración hace uso del hecho de que todo subconjunto de N posea primer elemento, es decir, que N esté bien ordenado. Pero tal principio de buena ordenación es equivalente al de inducción completa. Luego la demostración hace uso de un principio equivalente al mismo a pesar de que entre ambos

[74] Puede verse, por ejemplo, en Rademacher-Toeplitz, *1930*, la demostración tanto de Euclides como por inducción completa.

hay una diferencia fundamental: la dada no es demostración constructiva, sino existencial, y se apoya en la validez de principios como 'la doble negación equivale a la afirmación' y el tercero excluido. La demostración en forma de inducción completa, por método directo, sería:

a) Para $n=1$, la igualdad se verifica trivialmente.

b) Supongamos que se verifica para un natural k, es decir, se admite la validez de la igualdad

$$1^2+2^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)\ (2k+1)}{6}.$$

Hay que demostrar que se verifica para el sucesor de k, para $k+1$. Para lo cual se observa que

$$1^2+2^2+\ldots+(k+1)^2=\frac{k(k+1)\ (2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

$$=(k+1)\,\frac{k(2k+1)+6(k+1)}{6}$$

$$=\frac{k+1}{6}\ (2k^2+7k+6)$$

$$=\frac{(k+1)\ (k+2)\ (2k+3)}{6}.$$

c) Luego se verifica para todo n de N [75].

Que la segunda demostración parezca más artificiosa a algunos matemáticos de tendencia pragmática ha sido puesto de relieve reiteradas veces. Así, Rey Pastor indica, «Poincaré veía en la inducción completa el resorte del poder creador de la Matemática; mejor habría dicho de la Aritmética, y no es extraño ese poder creador, ya que la inducción completa no es sino la definición del

[75] Otros ejemplos en Mark Kac-Ulam, *1968*, 181-2, con idéntica conclusión. Limitados a la inducción en su versión directa, Polya, *1954*, aunque Polya hace hincapié en la fase inductiva esencialmente, considerando la fase deductiva o demostrativa en segundo plano; igualmente Sominskii, *1959*, y Golovina-Yaglom, *1961*.

número natural» *(1951*, 26). Rey Pastor restringe validez a dicho principio y acepta la tesis logicista, que Poincaré rechaza, de ser la mera definición del número natural. Después de reconocer que tanto Poincaré como los intuicionistas Borel, Brouwer, Heyting, Weyl, etc., adoptan el criterio ordinal de los naturales como primario frente al cardinal de los cantorianos —aunque no de Dedekind y Peano agrego— Rey Pastor afirma: «partiendo del número ordinal la demostración y aun la definición de las operaciones aritméticas es sumamente laboriosa y desagradable por su carácter artificioso; *la inducción es el único método para unas y otras*, que puede satisfacer al lógico, pero no al psicólogo ni al pedagogo» *(íd.)*, pasando a ejemplificar sus afirmaciones con los ejemplos tomados a Poincaré, *1894*. Es curioso observar cómo un matemático de factura pragmática y espíritu clásico se sitúa en parecida línea a la del filósofo Lachelas para criticar el carácter excesivamente formal, lógico, del razonamiento querido por Poincaré como característico del hacer matemático. Respecto al rigor demostrativo que este método de razonamiento encierra, Rey Pastor tiene toda la razón frente a visiones erróneas como la de Cohen.

En la misma línea de particularización se sitúa la atribución de Beth, quien reconoce que «tiene fuerza demostrativa únicamente en relación a los números naturales» *(1965*, 27), aunque su posición parte de la posibilidad reduccionista en el sentido querido por Dedekind, es decir, en el marco de una lógica ampliada [76]. De modo análogo, Toranzos indica que «la posición de Poincaré es sumamente interesante aunque no es completa, ya que solamente satisface a la Aritmética. Es, pues, necesario completarla de manera que su solución abarque todos los sectores de la Matemática» *(1949*, 201). Y ello porque Toranzos, tras admitir que el razonamiento por inducción completa es irreducible al silogismo considera como factible agregar el principio que lo formula a los postulados lógicos —al estilo Peano— para construir la Aritmética. Línea en la que se sitúa igualmente Enriques *(1947*, 203), por ejemplo, frente a Poincaré.

Este tipo de crítica, que podría continuarse, es general y acertado plenamente. El principio de inducción completa, restringido a la Aritmética, es válido por modo exclusivo para la Aritmética. En todo caso, también se le podría admitir en aquellas partes que exijan el empleo de las progresiones, es decir, de sucesiones o, en

[76] Ver, en especial, Beth, en Beth-Piaget, *1961*, 6.

palabras más actuales, de aplicaciones entre subconjuntos, propios o no, de los naturales y conjuntos cualesquiera. También es un punto de vista acertado el señalar que muchos teoremas de la Aritmética no se demuestran por inducción completa o que, en particular, tal principio no existe explícitamente en los terrenos geométricos. Ya a este último punto replicó Poincaré indicando cuál era el teorema fundamental de la geometría, teorema que no podía ser demostrado más que por inducción completa. Pero, en este punto, Hermann Weyl aclara, retomando el enfoque de Poincaré: «*La inducción completa* es, desde el punto de vista intuicionista, lo que impide que las matemáticas se conviertan en una enorme tautología y la que confiere a sus asertos un carácter sintético no analítico. El procedimiento de inducción completa es siempre una modalidad decisiva. La razón de que al principio no parezca jugar un papel importante en la geometría elemental (en especial en la proyectiva) debe buscarse en la ingenua aplicación de 'algún' y 'todos' a los puntos. Esto es inadmisible desde el punto de vista intuicionista; el campo de construcción es un continuo y por lo tanto puede dársele un tratamiento matemático exacto sólo después de haberlo cubierto con una red de división como la descrita antes» (*1949*, 70-1) [77]. Red que hace referencia a la construcción del continuo de Brouwer.

Las críticas son inconsecuentes con respecto a la tesis de Poincaré. El reconocimiento de particular, pero irreducible, implicaría el reconocimiento de la especificidad de la inducción completa y, con ella, de la virtud creadora del razonar matemático. Se admitiría, sin reconocerlo, la tesis del matemático francés, quien había afirmado, además, que el principio de inducción completa aplicado a la Aritmética, manifestado en ella, era el más simple. Luego era claro que admitía esta particularización. En la Aritmética lo admitía como ejemplo, de aquí que quedarse en este aspecto de particularización no sea muy interesante. Lo es el intento de caracterizarlo bien como derivado de la lógica, bien como principio injustificable, admisible al mismo título que los de separación, sustitución, reemplazamiento. Y deba admitirse que su potencia o aplicabilidad dependen del terreno que se maneje, admitiendo que el razonamiento inferencial no es independiente de las posibilidades de su expresión. Aunque ya lo he expresado en otros tér-

[77] Para la inducción en los terrenos geométricos, Weyl, *1940*, y, sin el enfoque intuicionista brouweriano, en geometría elemental clásica, Golovina-Yaglom, *1961*.

minos, cabe citarlo en los de Braitwaite: «el que la deducción silogística pueda expresarse del modo que lo hizo Aristóteles y el que la deducción a partir de entidades algebraicas lo pueda por sustitución de las variables no dejan de decirnos algo acerca de estos modos de deducción. En realidad, varios filósofos de la escuela lógico-positivista mantenían en mil novecientos treinta y tantos que cuando se conoce un cálculo que represente un sistema deductivo puro (esto es, que no contenga proposiciones contingentes) se tiene un conocimiento completo de éste, por lo cual en la lógica formal y en la matemática no habría nada más que la relación entre unos símbolos y otros, y los principios de deducción no serían otra cosa que las reglas de manipulación de un cálculo simbólico. Esta tesis extremosa tiene hoy pocos defensores» *(1959,* 41). Entre esos modos de deducción se tendría que haber agregado el de inducción completa para así cubrir en cierta medida el cuadro de los métodos o razonamientos utilizados en la matemática de un modo clásico, admitidos por todos los matemáticos:

geometría — silogismo
álgebra — sustitución
aritmética — inducción completa

Si se acepta el enfoque cantoriano habría que agregar al esquema anterior

conjuntos — lema maximal

o cualquiera de los equivalentes a ese lema, como la buena ordenación, la inducción transfinita, postulado de elección...

Estas últimas palabras equivalen a aceptar el razonamiento por inducción —completa o transfinita— como un modo de razonar más, del mismo tipo que el establecido por la regla de separación o *modus ponens* y las de sustitución y reemplazamiento; de carácter calificable de inferencial y, por consiguiente, lógico, si se amplía el sentido del término. Y ello con los problemas que la aceptación de tales formas de razonamiento implican, común a las tres y a cualesquiera otras que el hombre pueda ir elaborando en cada momento histórico, y que se encuentran en la base de todo racionalismo, por no decir en la base de todo el pensamiento humano. Es tesis sostenida hasta aquí: la inducción completa constituye una forma inferencial sintético-constructiva surgida a partir del tratamiento numérico y no propia por modo exclusivo del hacer matemático, sino que se encuentran aplicaciones suyas en terrenos como los de la metalógica o epiteoría. No agota, unida a las tres formas inferenciales conocidas, todas las posibles expresiones del razonamiento, dado que podrán crearse otras nuevas por parte del mecanismo humano. Naturalmente, tal aceptación no es, hasta ahora, y en cuanto a la inducción completa, general, a pesar de que ya Borel considerara a la inducción transfinita como un nuevo modo de razonar en 1899. Habiendo pensado hace algunos años en el punto anterior, he podido leer la expresión del mismo en Seymour Papert escrita en 1960. Papert admite: «La posibilidad de modos de razonamiento y la existencia de dominios de intereses muy diferentes de los nuestros respecto a la teoría de números, es para ser considerada. (...) Notemos por otro lado que los progresos realizados por las matemáticas han entrañado no solamente la adopción de nuevas nociones sino también la de nuevos principios de razonamiento. Citemos el axioma de elección en sus múltiples versiones (lema de Zorn, recurrencia transfinita, etc.) que ha transformado el análisis y la geometría y que juega su papel incluso en álgebra. *No se trata de un teorema que haya sido demostrado, ni de una definición, ni de un axioma; se trata de un principio de razonamiento,* tal como la recurrencia o el modus ponens, que ha sido adoptado muy simplemente» *(1960 b,* 131 *n)*.

§ 3. La inducción completa, ¿es inducción?

1. A pesar de las palabras de Papert, que suscribo y sostengo que suscribía Poincaré, se ha discutido mucho —las páginas anteriores son un mínimo reflejo de tales discusiones— acerca de si la inducción completa es o no una inducción, es o no una forma inferencial, forma deductiva entendida en su acepción clásica. En Francia, fundamentalmente, ello se debía a que las nuevas lógicas no fueron cultivadas en intensidad, limitados a proseguir los estudios en términos clásicos, tradicionales. Una de las figuras más representativas, Lachelier, sostendrá en 1876, «toda demostración lógica es deductiva o inductiva, aunque la inducción escape en gran parte a las leyes de la pura lógica. Ahora bien: fuera del silogismo por excelencia, o silogismo *categórico,* no existen más que tres formas simples de deducción, inventadas tal vez en la escuela de Aristóteles, pero empleadas sobre todo en la de Zenón: el silogismo *hipotético,* el silogismo *copulativo* y el silogismo *dis-*

juntivo» *(1876,* 183). Los dos últimos se reducen al hipotético, que adopta las formas de *modus ponens* y *modus tollens*. Y el hipotético, a su vez, se reduce, a la primera figura el *modus ponens,* el *modus tollens* a la segunda figura, respectivamente, del categórico. «La inducción sólo pertenece a la lógica por su forma y esta forma es la de un silogismo de la tercera figura» *(íd.,* 185).

En un ambiente como el manifestado sostener que el razonamiento matemático es inductivo, cuando tal razonamiento se consideraba modelo de rigor deductivo entraña, ciertamente, el calificativo de posición revolucionaria y, al menos, se mostraba como aporía obligadamente justificable, que exige clarificaciones. Pero, ya lo he indicado, las discusiones se mantienen en este cuadro que contrapone lo general a lo particular, el contenido a la forma, lo psicológico y lo lógico. El mismo Lachelier, ante las nuevas lógicas, y retomando sus consideraciones acerca del silogismo en 1906, distinguirá dos tipos de proposiciones: de inherencia (como 'Pedro es alto') y de relación ('Pedro es más alto que Juan'). Y, con ello, dos tipos de silogismos: de inherencia y de relación. Los primeros reconoce que son los clásicos o categóricos; los segundos lo habían estudiado los estoicos —como indica *1906,* 191 *n,* aunque la influencia de las consideraciones logicistas es clara—. A lo cual, Lachelier no tiene otra opción que agregar: «Pero estos silogismos [los de relación] tienen sus formas y leyes propias, más vecinas de las del razonamiento matemático que las de la lógica tradicional» *(1906,* 190). Silogismos propios de razonar matemático que considera irreducibles a los de inherencia o aristotélicos, por lo que no los considera, dedicado a los clásicos.

Ya era, ciertamente, un adelanto observar una posición como la de Lachelier, reconociendo la existencia de modos propios o vecinos del razonar matemático, aunque ello significara el abandono en el estudio de esos modos especiales de razonar. Lachelier, a pesar de todo, no menciona el posible enlace entre la inducción completa y cualquiera de ambos tipos de silogismo, categórico, relacional.

2. Otros autores prefieren seguir la línea de un Milhaud, por ejemplo, en el sentido de que la inducción completa no es más que una forma disfrazada del silogismo categórico. Así, Jolivet, por ejemplo, tras exponer el pensamiento de Poincaré hace la crítica del mismo, de sus ideas de especificidad de la inducción completa respecto al silogismo y señala: «es dudoso, no obstante, que

haya ahí una verdadera inducción. Parece más bien que *se trate de una deducción, que consiste en aplicar indefinidamente una propiedad verificada de un caso dado de construcción numérica a números construidos de la misma manera,* deducción que podría traducirse de la siguiente forma

> Lo que es verdad de n, lo es de n+1;
> es así que tal propiedad es verdad de n;
> luego es verdad de n+1" [78]

Basta observar la traducción del principio de inducción completa de Jolivet para no tener que hacer más observaciones. Señalar, únicamente, que se detiene, en la redacción del capítulo dedicado al razonamiento matemático, en las ideas de Goblot, y traduce la inducción, entonces, como la propiedad de transitividad por modo exclusivo; transitividad conseguida mediante una construcción que en Jolivet adopta la forma del enunciado transcrito. En beneficio de Jolivet hay que indicar que no da la traducción del *Tratado de lógica* de Goblot de manera categórica, escudándose en unos cuantificadores modales como «parece más bien que...», «es dudoso que...», aunque Jolivet subraya las proposiciones a las que afectan las cuantificaciones modales en beneficio del estudiante lector.

Apoyándose en la autoridad de Jolivet, y no en la fuente original, Virieux-Reymond indica: «Poincaré, en *La Ciencia y la Hipótesis,* ha pensado que este tipo de razonamiento era lo mismo que el de la inducción. Pero parece seguro que se ha equivocado sobre la naturaleza del proceso inductivo que sería, de hecho, una deducción rigurosa consistente en aplicar a los seres matemáticos, construidos de la misma manera, una propiedad verificada a propósito de uno de ellos» *(1962,* 13). La autora es la que parece confundir la inducción empírica con la completa, atribuyendo su confusión a Poincaré.

3. No realizan esa confusión otros autores como Selvaggi, quien, tras aceptar la inducción como método para obtener los principios de la matemática —para lo cual se apoya en citas de Tomás de Aquino y de Poincaré— se aparta del matemático fran-

---

[78] Jolivet, *1960,* 183. Cabe señalar que el enunciado de Jolivet hace referencia a una de las formas primarias, en sentido genético, de la seriación. Aparece, en ella, el número cualquiera, pero no el cuantificador universal conclusivo.

cés al mantener que el principio de inducción completa no es más que una fórmula disfrazada del silogismo categórico, por lo cual es un razonamiento puramente analítico, al proceder mediante un análisis de los términos que lo constituyen. La transcripción del silogismo sería, según Selvaggi: «la mayor es una proposición universal evidente por sí misma, esto es, un axioma propio de la teoría de los números: toda propiedad que conviene a un número particular, y que si conviene a un número cualquiera conviene también al que le sigue, conviene a todos los números; pero esta propiedad determinada conviene a un determinado número, y si conviene a un número cualquiera, conviene también al que le sigue; luego, esta propiedad conviene a todos los números» *(1953,* 181). En términos simbólicos, el silogismo adoptaría la forma

$$\begin{array}{l} \forall f(f(k) \wedge (f(n) \Longrightarrow f(n+1)) \Longrightarrow \forall p\, f(p)) \\ f(k) \\ f(n) \Longrightarrow f(n+1) \\ \hline \forall p\, f(p) \end{array}$$

La posición de Selvaggi es aceptar como axioma propio de la Aritmética, y por consiguiente no estrictamente lógico, el principio de inducción completa y, entonces, mediante el esquema de separación, se obtiene la conclusión tras dos etapas puramente analíticas. Es la postura adoptada por la axiomática de Peano, por ejemplo, y por todos los sistemas formales de la Aritmética.

A ello se le pueden oponer dos objeciones. En primer lugar, la evidencia del axioma puede ser cuestionable o, en todo caso, cabría discutirla e intentar su reemplazo por otro axioma, si ello fuera posible, más simple y más evidente. Además, el axioma puede convertirse en una regla inferencial según el teorema de Herbrand-Tarski de deducción; a pesar de lo cual sigue existiendo confusión entre regla inferencial y principio en el que dicha regla se manifiesta, dado que la misma posee un carácter imperativo ausente en el principio. Es la misma posición, aquí, que la sostenida por Lewis Carroll respecto al *modus ponens* convertido en axioma o principio evidente por sí mismo, pero que impide justificar el razonamiento a utilizar si se olvida su matiz imperativo, salvo caer en un regreso al infinito, como se ejemplifica en «Lo que Aquiles dijo a la Tortuga» (Carroll, 1972). La evidencia del axioma, de dónde proceda la misma y su posible justificación, la resuelve Selvaggi en la misma postura, aparentemente, que Poincaré: «El principio enunciado en la mayor se deriva de la esencia misma del número, que es la de ser cada número obtenido por la adición de la unidad al que le precede» *(íd.)*. Pero ello implica que la inducción ha quedado sin justificar, si no es por ella misma: el principio también está generado por recurrencia. En segundo lugar, se observa que dicho axioma en la formulación de Selvaggi posee un cuantificador universal, «toda propiedad». La cuantificación de predicado hará que este principio posea un carácter transfinito en el que la 'evidencia' será ciertamente discutible, dado que, al aplicarse a los números naturales de cardinal numerable, se encontrarán tantas propiedades como el continuo —si se acepta la hipótesis de Cantor del continuo—; por lo que su reducción al silogismo es, ciertamente, imposible al silogismo categórico necesitando una lógica cuantificacional mucho más potente, al menos una lógica cuantificacional de segundo orden. De aquí que considere que, si no se hace uso de este tipo de lógica, el principio de inducción completa es injustificable mediante un razonamiento que haga uso exclusivo de la regla de separación. Pero, en tal lógica, el propio principio al que hay que recurrir como propio de la Aritmética puede ser justificado, siempre que se admitan definiciones impredicativas, como proposición lógica.

Los argumentos de Poincaré, sin embargo, respecto a la irreducibilidad de la inducción completa al silogismo me parecen correctos. Independencia admitida hoy, por modo general, como reconoce el mismo Beth: «Está permitido hoy día establecer como definitivamente adquirido el hecho de que el razonamiento matemático tal como se presentaría, por ejemplo, en una versión perfeccionada de los *Elementos* de Euclides no puede ser representada como una sucesión de silogismos pertenecientes al sistema de Aristóteles» (Beth-Piaget, *1961*, 6).

4. Siguiendo con términos tradicionales, si la inducción completa no puede reducirse al silogismo, es decir, no es 'deducción', entonces habrá que admitir que es una inducción, o admitir que el silogismo no es la única forma deductiva existente, en cuyo caso habría que señalar cuál es el carácter deductivo presente en la inducción completa. Para el logicismo tal problemática no existe. La inducción completa se ve como una definición del número natural o, en otras palabras, el número natural es, precisamente, el ámbito de la inducción completa. Radicalizando esta postura, al-

gunos positivistas y convencionalistas señalarán que el principio de inducción completa es una oración, no un modo de argumentación. Como indica Von Mises: «En casi todas las ramas de la Matemática aparece un tipo de argumentación que siempre ha sido considerado como un 'principio' característico de la matemática y, a veces, como un misterio inescrutable: el proceso de la llamada *inducción completa.* (...) A su respecto se planteó la cuestión (lo hizo, por ejemplo, Poincaré) de cómo es posible deducir de un número de inferencias tan pequeño y, en todo caso, limitado, un número infinito de conclusiones. (...) El hecho es que aquí no se infiere nada en absoluto. La oración 'todos los decimales son treses' no es más que una expresión lingüística diferente de la oración 'el primer decimal es 3, y siempre que aparece un 3 va seguido por otro 3'» *(1939,* 141). Podría parafrasearse diciendo que la oración 'si p entonces r' es simplemente otra forma de decir 'si p entonces q y si q entonces r', no teniendo aquí inferencia alguna, sino simplemente formas lingüísticas que, por convenios quizá un tanto extraños, se admiten, o quizá no, como intercambiables entre sí. Sin llegar a estas exageraciones —que olvidan que la expresión de la que es abreviatura es una forma inferencial inductiva— ya he indicado que cabe justificarlo en una lógica de, al menos, segundo orden, pero ello al precio de admitir definiciones no predicativas y, por supuesto, el método axiomático. Desde un enfoque algo más constructivo también he dicho que la inducción supone una forma inferencial más, al mismo título que la de reemplazamiento o la de sustitución, que tiene sus zonas propias de aplicación, como la regulación de los metateoremas centrales de la misma lógica de segundo orden que lo pretendería justificar.

Junto a los logicistas, pero admitiendo que plantea problemas, rechazan que sea inducción, en sentido alguno, autores como los que he citado, Selvaggi, Jolivet, Cohen, Milhaud, a los que se podría agregar, en lista que no se pretende exhaustiva, a Albérgamo cuando afirma: «Que este procedimiento demostrativo consista en una inducción no puede sostenerse seriamente, estando claro que de ninguna forma tiene que ver con la verdadera y propia inducción; según la justa observación de Brunschwicg, tal procedimiento ha de considerarse como una deducción progresiva 'cuya aplicación está segura *a priori* del éxito, ya que los números son los productos de esta deducción progresiva'» *(1950,* 165-6). No he podido verificar la cita de Brunschwicg, pero si ello significara que se van realizando deducciones al estilo de la esquematizada en (3) de p. 79, que se apoya, ciertamente, en la previa construcción de la serie ordinal de números, entonces esta deducción progresiva no indica otra cosa que una serie de silogismos dispuestos en cascada, para expresarlo con Poincaré, cascada que no permite unificarlos en una síntesis común más que por la inducción completa, que sería la que permitiría, en síntesis, obtener la construcción progresiva. De lo contrario, sería justificar la inducción mediante un sorites, lo que se ha demostrado que es inadmisible.

En el mismo sentido que los autores anteriores se sitúa Bochenski, calificando a la inducción completa o matemática de *inducción impropia* y señalando: «Estas *inducciones* son frecuentes en matemáticas; convendría hacer ver que en realidad se trata más de una deducción que de una reducción. El nombre *inducción* es erróneo en este caso» *(1957,* 219). Ahora bien, si Lukasiewicz admitía los métodos reductivos en contraposición a los deductivos lo hacía en el sentido de tomar 'reducción' por 'proceso para ejecutar razonamientos, no conceptos'. Con lo cual se produce una reducción cuando hay una generalización de la conclusión. Es, precisamente, el caso de la inducción completa o matemática, de carácter reductivo, no deductivo.

5. En la línea de lo escrito últimamente y frente a posturas como la de los pensadores mencionados se encuentra la de los intuicionistas y algunos otros matemáticos. Con palabras de Weyl, «esta inferencia introduce una modalidad enteramente nueva y peculiar, desconocida por la lógica aristotélica en la metodología de las matemáticas; es la esencia misma del arte de la demostración matemática» *(1949,* 37). Modo inferencial característico, interviniendo en él el concepto de sucesión, pero no como algo dado de una vez para siempre, sino como algo que debe irse creando a través de un proceso generador según el principio 'tras todo natural hay otro' que posibilita la acción reiterativa mental proyectada en lo posible. Es el sentido de generalización a partir de la inducción completa. Consideraciones que conducen a Weyl a la aseveración «El principio de inducción completa (como instrumento de definición o inferencia), no encerrado en una fórmula única, sino aplicado concretamente en cada caso, es el verdadero y único poder de las matemáticas, la intuición matemática original. En este punto Brouwer está de acuerdo con Poincaré» *(íd.,* 57).

Entre los matemáticos no ligados de modo estrecho al intuicionismo puede contarse a Polya. Según el cual «Tenemos aquí un importante procedimiento de demostración. Podríamos llamarlo 'pasando de n a n+1', pero es usualmente conocido como 'inducción completa'. Esta última designación es, sin embargo, muy inadecuada para un procedimiento de demostración, pues la inducción (en el significado que con más frecuencia se usa) proporciona solamente una inferencia plausible, no demostrativa» *(1954,* 156). A pesar de lo cual reconoce que debe tratarlo porque «tiene algo que ver con la inducción» *(íd.)*. Polya ve ese algo en que «la inducción matemática a menudo aparece como el último grado, o la fase final, de una investigación inductiva, y esta última fase con frecuencia utiliza sugerencias que habían aparecido en fases precedentes» *(íd.,* 157).

Igualmente, epistemólogos genéticos como Papert, Greco, Matalon, Griss..., que siguen los análisis genético-estructurales de Piaget, consideran a la inducción completa como un proceso generalizante, dada su mayor complejidad estructural que los procesos deductivos. Piaget parte de los distintos grados de estructuración de los diversos sistemas. «En los casos de estructuras débiles o intensivas, ninguna operación permite transformar las propiedades que caracterizan las subclases en las que caracterizan el todo: éste no constituye más que la reunión de las clases parciales y no su generalización operativa. (...) Por el contrario, en el caso de estructuras fuertes o extensivas, hay paso de la parte a la parte y de la parte al todo, no por simple inclusión de la primera en la segunda, sino por la composición operatoria de las propiedades que caracterizan el todo a partir de las de sus subclases» *(1972,* 390). Como ejemplo de este último caso se tiene el de un grupo cuya estructura se refleja en cada uno de sus subgrupos. Es el tipo de razonamiento propio del hacer matemático. De aquí que «el razonamiento matemático es más fecundo que la deducción simplemente lógica por el hecho de que procede por generalización constantemente operatoria tanto sobre el plano de la comprensión como sobre el de la extensión» *(íd.)*, mientras que el razonamiento lógico no matemático se reduce a una generalización puramente inclusiva, «porque actúa sobre los encajamientos como tales», por lo que no permiten una construcción en comprensión. Posición ya mantenida en 1950 cuando refiriéndose en concreto a la polémica entre el logicismo y Poincaré precisaba: «sin tener que llegar a la 'intuición del número puro', el principio particular de inducción completa permanece irreducible a la lógica de clases. Es porque el razonamiento por recurrencia es más fecundo que el silogismo: permite generalizar de cero, o de uno, a 'todos', propiedades no atribuibles de antemano a todos los números» *(1950,* 307). A lo que Piaget agrega, «Además, esta fecundidad inherente al razonamiento por recurrencia ha sido reconocida y mantenida por la mayoría de los logísticos mismos» *(íd.)*.

Fecundidad o más bien generalización apoyada en la recursión y que permite realizar aseveraciones acerca de infinidad de afirmaciones distintas condensadas en fórmula única. Pero, se pregunta Freudenthal, «¿Cómo se pueden demostrar infinitas afirmaciones?» *(1967,* 48). Y, tras definir la definición y la inferencia inductivas, se responde: «La forma de hacerlo es aplicando el principio de inducción completa» *(íd.,* 53). Principio mediante el cual «puede definirse también una sucesión indefinida de objetos» *(íd.)*. Palabras enteramente semejantes a las empleadas por Kneale cuando distingue los tipos de inducción enumerativa y simplemente intuitiva de la inducción empírica. Diferente a las dos primeras, pero igualmente diferente a la última, se encuentra la inducción completa, «proceso especial por el cual son establecidas verdades de universalidad esencial y no restringida en matemáticas» *(1952,* 37). La diferencia con las primeras se basa en que no depende como la sumativa o enumerativa de una enumeración completa de todos los casos, y de la intuitiva se diferencia en que depende de una previa ordenación en serie de los casos que considera. Kneale indica cómo se llegó a pensar que era característica de la teoría de números y que, en otras partes de la matemática podrían utilizarse demostraciones por métodos diferentes. Pero reconoce que, observando el proceso de aritmetización del análisis, los distintos conjuntos numéricos empleados en la Matemática pueden reducirse a la Aritmética y los enunciados que pueden hacerse sobre ellos «pueden considerarse como abreviaturas para enunciados complicados acerca de los números naturales» *(íd.,* 39). Con lo cual, la base de toda la matemática se encuentra en la inducción completa y ello porque «no hay forma de probar enunciados universales acerca de los números naturales sin usar el proceso recursivo» *(íd.)*. Es, pues, la inducción completa una auténtica inducción que permite establecer los teoremas matemáticos en toda su universalidad *(íd.,* 43).

Y precisamente por este carácter de universalidad que se obtiene mediante la inducción completa, la misma es el único método para enfrentarse con los problemas derivados de la consistencia, completitud e independencia de los sistemas formales lógicos. Los mismos han de recurrir a procesos, a formas de razonamiento que no cabe representar en el interior de los sistemas considerados por lo que sería imposible validar los argumentos con los principios de la lógica por modo exclusivo. «La razón de esta imposibilidad no es simplemente que las tesis probadas versen *acerca del* cálculo (...) sino más bien que las tesis en cuestion son *generales* y no resultan accesibles sino por medio de un razonamiento capaz de demostrar que una determinada propiedad pertenece a todos los elementos de una serie por pertenecer al primero de ellos y ser hereditaria en la serie, esto es, por medio de la inducción matemática», reconocerá igualmente Kneale en 1961 (652). Como consecuencia del empleo de este tipo de razonamiento que trasciende los recursos no sólo de la lógica de primer grado o cálculo proposicional, sino también de la lógica general, de la teoría de la cuantificación, Kneale llega a sostener que «contamos con suficiente justificación para afirmar que ni siquiera los elementales teoremas de la metalógica (...) pertenecen al dominio de la lógica propiamente dicha» *(íd.)*. En lo que vuelve a insistir al hablar de la validez de las formas normales prenexas y al teorema de completitud de la lógica de cuantificadores realizada por Gödel, «pero, como en el caso más sencillo de la reducibilidad a forma normal conjuntiva, también en este caso se requiere acudir a la inducción matemática para la prueba de la tesis general» *(íd.,* 659). No sólo la inducción completa permite la demostración de los teoremas de la metalógica, sino que sirve como frontera delimitadora, por su uso, para lo que Kneale califica de lógica. Mera convención o cuestión de nombres, pero que revela una diferencia profunda entre el razonamiento específicamente matemático como quería Poincaré —quien, como se ha dicho, señaló la necesidad del mismo para las demostraciones metalógicas— y el razonamiento lógico. *Inducción* matemática por constituir una construcción, una síntesis engloba-dora de infinidad de proposiciones, de posibles verificaciones.

CAPÍTULO 7

LA CRITICA DE POINCARE A LAS 'NUEVAS LOGICAS'

Para Poincaré la inducción completa constituye una de las manifestaciones de la virtud creadora del pensamiento matemático; no única ni exclusiva. Auténtica inducción, se ha de manejar no sólo en los terrenos aritméticos —y, a su través, en todo el hacer matemático— sino en los de la propia justificación de los sistemas formales, en forma de constitución de fórmulas, de demostración de consistencia, isomorfismo de modelos, etc. Que tal manifestación sea la única base del rigor demostrativo matemático ha sido sostenido no por Poincaré, sino por los intuicionistas que en él se apoyan. A pesar de lo cual es a Poincaré a quien se atribuye tal exclusivismo, se le considera como su postulador. Creo que las páginas anteriores atestiguan lo que de tópico hay en este aserto. También es lugar común atribuirle una crítica por completo destructiva al logicismo, a los primeros intentos de Hilbert. Crítica que, desde mi punto de vista, lo es de matizaciones, precisiones y, fundamentalmente, de antidogmatismos. En las tesis logicistas veía Poincaré un dogmatismo excesivo; en el formalismo inscripcionista, otro. De ahí que, aun reconociendo que ambas posiciones aportaban algunas novedades, pretendiera hacer justicia a las exageraciones de unos y otros en nombre, realmente, del sentido común. En la polémica se dejó arrastrar, sin embargo, del dogmatismo contrario en más de una ocasión. Es cuando plantea su tesis del constructivismo finitista. Exagerado Poincaré, si se le toma al pie de la letra, muestra su real escepticismo en cuanto a la posibilidad de una única solución, definitiva *hic et nunc,* de los fundamentos de la matemática cuando contempla las polémicas de unos y otros —él incluido— como un excursionista puede contemplar una pelea entre dos hormigueros rivales. Escéptico Poincaré, aunque no por ello menos ilusionado en la búsqueda de la verdad.

Todo ello conduce a examinar las críticas al logicismo y al formalismo, y a su través, la especificidad del pensamiento matemático, en dos planos: el de la crítica general a las inversiones que provocan y el de las soluciones que ofrecen tras la aparición de la crisis de los fundamentos, con su solución constructivista. Se verá lo acertado de dicha crítica en las líneas generales, así como, en algún caso, las líneas de superación de las mismas. Se vuelve a tratar de la inducción completa, clave del reduccionismo lógico, como señalara Frege cuando, al indicar el modo de llevar a cabo la explicación lógica de la Aritmética, debía centrarse en dar explicación de «una inferencia matemática aparentemente singular, como la que pasa de n a n+1» *(1884. Intr.;* §§ 80, 108) por medios estrictamente lógicos, con lo cual se habría conseguido suprimir lo que de más específico posee el razonar matemático.

§ 1. Excesos logicistas

El programa logicista, planteado esencialmente por Frege, consistía en reducir todos los términos matemáticos a definiciones explícitas en las que sólo intervinieran términos lógicos, por un lado, y en conseguir demostrar todas las proposiciones matemáticas a partir de unos cuantos principios considerados como lógicos y mediante el empleo de reglas de razonamiento también lógicas. Frege, en 1884, creía que, con su obra, había hecho al menos plausible este proyecto. Sin embargo, hoy día el mismo se ha admitido, ya, como irrealizable. «El logicismo de Frege y Russell pretende reducir las matemáticas a la lógica. Este parece ser un programa excelente, pero cuando fue llevado a la práctica, se vio que no hay lógica suficientemente amplia para abarcar el total de las matemáticas. Así, lo que permanece de este programa es una reducción de las matemáticas a la teoría de conjuntos. Ello puede difícilmente considerarse solución satisfactoria del problema de los fundamentos de la matemática, ya que entre todas las teorías matemáticas es precisamente la teoría de conjuntos la que requiere una clarificación mayor que cualquier otra» (Mostowski, *1966*, 7).

El término 'reducción' requeriría, para alguno, ser precisado. El mismo parece indicar la existencia de dos materias: Lógica, Matemática. Distintas, la segunda se mostraría como menos general que la primera por lo que cabría subsumirla en ella. Pero podría argumentarse que éste no era el sentido exacto en el cual tanto Frege como Russell trataban el tema. Podría argumentarse que, para ellos, no existían dos disciplinas, sino una sola, de la cual la

Matemática, la Aritmética en particular, no era más que una prolongación de la otra, de la Lógica. Frege señalaba que la Aritmética «sería solamente una lógica más extensamente desarrollada, y cada enunciado aritmético sería una ley lógica, aunque una ley derivada» *(1884*, § 87). A su vez, Russell pedía que alguien se atreviera a indicar dónde se encontraba la separación entre ambas materías, señalando que quien lo hiciera marcaría una frontera enteramente artificial *(1919)*. Si quizá éstos fueran los sentidos para ambos pensadores, sin embargo, no ha habido duda de que tal prolongación no se ha visto más que como una subordinación de una a otra, dada la ambigüedad con la que se ha manejado el término 'lógica'. Cuestión de meras palabras o terminología, se dice. Pero, con expresión de Kneale, «desde el descubrimiento de Gödel en 1931 (...) ha existido una creencia bastante extendida entre los lógicos de que la teoría de conjuntos no debería considerarse en ningún caso parte de la lógica. Si adoptamos este punto de vista, está claro que tenemos que admitir que la aritmética no puede reducirse a lógica. Esto, en parte, depende de lo que decidamos llamar lógica, pero es importante, porque ha sido descubierto un gran abismo donde Frege no podía ver más que una diferencia de niveles» *(1956*, 45-6).

Diferencia de niveles percibida ya por Frege, por Dedekind, quienes llegaron a abandonar o, al menos dudar, de su tesis de una posible reducción a terrenos exclusivamente lógicos. Dudas motivadas por las dificultades internas que tal reducción presentaba. En el fondo, únicamente Russell persistió en la creencia de la posibilidad logicista [79].

A la luz de estas consideraciones cabe observar las críticas de Poincaré a lo que él calificaba de excesos logicistas. Críticas que reúno en parecidos apartados a los que se consideraron al exponer las mismas.

1. *Inversión metodológica; demostración.* Que las nuevas lógicas supongan un cambio metodológico, parece claro y admisible incluso, a pesar de que este último punto no lo aceptara Poincaré.

Históricamente la Matemática se ha desarrollado no como un mero lenguaje lógico o artificial según líneas dadas de antemano, ni sus proposiciones se han obtenido deductivamente de unos principios lógicos apriorísticamente establecidos. En sus diversas eta-

---

[79] Se puede consultar la *Intr.* a la 2.ª ed. de Russell, *1903*. Respecto a la persistencia russelliana, Hao Wang, *1967*, y Putnam, *1967*.

pas tanto los conceptos que el matemático ha manejado como las proposiciones a demostrar, como las proposiciones que se han admitido como primeras, se han ido obteniendo, como indicara Galois [80] por yuxtaposición, sin plan previo preconcebido, «dando tumbos» de un lado a otro, generalizando proposiciones, teorías, estableciendo analogías insospechadas a veces, con demostraciones erróneas que, sin embargo, establecían proposiciones aceptadas... Esto es un hecho a constatar, no un pensamiento más o menos plausible. En lo que va de siglo creo que puede afirmarse otro tanto, a pesar de la influencia formalista y axiomatizadora que ha impregnado la matemática fundamentalmente por los desarrollos del álgebra calificada de 'moderna' desde hace ya medio siglo. Se puede constatar en terrenos, igualmente, del análisis tras las construcciones de los matemáticos de la escuela francesa como Borel, Lebesgue, Baire, Frechet, prolongados por las funciones 'analíticas' de Luzin. Incluso un matemático ligado estrechamente a la escuela bourbakista como Dieudonné reconocía en 1959: «Desde hace cincuenta años, los matemáticos han sido llevados a introducir, no solamente conceptos nuevos, sino un lenguaje nuevo, *lenguaje creado empíricamente por las necesidades de la búsqueda matemática y cuya aptitud para expresar con precisión y concisión los enunciados matemáticos ha sido frecuentemente puesto a prueba y ha recibido la aprobación universal»* *(1959,* 34) [81]. Primero ha sido esa creación empírica y luego la reorganización de la misma atendiendo a un plan posterior, también empírico en la búsqueda de los primeros principios de los que derivar las distintas proposiciones encontradas; principios revisables por el propio dinamismo del hacer matemático, no adaptable a unos moldes previos, constantes. Desde un aspecto histórico, la inversión metodológica hace oscurecer, ciertamente, las motivaciones de su propia elección. En este punto debo indicar mi total acuerdo con la crítica de Poincaré.

Lo mismo puede decirse en cuanto a la inversión genética, ligada estrechamente con la anterior, aunque respecto a sus críticas de no ser inversión aceptable desde el punto de vista psicológico o pedagógico puedan ponerse reservas al dogmatismo, en este punto sí, de Poincaré. Reservas motivadas porque la elección de unos u otros enfoques posee un carácter marcadamente subjetivo. Frege, por ejemplo, escribía en 1893: «Puede que se opine que no eran nece-

[80] «Prefacio», de Galois. Puede verse J. de Lorenzo, *1971,* que incluye el mismo traducido por vez primera al castellano.

[81] Subrayados míos.

sarios los teoremas sobre el número infinito. Es verdad que *no lo son para la fundamentación de la Aritmética* en su extensión habitual; pero *su deducción es mucho más sencilla* que la de los teoremas correspondientes para números finitos y puede servir como preparación para éstos» (1971, 121-2) [81]. Que no fueran necesarios se mostraría posteriormente como un error; que fueran más simples y en virtud de tal simplicidad Frege realizara una exposición que invertía el orden establecido implicaba que la inversión se realizaba en nombre de un criterio radicalmente subjetivo, como es el de la simplicidad, no lógico. Criterio subjetivo opuesto al de Poincaré, quien apoyado en que el individuo ha de cubrir en su breve evolución individual todas las etapas de la evolución de la especie a la que pertenece, niega la simplicidad de dicha inversión. En la misma línea de Frege, consecuentes, se sitúan Russell y Whitehead en *Principia,* cuando en el *Prefacio* a la primera edición indican que es costumbre exponer las teorías para casos particulares cuando es más fácil realizar la exposición en el caso general. «Por ejemplo, la aritmética cardinal se concibe usualmente en conexión con números *finitos,* pero sus leyes generales valen igualmente para números infinitos, y *son más fácilmente demostrables* sin hacer mención alguna de la distinción entre finito e infinito» *(1910,* VI) [81 bis].

En la misma línea del matemático francés, por el contrario, se han situado muchos otros matemáticos. Así, Félix Klein. En su famosa *Matemática elemental desde un punto de vista superior,* 1908, que recoge las conferencias dadas a los profesores de primaria y secundaria en el movimiento de renovación pedagógica por él dirigido, agrega un *Apéndice* al volumen dedicado a la Aritmética, Algebra y Análisis titulado «Teoría de los conjuntos». Tras una breve exposición, y orientación de cómo poder servirse de esta nueva disciplina, agrega: «Desde nuestro punto de vista pedagógico-matemático, naturalmente, la respuesta debe ser absolutamente negativa, pues no deben darse tan pronto al alumno cosas demasiado abstractas y difíciles» (1908, I, 399). Y ello se fundamenta en la ley biogenética, que es la misma que enunciara Poincaré respecto a la evolución del individuo, y por la cual hay que elevarse desde lo más sencillo y concreto a lo más general y abstracto. «Nunca se repetirá bastante esto, pues siempre hay gentes que, al modo de los escolásticos de la Edad Media, empiezan la enseñanza con las ideas más generales y quieren justificar este

---

[81 bis] Subrayados míos.

método como el 'único científico'. Y, sin embargo, tal cosa no ha sido cierta nunca...» (*íd.*, 400).

Criterios subjetivos de Frege, Russell-Whitehead, Poincaré, Klein, el propio Dieudonné —de quien podrían tomarse frases copia de Poincaré y Klein—, ... Parecen no tener en cuenta la relatividad de la simplicidad buscada o contenida en esa ley biogenética, tanto en sí como en los distintos niveles pedagógicos. Relatividad que sostienen en otros contextos, al menos Poincaré y Dieudonné, al reconocer que el avance científico se debe a la reducción no ya conceptual sino metodológica obtenida gracias a las analogías observadas en términos más abstractos que economicen el pensar. Ganancia en abstracción y extensión de los haceres matemáticos que llevan aparejado un cambio en la enseñanza de los mismos.

Que el acuerdo con la crítica de Poincaré, salvo en este último punto, sea factible es lo que, de hecho, admiten epistemólogos como los ligados a la escuela de Piaget [82]. Así, Grize argumentará contra la existencia de una marcada artificiosidad en el enfoque de *Principia,* calificable en principio de empírico dado que su construcción se realiza para dar cuenta de la matemática existente, teniendo en muchos momentos que elaborar procesos no naturales que justifiquen tal matemática, alejándose con ello del verdadero proceso natural que se pretende justificar y fundamentar [83].

Desde un aspecto pretendidamente lógico se ha sostenido que las críticas anteriores no afectarían para nada a una construcción logicista o formal. Son argumentos de carácter histórico, genético, pedagógico, psicológico..., en suma, no lógicos. Creo que ello es justificable, por modo exclusivo, desde un enfoque puramente pragmático. De reconocer acertada la crítica anterior, como se hace, entonces la misma repercute en la previa toma de posición del matemático o del lógico frente a la teoría que pretende desarrollar. Al menos asegura que, al ser este punto de partida relativo, no habrá fundamentación única; el dogmatismo de uno u otro enfoque tendrá que ser, por ello, eliminado.

Por otro lado, parto de la convicción de que ninguna teoría lógica es inocua, es únicamente lógica. Si se desarrolla la misma,

---

[82] Especialmente Piaget, *1960.*

[83] Así, el expediente empleado para la suma de clases, que daría $A \cup A = A$ y como en el número natural se tiene $a + a \neq a$, salvo para $a = 0$, debe darse un rodeo artificial tomando clases biyectivas con A pero disjuntas entre sí para realizar la unión. Ver Grize, *1960,* 95.

se hace 'en función de', con unos fines extralógicos por completo. Así, 'en función de' explicar un cierto tipo de razonamiento, el matemático por modo exclusivo, y no el modal o jurídico... La elección indica que esa lógica se mueve por motivaciones que le son extrañas. Hecho reconocido por un Freudenthal, por ejemplo: «Se puede decir que Peano (...) fue el primer matemático que ha revestido de fórmulas matemáticas una estructura no demasiado trivial, e incluso razonablemente complicada, de la lengua usual. [Estructura a la que se refiere: inducción completa.] No eran los silogismos, las figuras de barbara, celarent, etc., los modos ponendo o tollendo ponens o tollens, en los que nacía la lógica matemática, sino más bien en las estructuras, menos simples y de carácter francamente matemático, donde figuraban esencialmente los cuantificadores 'hay' y 'todos', de los que los lógicos clásicos no se habían ocupado demasiado» *(1958,* 5-6). Y después de indicar tal origen estructuralmente más complicado y por ello más tardío en poner de relieve, agrega: «En realidad, el objeto analizado por los lógicos modernos (...) ha sido siempre el razonamiento matemático. (La cuestión de saber si han logrado verdaderamente el éxito en este punto cae fuera del cuadro de esta exposición, pero en todo caso yo dudaría en afirmarlo)» *(íd.,* 6). Pero si el razonamiento matemático es quien ha dado origen a las nuevas lógicas, entonces no se puede afirmar, simultáneamente, que el mismo se convertirá ya en inamovible, reificado, y la lógica construida sea algo que dé cuenta para siempre de algo que, por el contrario, no se encuentra fijado. La Lógica desarrollada quizá sea válida para explicar un determinado razonamiento matemático de un momento —del que ha tenido el nacimiento—; podrá construirse otra más amplia que dé cuenta del razonamiento matemático de otro momento. Tener en cuenta la crítica histórica no es, por ello, cuestión que no afecte al lógico. Le obligará a una u otra perspectiva, a admitir unas u otras leyes como primarias, unos u otros sistemas más adecuados, aunque posteriormente demuestre sus equivalencias.

Con ello la reducción pierde su carácter dogmático, he dicho. Von Mises admitía, incluso, ese carácter relativo, cuando, al referirse a la inversión logicista y su pretensión de reducir todos los conceptos de la Matemática a unos pocos, señalaba que considerar como más sencillos e inmediatos los de 'sucesor', aplicación biyectiva entre clases, etc., que los de 'sucesión de números naturales', por ejemplo, era más bien cuestión de experiencia personal, individual y no un criterio puramente lógico, objetivo *(1939,* 141).

Que el fin del lógico en la elaboración de un sistema lógico no sea estrictamente lógico se tiene enunciado con toda nitidez en el mismo Frege, quien lo expone en retadoras palabras: «Y, con todo, no quisiera abandonar la esperanza de que más tarde mi libro pueda contribuir a derrocar la lógica psicologista. (...) Y como refutación sólo podría admitir yo que alguien mostrase en la práctica que con ideas básicas distintas se puede construir un edificio mejor, más sólido, o que alguien me demostrase que mis principios conducen a consecuencias manifiestamente falsas. Pero *esto no lo conseguirá nadie*. Y así puede que este libro contribuya, aunque tarde, a una renovación de la lógica» *(1893,* 155). Y, junto a esta finalidad de renovación de la lógica, ciertamente conseguida, aparece en Russell-Whitehead que el modelo a elaborar es una construcción que dé cuenta del razonamiento matemático, a la vez que implique que este modelo va a influir en dicha construcción: «El tratamiento matemático de los principios de la matemática, que es el objeto del presente trabajo» (1910, V). Objetivo que implica analizar los conceptos base de la matemática, notaciones, demostraciones, lenguaje en el que se expresan... Consecuencia, la creación de un lenguaje artificial pretendidamente perfecto y que, por ello, no reflejará en su totalidad la estructura de lo que analiza, al convertirse en una parcela más de esa estructura. Parcela reconocida como tal por autores posteriores, que aceptan la tesis de Poincaré de hacer no lógica, sino matemática. Así, Gödel al indicar que la Lógica matemática presenta como uno de los aspectos el ser «una sección de las Matemáticas que trata de clases, relaciones, combinaciones de símbolos, etc., en lugar de números, figuras geométricas, funciones, etc.» (1944, 211), mientras que, por otro lado, se muestra como ciencia anterior a las demás —en su sentido lógico— que contiene las ideas y principios que rigen las restantes ciencias. Sentido este último clásico, no expresable, entonces, mediante sistemas formales. Lo que pone más de relieve aún Curry al señalar que esta última sería una lógica filosófica que trata acerca de las *normas* del pensamiento —matiz psicologista a desterrar según Frege—, mientras que la primera no sería más que «una rama de las matemáticas» *(1963,* 1).

Todo lo anterior se muestra con mayor claridad aún frente al concepto 'demostración'. Para Poincaré la demostración matemática constituía una unidad sintética entre la materialidad expresiva en que se reflejaban las expresiones en el papel y la finalidad que tal materialidad entrañaba. Rechazaba, así, el concepto de constituir únicamente una mera sucesión de proposiciones, una yuxtaposición de silogismos como decía Peano, por ser un enfoque parcial que no tiene en cuenta más que el aspecto 'lógico' y no el 'intuitivo' (planos sintáctico y semántico). Además, en la sucesión material (demostración 'lógica' o plano sintáctico) se establecía una correspondencia entre el número natural y las etapas de la demostración, por lo que este concepto se mostraría lógicamente subsidiario del número natural y no podría alcanzarse el mismo de manera lógica salvo petición de principio. Es decir, la demostración en su versión formal se apoya en la noción de iteración, de paso de una proposición a la siguiente en paralelo al paso de n a $n+1$. Noción fundamentalmente matemática y, que si quiere fundamentarse en otros elementos, habrá de utilizar —como hizo Frege— demostraciones, es decir habrá de fundamentar la iteración en la iteración.

A este tipo de argumentaciones Couturat respondería mostrando un desfase completo: «¿qué significa el *número* de los razonamientos que se habrían hecho en un momento determinado, si su orden lineal es siempre más o menos arbitrario, y procede únicamente de la necesidad práctica de enunciarlos sucesivamente en el discurso (porque el tiempo no tiene más que una dimensión)?» *(1906,* 238-9). Tras lo cual acusa a Poincaré de confundir la inducción completa con la empírica. La réplica de Poincaré es que Couturat no ha entendido nada. Lo sorprendente es que Couturat replique en términos de necesidad práctica, incluyéndose en la serie de pensadores para los cuales tales tipos de practicidad, con sus limitaciones correspondientes, son meros accidentes que nada tienen que ver con la lógica. Concepción a la que Carnap, refiriéndose a la posición concreta de Ramsey, que admite la existencia de propiedades independientemente de *si* y *cómo* el hombre finito puede alcanzar a conocerlas, calificaría irónicamente con el término de «matemática teológica» *(1931,* 39).

Sin entrar a discutir si hay o no círculo vicioso se admite, como diría Poincaré, que una demostración no es más que una sucesión o iteración de proposiciones, establecidas sobre el papel. Cada término de la sucesión se obtiene de unos primeros mediante el empleo de reglas específicas de transformación, que hacen de ley o característica de la sucesión. Ello supone la admisión de una división entre los planos sintáctico y semántico del discurso lógico, que es lo que Couturat no ve. Claramente las reglas han de enunciarse en nivel semántico, admitiéndose que las mismas han de ser 'comprendidas'. Con lo cual, quienes postulan esta separación, han de reconocer la artificiosidad de lo postulado y admitir por otro lado la intuición que pretenden desterrar de la demostración. Intuición desterrada si consideran que es el mero montón de tinta que queda en el papel. Pero imposible de suprimir si se admite que la misma es el resultado de las transformaciones de las primeras proposiciones mediante una acción reiterada de las reglas directivas.

Baste mencionar aquí cómo Roger Martin, por ejemplo, queriendo indicar lo que es una demostración formal —mera indicación, porque se comienza dando criterios abreviadores, sigue añadiéndose instrucciones de lo que debe o no hacerse en cada una de las etapas de la demostración, que aparecen numeradas contra el sentir de Couturat— da dos modelos ejemplificadores para concluir: «Se ve sobre estos ejemplos que la demostración de las leyes lógicas elementales y bien conocidas es penosa y extremadamente molesta si se impone realizar todas las etapas. El progreso hacia el rigor se paga con un entorpecimiento casi insoportable de la exposición» *(1964,* 20). Ello ha impuesto a los lógicos la búsqueda de procesos que hagan el razonamiento más cómodo, rápido y abreviado, estereotipando ciertos fragmentos mediante la elaboración de reglas deductivas secundarias o derivadas. A pesar de su longitud, no me resisto a transcribir las palabras de un lógico francés como Roger Martin, que menciona el caso de Poincaré como paradigma de opositor destacado, y equivocado, a las nuevas lógicas por argumentar que las mismas escamoteaban el verdadero pensamiento creador mediante un tecnicismo laborioso que ocultaba la marcha de la demostración; argumento que, para Martin, se muestra erróneo desde un enfoque actual *(1964,* 3-4), a pesar de que las palabras que he transcrito parecen decir lo contrario. Más tarde agregará: «Sin embargo, incluso cuando se hace uso de reglas de este género [se refiere a las derivadas], la demostración conserva un carácter desconcertante: la evidencia de cada una de las inferencias no impide que la línea general de la demostración parezca arbitraria. Así la razón de ser de las sustituciones (...) no aparece más que cuando el cálculo se encuentra ya bastante avanzado. Más generalmente, sólo la costumbre permite, frente a un problema nuevo, adivinar en qué dirección es necesario marchar; incluso ella no llegará a excluir jamás los tanteos» *(íd.,* 21). Muy parecidas son las palabras que se intercalan en todas las lógicas.

Si se criticó a *Principia mathematica* por no haber formalizado suficientemente sus demostraciones, dado el gran número de indicaciones —de nivel semántico— que se formulan, al igual que las etapas de la demostración que se encuentran abreviadas y no explicitadas en su totalidad, era crítica inconsecuente. Los propios autores ya la admitían al indicar que no realizaban demostraciones completas, sino que seguían la norma acostumbrada en la Matemática, confiando en el esfuerzo comprensivo por parte del lector *(Prefacio,* 1.ª ed., VI). Criterio abreviador radicalmente subjetivo, una vez más, porque no hay criterios objetivos que permitan indicar hasta dónde llevar a cabo la abreviación y hasta dónde llega la 'madurez', el esfuerzo comprensivo del lector. Desde un enfoque que se pretende limitado a la matemática, Bourbaki señala cómo en la redacción matemática se acostumbra a aproximarse a los textos formalizados «hasta que, del acuerdo general de los matemáticos, se haga superfluo llevar ese trabajo más adelante» *(1960,* 2). La dificultad se encuentra en cómo delimitar ese 'acuerdo' mediante criterios que se muestren objetivos o lógicos. Dificultad que a Bourbaki no se le plantea dado que se mueve en terreno matemático, en el cual «el modo de razonamiento por encadenamiento de silogismos no es más que un *mecanismo* transformador, aplicable indiferentemente a todo tipo de premisas. (...) Es la *forma* exterior que el matemático da a su pensamiento, el vehículo que lo hace asimilable a los otros, y, para decir todo, el *lenguaje* propio a la matemática; pero no hay que buscar ahí otra cosa. (...) *no es más que una cara,* y la menos interesante» *(1948,* 37).

Frente a las palabras de Bourbaki, que hubieran hecho las delicias de Poincaré, podrían seguir acumulándose citas de cómo no se lleva la demostración hasta su grado total como hubiera deseado Frege, necesitando de la semiformal. Y ello por la imposibilidad de llevarla a cabo de modo efectivo salvo en algunos sistemas artificiales construidos con tal fin mostrativo. En todos los casos se pretende que tal necesidad es debida a una dificultad de carácter pragmático, no teórico, dado que el individuo no puede manejar cientos de miles de signos para escribir la abreviatura '1', como sostiene Godement *(1963,* 29). Lo único que parecen olvidar quienes pretenden solventar estas diferencias como no significativas —además de su carácter teológico— es que el hacer matemático suele hacerlo el hombre. Reconocer que la demostración formal es prácticamente imposible viene a reconocer que no se puede prescindir de la intuición abreviadora. Lo otro es, con palabras algo metafóricas, posición que recuerda la fábula de la zorra y las uvas.

Los métodos abreviadores, admitidos una vez, por imprescindibles, constituyen normas que se pretenden en plano metodológico, psicológico, genético, es decir, no lógico. Y, ciertamente, no lo son. Pero su necesidad implica que la demostración formal pura ha de requerir la intuición que la informe y la conduzca.

Por otro lado, desde las mismas posiciones se ha tenido que llegar al reconocimiento del fracaso de las mismas, de su pureza lógica. Gerhard Gentzen, concretamente, tuvo la virtud de indicar el desfase de las mismas. «Mi primer punto de vista fue el siguiente. La formalización del razonamiento lógico, tal como ha sido desarrollado en particular por Frege, Russell y Hilbert, está relativamente muy alejada del modo de razonamiento que se utiliza en realidad en las demostraciones matemáticas» *(1934,* 4). Naturalmente, lo que queda en el papel, en el plano pretendidamente sintáctico, no es el esfuerzo, los tanteos, la marcha auténtica del razonamiento demostrativo; quedan unas marcas. Pero no cabe confundir tales marcas, los propios logicistas lo sostienen, con el proceso razonador, salvo aceptar la irónica frase de Brouwer, «la cuestión de dónde existe la exactitud matemática, es contestada de modo diferente por ambos bandos; el intuicionista dice: en el intelecto humano; el formalista dice: en el papel» *(1912,* 67).

Si en las últimas líneas se ha hecho referencia principalmente al formalismo, se debe a que, como hace el mismo Gentzen, en este terreno de la demostración ambas tendencias parecen encontrarse con bastantes puntos de encuentro. El fundamental, que la demostración no debe hacer llamada a intuición alguna. Y esto es lo que a Poincaré le parecía un exceso. Y no sólo a Poincaré. Los logicistas llegan al mismo porque, básicamente, consideraron a la lógica como un *ars inveniendi,* como un método mecánico para resolver todas las cuestiones que pudieran plantearse al matemático —recuérdese el primer criterio de analiticidad de Frege, por ejemplo—. En este sentido la demostración no constituiría más que la maquinaria que lograría reducir tal cuestión a los primeros principios, lo que origina las ironías de Poincaré respecto al piano lógico de Jevons. He mencionado ya cómo el resultado de Gödel hacía inviable esta consideración y, con ella, el sentido meramente deductivo-mecánico de la demostración.

Ligándose a este punto de exceso logicista, Beth ha de reconocer que «una segunda noción incorrecta frecuentemente defendida por los sucesores de Leibniz es la de la independencia de las matemáticas de todo dato intuitivo; aun la misma lógica formal precisa que ciertas cosas sean dadas intuitivamente» *(1965*, 49). Beth se remite ya a trabajos anteriores suyos sosteniendo la necesidad de la intuición al referirse a cómo Carnap pretendió fundar las matemáticas de manera puramente formal, sin hacer llamada alguna a la evidencia intuitiva. Pero, «los resultados de un análisis sintáctico dependen esencialmente de la elección del sistema sintáctico S y, para poder fiarse de sus resultados, es necesario que los mismos sean invariantes para todo cambio de S. (...) Ahora bien, la invariancia exigida no existe. Por ejemplo, si sabemos que la teoría T admite, junto al modelo normal M, un modelo patológico M^1 es porque tenemos la noción de postulado de T en un sentido intuitivo referido al modelo M» *(1956 a*, 23).

2. *Reducción conceptual.* Poincaré se limita, fundamentalmente, a defender su tesis de que el número natural es un objeto construido a través de un proceso de iteración, inductivo, posibilitado únicamente por la intuición pura de su síntesis —su construcción—. Frente a esta tesis, se le muestran los intentos definitorios como condenados al fracaso porque, en ellos, se cometerá, siempre e ineludiblemente, un círculo vicioso, el mismo que se comete en el término 'demostración'. Y ello porque el número ha de intervenir en todo sistema lógico.

En contra de la tesis de Poincaré se afinca una pretendida distinción, no tenida en cuenta por el matemático francés. Como claramente reconoció Frege, la construcción logicista debe apoyarse en lo que calificó de Aritmética material. Y ello porque la formal es «comparable a una enredadera que trepa sobre la Aritmética material y que pierde todo asidero, si se le quita este apoyo y fuente de nutrición» *(1903*, 100) [84]. La construcción de la Aritmética formal ha de hacerse teniendo presente siempre la material como hilo conductor. Pero quien se afinca en ésta para elaborar construcciones matemáticas no se afinca en los fundamentos últimos de la misma, fundamentos que sólo podrá obtener mediante la construcción de la Aritmética formal. Es distinción que, desde un plano menos poético, hará Bourbaki: «no es po-

---

[84] Tomado de Thiel, *1972*, 47.

sible emprender una descripción [de un sistema formal] sin hacer uso de la numeración; aunque muchas personas hayan podido quedar embarazadas de este hecho, hasta ver en él una petición de principios, está claro que en la ocurrencia las cifras se utilizan únicamente como referencias (...). No discutiremos la posibilidad de enseñar los principios del lenguaje formalizado a seres cuyo desarrollo intelectual no llegara ni a saber leer, escribir y contar» *(1960,* 4-5). Apoyándose en esta distinción, cabe argumentar que la crítica de Poincaré es errónea, embarazado en la no distinción de una Aritmética material y una Aritmética formal.

Aquí inciden dos consideraciones. Una se refiere al hecho de que esa construcción formal no refleja de modo completo la material, sino sólo alguno de sus aspectos. Es argumento extrapolado de Poincaré, dado que lo dirigió al intento hilbertiano de fundamentar la geometría. Pero reflejar un aspecto parcial no puede considerarse como una fundamentación radical, sino como la falacia de tomar la parte por el todo. Por otro lado, cabe preguntarse en qué se diferencian los números de la Aritmética material que sirven de apoyatura para la construcción de la Aritmética formal, de los números construidos o elaborados en ésta. Además, ya el mero hecho de aceptar la distinción hace que el intento logicista caiga bajo la acusación de intuicionismo ingenuo que he citado originario de Beth. La existencia de unos datos aritméticos primarios, irreducibles a cualquier definición en términos de disciplinas primarias, lógicas, se convierte en un hecho. El logicismo pretende ocultárselo, al igual que la necesidad de la comprensión intuitiva de la reducción conceptual que realiza. Lo que no hace Bourbaki al requerir el previo conocimiento del saber leer, escribir y contar y, por supuesto, saber matemáticas. Como afirma Pap: «sería una completa equivocación creer que mediante la reducción logística se prueba que el saber apriorístico es lógico formal y nada más, pues, en todo caso, la deducción de la aritmética a partir y con la ayuda de las leyes de la lógica formal sólo es posible por medio de los *análisis conceptuales* (...) y, como hemos visto, se movería en un círculo quien quisiera volver a fundamentar éstos en la lógica formal» *(1955,* 278). La aceptación de esas nociones aritméticas junto a la de otras puramente lógicas como base para la edificación de la matemática fue reconocida por Hilbert como indispensable, única vía de solución para coordinar tanto la búsqueda fundacional como la misma elaboración matemática.

En cuanto a que la Aritmética axiomática no refleje adecuadamente la material de la que parte, en su plenitud, venía determinado por el intento de Dedekind, el cual se veía en la imposibilidad de demostrar que lo por él construido respondiera a la Aritmética material, salvo cometer un círculo vicioso empleando la inducción completa e introducir postulados existenciales como el del infinito.

La segunda consideración que incide en esta distinción de niveles no es otra que el segundo aspecto de la crítica de Poincaré: la impredicatividad o círculo vicioso que aparece en la pretendida reducción conceptual, y ello por trasladar sin más crítica a las clases infinitas las reglas válidas para las clases finitas. Impredicatividad en la definición de clase hereditaria, de número inductivo; círculo vicioso en la teoría de los tipos, que presupone la previa sucesión ordinal como construida. Replicar como hizo Russell al ensayo de Poincaré, *1909 c,* donde exponía que la teoría ordinal de tipos presuponía la teoría ordinal que pretendía fundamentar, publicando la traducción francesa de lo que sería el Capítulo II del *Prefacio* de *PM,* en sus páginas 37-60, agregando que puede superarse hablar del orden de un tipo sin más que escribir ∅!x, f!(∅!x), «y así sucesivamente», para añadir: «Así, aunque los tipos tengan un orden, los ordinales no están presupuestos en la teoría de los tipos, y no hay círculo vicioso alguno en fundar la teoría de los ordinales sobre un sistema que supone la teoría de los tipos» *(1910,* 301), no encierra defensa alguna respecto al segundo aspecto crítico de Poincaré, ya que por un lado, la teoría de los tipos general menciona su validez para *todo orden finito* [85], viéndose imposibilitada tal teoría, por otro lado, a dar cuenta de la infinitud de la serie de los números naturales, por lo que la infinitud debe postularse como principio lógico, al igual que en el caso de Dedekind. Además, en el «y así sucesivamente...» se encierra la iteración, el paso de un tipo al siguiente; es decir, se encierra el proceso inductivo que es, en el fondo, lo que se pretende fundamentar. El mismo Russell había utilizado ya en su primera versión casi definitiva de 1908 señalando que cada tipo funcional se caracteriza en función del anterior y, para ello, se definen los primeros términos de los tipos y se agrega un «y de este modo se proseguirá inde-

---

85 Ver Hao Wang, *1967,* especialmente 47-8.

finidamente» *(1908,* 107) [86]. En este sentido la acusación de Poincaré me parece acertada, aunque debiera haber precisado que Russell se basaba en la iteración como definición y no en la inducción completa como razonamiento. En todo caso, la acusación de que la fundamentación russelliana es insuficiente quedaría asegurada al aceptar definiciones de carácter recursivo de modo implícito, cuando de modo explícito se negaba a tal aceptación. Carácter inductivo o reiterativo admitido de modo implícito por Frege al definir sus números individuales de modo inductivo a partir de '0'. Admisión que condujo a Carnap a atribuirle un carácter constructivo semejante al intuicionista en contraposición a las explicaciones formalistas *(1931,* 41), carácter admitido igualmente como factible por Benacerraf-Putnam *(1964,* 13-4).

Por otro lado, la reducción conceptual conducía a definir el número en términos de clase y ésta, a su vez, en términos conjuntistas. Términos que pueden admitirse como propios del hacer matemático más que lógico. La reducción se convertiría de un término matemático a otro también matemático, luego no habría reduccionismo lógico alguno.

3. *Rigor, auxiliares, esterilidad.* La crítica de Poincaré, nada grata, de que la logística —y concretamente se refería al 'peaniano', aunque sus oponentes la extendieron a las nuevas lógicas— era estéril, ha quedado grabada como auténtica espina para los logicistas. Rey Pastor comentaba el hecho en 1951 retomando palabras de Bell: «Bell critica el 'error heredado de Poincaré, de que la Lógica matemática es tan *estéril como una mula*' Más finamente podría decirse, al cabo de medio siglo, que la Logística es una solterona que no ha perdido las esperanzas» *(1951, 42 n3)* [87]. Y Gödel, en 1944, no puede dejar de referirse a esta acusación terminando su homenaje a Russell con un «aun Poincaré reconocería como prueba suficiente de su fecundidad» *(1944,* 232). Fecundidad no de la logística, apostillaría Poincaré. Fecundidad de quienes la manejan, de quien como Gödel es un matemático y utiliza los métodos propios del pensamiento matemático con

---

[86] Este enfoque se observa en todo el párrafo IV, «La jerarquía de los tipos», pp. 102-110.

[87] La cita completa de Bell y su lugar, se produce tras referirse a las polémicas entre formalistas e intuicionistas: «En 1930-40, los neutrales vacilan entre el nerviosismo y la irritación. Los técnicos de la generación vieja persistían en su error heredado de Poincaré, de que la lógica matemática es tan estéril como una mula. Poincaré murió en 1912» *(1940,* 565).

total habilidad, métodos como los de recursión, precisamente, sin los cuales no hubiera podido demostrar los teoremas que le han hecho famoso, a él y no a la logística. Es el genio humano el creador, utilizando para ello, no puede ser otra su manera, las técnicas y los resultados adquiridos por otros hasta ese momento.

Sin embargo, Poincaré comete en este punto, en cuanto a los auxiliares, unas ciertas exageraciones. He indicado cómo él mismo admite que para lograr el rigor es preciso analizar y, para ello, es preciso formalizar. Lo reconoce en su réplica a Lachelas, lo reconoce cuando critica a Hilbert. Y, sin embargo, se deja arrastrar en algunos momentos por la polémica y niega valores al empleo del signo, a esa formalización obligada. En ella, en cualquier tipo de análisis, el lenguaje simbólico es fundamental. Como Russell advirtiera: «La reflexión sobre problemas filosóficos me ha convencido de que éstos están conectados con los principios del simbolismo —es decir, con la relación entre lo que significa y lo que es significado— en número mucho mayor de lo que yo pensaba, o de lo que se piensa generalmente. (...) Por el estudio de los principios del simbolismo podemos aprender a sustraernos de ser influidos inconscientemente por el lenguaje, y evitar de este modo una multitud de nociones erróneas» *(1923,* 14).

Poincaré veía en el empleo del simbolismo no un instrumento de creación, sino de análisis; pesado análisis, además. Apoyándose en la 'traducción' al lenguaje usual del axioma de Burali-Forti realizada por Whitehead y que mostraba que el mismo era falso, interpretaba las demás locuciones en el mismo sentido. Así, veía círculo vicioso en la definición del número 'dos', por ejemplo, al afirmar que es la clase de todas las clases de dos miembros. Ciertamente para seguir el desarrollo formal hay que suponer conocida, ya se ha dicho, la aritmética material. Creo que era el punto a destacar en Poincaré: No se puede entender 'dos', 'tres', etc., si no se conoce previamente qué es el número. A ello replicaría Couturat indicando que, de modo efectivo, los círculos viciosos aparecen, pero sólo como traducción al lenguaje usual, proceso que considera ilícito *(1906,* 14), lo cual mantendrá posteriormente Hempel, por ejemplo *(1945 b,* 17). Argumento no convincente, dado que si una paradoja o círculo vicioso se encuentra en una expresión formal, la misma aparecerá en su traducción al lenguaje usual, y recíprocamente. Si el lenguaje formal sirviera para enmascarar paradojas entonces cabría darle la razón a Poincaré. Que tal transcripción sea factible se observa en cualquier trabajo de lógica, incluso en *Principia mathematica.*

Precisamente ha sido gracias al simbolismo, a su adecuado manejo, que el rigor y la precisión han aumentado considerablemente. Aumento reflejado también en el propio estilo expresivo. Se ha insistido frecuentemente en este punto de que gracias a la elaboración de sistemas formales con sus simbologías adecuadas han podido formularse y demostrarse teoremas como los de Gödel, imposibles en el lenguaje ordinario; en otras palabras, las intuiciones más profundas de Poincaré han podido demostrarse gracias al empleo sistemático de los auxiliares a los que, sin embargo, no daba excesiva importancia.

4. *Reducción proposicional.* El programa logicista se interpretaba como una reducción de las proposiciones de la aritmética a unas leyes lógicas primarias consideradas como más generales. Era lo formulado por Frege. Al intentar demostrar que las definiciones de Cantor-Dedekind y la de Frege de número eran equivalentes —fundamental para pasar de la teoría cardinal a la ordinal en su esquema— Russell observa *(1905 b)* que dicha demostración debe apoyarse en un principio como el postulado multiplicativo o postulado de elección que, de entrada, pretende no admitir sin alguna reserva, pero que se muestra imprescindible para la equivalencia. Igualmente Russell —que siguiendo a Frege consideraba que el axioma del infinito podría llegar a demostrarse como quería Dedekind, no necesitándoselo para su fundamentación logicista— al tener que expulsar las definiciones impredicativas contenidas en dicha fundamentación elabora su teoría de los tipos. Pero, en ella, se muestran como necesarios dos nuevos principios o axiomas: del infinito —que carece de demostración posible— y de reducibilidad.

Bastaría detenerse aquí para señalar cómo la crítica de Poincaré incide en esta génesis: No hay cuadro a priori de principios lógicos suficientes que enmarquen de una vez para siempre la construcción matemática. La capacidad creadora los desborda. Sólo el matemático, cuando persigue un fin determinado tendrá capacidad para romper los moldes que él mismo se haya impuesto, y admitir otros principios, otras proposiciones que alteren el cuadro de partida y que poseerán un carácter matemático indiscutible.

Los tres axiomas que ha de requerir Russell se le habrán de mostrar como imprescindibles. Pero los tres poseen un carácter controvertiblemente lógico. Punto en el que interviene otra consideración: la atribución de 'lógica' a una proposición determinada. Como acertadamente señala Combès, lo que Russell parece querer por reducción proposicional, no es la reducción demostrativa de unas proposiciones lógicas a otras, sino que las proposiciones que componen la unidad lógico-matemática poseen características propias como la de ser formales. «El hecho para una proposición de ser deducida de otra proposición carece de importancia y es a decir verdad arbitraria. (...) La organización en un cuerpo deductivo no es lo decisivo a sus ojos» (Combès, *1971*, 27). Es interpretación basada en el giro de Russell ante dificultades como las anteriores, obtenido, realmente, tras la influencia que sufriera de Wittgenstein. Ello se pone de manifiesto en las palabras del mismo Russell: «La característica fundamental de la lógica es, manifiestamente, la que se halla indicada cuando decimos que las proposiciones lógicas son verdaderas en virtud de su forma. El problema de la demostrabilidad no halla cabida aquí, ya que cada proposición que en un sistema se deduce de acuerdo a las premisas puede, en otro sistema, ser tomada como premisa. (...) Todas las proposiciones demostrables en cualquier sistema deben compartir con las premisas la propiedad de ser verdaderas en virtud de su forma; y todas las proposiciones que son verdaderas en virtud de su forma deben incluirse en cualquier lógica adecuada» *(1903, Intr., 2.ª ed.,* 16). La dificultad se centra en caracterizar qué deba ser la 'forma' en virtud de la cual una proposición pueda ser calificada de lógica. Dos son los criterios que parecen mostrarse adecuados: *a)* Que los constituyentes que intervienen en esas proposiciones sean únicamente variables y constantes lógicas; *b)* Son independientes a cualquier contenido existencial.

En este sentido los tres axiomas se dividirían en dos tipos: de elección e infinito por un lado; por otro, el de reducibilidad. Los primeros son de carácter estrictamente existencial, luego no serían lógicos según el criterio *b)*, aunque pudiera llegar a admitirse que lo fueran por *a)*. Su admisión, como propios del hacer matemático, como juicios sintéticos a priori en el sentido de Poincaré. Russell trata de paliar este hecho y los propone a título de hipótesis, de antecedente de un condicional *(1908)*, en cuyo caso habría que decir 'Si se admite el postulado de elección (del infinito) entonces...' Solución radicalmente artificial que convertiría en lógica a cualquier otra disciplina, como prolongación de la misma.

En cuanto al axioma de reducibilidad se observa que la teoría de los tipos se crea para dar explicación de algo, y no lo logra ya que muchos teoremas no sólo del Análisis como se ha insistido, sino la propia Aritmética no podrían ser formulados, ni siquiera la construcción de los números individuales de Frege. Ante este hecho, como señalaría Carnap (1931), Russell utiliza la «fuerza bruta» *(1931,* 36) introduciendo el axioma de reducibilidad, auténtico *hara-kiri* de la razón como lo calificara Weyl *(1949,* 55).

La reducción logicista, en cualquiera de sus matices —fregeano o russelliano— conduce, por todo ello, a sostener que la Aritmética, la Matemática en general, se constituye en disciplina sintética a priori en terminología de Frege, es decir en disciplina que, junto a postulados o leyes lógicas de total generalidad y validez requiere de postulados propios no lógicos para poder desarrollarse. No hay, por consiguiente, reducción proposicional y puede decirse que ello ha sido demostrado por el propio logicismo dando la razón a la intuición de Poincaré.

§ 2. Limitaciones formalistas

El desarrollo del hacer matemático orientado en la corriente axiomatizadora formalista ha sido, realmente, espectacular. Y lo ha sido tanto en su vertiente de hacer pragmático matemático como en su vertiente de búsqueda de fundamentos, detenida esta vertiente a partir de las limitaciones internas surgidas a partir de 1930. Desarrollo en detrimento de otro tipo de haceres no menos matemáticos y que han ido evolucionando a partir del Análisis. En el fondo, la orientación formalista axiomatizadora se mostraba como inevitable para algunos dada la necesidad que del signo gráfico tiene dicho hacer matemático. Necesidad puramente pragmática, pero irrenunciable. La corriente formalizadora se ha ligado, por ello, a la algebrización y, por consiguiente, a la explicación matemática mediante estructuras axiomáticas. El propio Nicolás Bourbaki, ejemplo del formalismo pragmático, reconocerá la utilidad de la axiomática sígnica como recurso, aunque no de sus tesis filosóficas. Empleo axiomatizador para el manejo de unos signos que se pretende carezcan de correlato alguno, pero en el cual se encuentre el auténtico hacer matemático: «Lo que se propone por fin esencial la axiomática, es precisamente lo que el formalismo lógico (la logística), solo, es incapaz de proporcionar, la inteligibilidad profunda de las matemáticas» *(1948,* 37). Ahora bien, esta axiomatización formalizadora, que a partir de 1930 desdeña plantearse las cuestiones semifilosóficas-semimatemáticas, encierra sus peligros. El propio no planteamiento de las cuestiones de fundamentos conduce a un pragmatismo idealista extraño. Como señala Kreisel, Bourbaki parte de todo un conjunto de reglas de deducción lógica y criterios que no se invocarán después salvo en algún lugar aislado, dando por sobreentendido que la noción de consecuencia lógica, por ejemplo, se supone conocida de modo intuitivo. Lo cual equivale a afirmar que no hacía falta poner tales reglas de deducción, para no seguirlas. Es posición que, con palabras de Kreisel, «no proporcionan la menor contribución positiva a los fundamentos, y son esencialmente un consuelo de que ciertos problemas de fundamentos no se resuelven exactamente como se hubiera deseado» (Kreisel-Krivine, *1967,* 187). Pero si por el frente de la fundamentación nada se resuelve, porque no se plantea, por el lado pragmático, que es el único que parece interesar, también esta posición muestra una deformación clara. La de olvidar que, con frase de Poincaré, la matemática no tiene como misión mirarse eternamente su ombligo. Un bourbakista como Jean Dieudonné, portavoz del más radical formalismo inscripcionista del grupo en sus primeros momentos, llega a exclamar, parafraseando a Poincaré sin quererlo: «Los matemáticos que hacen la abstracción por el amor de la abstracción son lo más frecuentemente los mediocres» *(1968,* 7). Es acusación consecuente con el enfoque puramente interno de esta tendencia; el olvido de la génesis de los problemas reales vuelve estéril a la matemática dando nuevamente razón a Poincaré en el sentido de que ésta no consiste meramente en el desarrollo sistemático de todas las proposiciones contenidas en unos cuantos axiomas o postulados que cada matemático puede arbitrariamente ponerse, sino que viene del planteamiento de problemas y temas esbozados en la experiencia, aunque ésta no tenga que ser experiencia estrictamente empírica, sino conceptual, a partir de ciertos niveles de abstracción. Pero es olvido que se encuentra fundamentado quizá tanto en el formalismo inscripcionista como en las tesis centrales del logicismo —en su base ontológica— en el sentido de enfocar la Matemática como una disciplina ya totalmente hecha, limitándose a descubrir el matemático las diversas tesis, que se encadenan en sistema axiomático caracterizador de unas estructuras determinadas. Limitación que es a su vez delimitadora de campos dado que para el desarrollo de la matemática, la matemática parece autosuficiente. Desde este terreno, en el magnífico libro de Mooij se encuentra lo que se quiere ver como una acusación respecto al matemático francés: Contrastando la posición de Poincaré con la de Hilbert, para quien todo conocimiento científico caería más pronto o más tarde bajo el método axiomático, como una rama más del formalismo matemático, Mooij agrega: «para Poincaré la demarcación entre matemáticas y experiencia es mucho más fluida (nota p. p.: Es probable que se resienta aquí de su educación en la Escuela Politécnica)» *(1966,* 102).

Ambos peligros —esterilización progresiva de ideas fecundas, desencanto de dar una justificación formal del enfoque formal— fueron denunciados con vigor por Poincaré. En esta denuncia creo que se encuentra uno de los aciertos intuitivos suyos, frente a lo que cabría calificar de excesos esperanzados formalistas, corriente a la que él contribuyó, mediante su crítica, a dar nacimiento. Contribución basada en que la corriente axiomatizadora y formalista de los últimos años del siglo XIX pretendía zafarse de las cuestiones metafísicas que podrían encontrarse en las preguntas del tipo ¿qué son los números? mediante la aceptación de principios como el de permanencia de las leyes formales, lo cual provocaba cierta insatisfacción desde un enfoque de fundamentación.

Tal insatisfacción, para Poincaré, estribaba en una serie de cuestiones que hoy se calificarían de epiteóricas y que se muestran como no rigurosamente delimitadas en los primeros años de este siglo. Cuestiones que agrupo en los puntos siguientes:

1. *Papel de los postulados.* Para Poincaré o son meras convenciones —y entonces el criterio central es el de consistencia para poder aceptarlos— o han de admitirse en su sentido tradicional de axiomas, en cuyo caso habrá que dar criterios electivos. Tales criterios se le muestran como imposibles de formalizar, por lo que el sistema, desde su aceptación, se apoyará en la intuición. Ello supone, además, la previa existencia de la disciplina a formalizar, por lo que esta tendencia no podrá ser satisfactoria en cuanto a fundamentación última de lo ya construido, por exigirlo como dado.

Si el primer elemento de la disjunción se dirige principalmente hacia el formalismo inscripcionista, el segundo va hacia el logicismo y la axiomática conjuntista de Zermelo. Y ello tras la publicación, por parte de Russell, 1908, de la versión casi definitiva de la teoría de los tipos; por parte de Zermelo, *1908 b*, de sus fundamentos de la teoría de conjuntos.

1. La posición de Russell es terminante: parte de una matemática ya existente a la que hay que sistematizar en teoría unitaria, lógica. De aquí la búsqueda de unos postulados, de una teoría consecuente. «Mas si la matemática ha de ser posible, es absolutamente necesario que encontremos un medio de formular enunciados que equivalgan...», será el preámbulo del axioma de reducibilidad *(1908*, 110); análogo para el axioma multiplicativo. «Ninguna de estas hipótesis equivalentes es, a juzgar por las apariencias, susceptible de demostración, si bien el axioma multiplicativo produce, al menos, una notable impresión de evidencia» *(íd.*, 139); y, respecto al axioma del infinito, «necesitamos, pues, al parecer, un axioma en el cual se estipule...» *(íd.*, 137).

A la crítica de Poincaré respecto a la elección del postulado de reducibilidad en lugar del principio de inducción completa y los problemas de la posible equivalencia entre ambos, Russell responderá dando los criterios propios de su elección y mostrando la mayor potencia del postulado de reducibilidad. «Que el axioma de reducibilidad es autoevidente es una proposición que difícilmente puede ser sostenida. Pero de hecho la autoevidencia no es más que una parte de las razones para la admisión de un axioma, y no es indispensable» *(PM.*, 59) [88]. Russell parece dar a entender que las razones electivas serían: potencia deductiva, plausibilidad en que las tesis obtenidas no sean falsas y sí cuando el axioma lo fuera. Que la evidencia no sea criterio válido viene asegurado por «el hecho de que se sigan paradojas de premisas que no requirieron previamente limitaciones conocidas» *(íd.)*. Naturalmente ello supone que la Matemática se encuentre, ya, dada de antemano. Lo cual cuadra con el pensamiento total de Russell en esta época. «El punto capital es que lo que evoluciona es nuestro conocimiento de las matemáticas, y no el cuerpo de las verdades que descubrimos gradualmente. Esta evolución hace muy

[88] Es el cap. II de *PM*, que retorna las mismas palabras de Russell, *1910*.

probable que una lista de ocho constantes realizada en el estado presente de nuestro conocimiento tenga necesidad de corrección; pero ello no hace probable que no se pueda encontrar ninguna lista de constantes» *(1905 c,* 910).

Suposición ciertamente arbitraria. Incluso incompatible con el marcado propósito russelliano [89] de reducir la matemática a la lógica. De aquí la diferencia que realiza en los tres axiomas que acepta. Como el multiplicativo y el del infinito presentan un matiz existencial, y ello no es adecuado con la idea de que sean postulados estrictamente lógicos, la solución es convertirlos en hipótesis. «A falta de prueba, lo mejor es no dar por sentado el axioma multiplicativo, limitándonos a presentarlo a título de hipótesis cada vez que nos sirvamos de él» *(1908,* 140). Naturalmente como la lógica concierne con la posibilidad de existencia y no con la existencia física, cabe preguntarse por la posibilidad de tal posible totalidad infinita, respecto al axioma del infinito. La respuesta de Russell es que dicha posibilidad es autoevidente, encontrándose en el punto que quería haber abandonado. Ello lo resaltará en las conferencias acerca del Atomismo lógico al señalar: «Lo que un lógico adoptaría como premisa, en una ciencia determinada [que nuevamente supone ya adquirida], no ha de coincidir con lo primero y más fácilmente conocido: será una proposición dotada de gran fuerza deductiva, considerable evidencia y exactitud, algo muy diferente, pues, de las premisas de las que, en realidad, pudo partir el conocimiento de ustedes» *(1918,* 253).

Pero sean las hipótesis de existencia más o menos plausibles, los criterios dados por Russell carecen de objetividad y no son, por ello mismo, formalizables. Unicamente cabría la posibilidad de tomar el primero, el de alcance deductivo, que implicaría, a su vez, la posibilidad de una infinidad de elecciones y deducciones. El criterio es, por otro lado, esencialmente pragmático. Lo cual fue reconocido explícitamente por el mismo Russell: «Este axioma [de reducibilidad] tiene una justificación puramente pragmática: da los resultados deseados, y no otros. Pero claramente no es el tipo de axioma con el que podemos contentarnos» *(PM., Intr., 2.ª ed.,* XIV).

[89] Y no digo logicista porque Frege, ante el reconocimiento de la necesidad de suposiciones existenciales para ser coherente su plan, prefirió ser coherente él y abandonar el logicismo buscando en la geometría la posibilidad de fundamentar la Aritmética, dado que en geometría se muestra más plausible que en lógica la aceptación de un postulado como el del infinito.

Frente a esta falta de criterio objetivo alza Poincaré la conveniencia de adoptar la consistencia de dichos postulados. Criterio que no es necesario para Russell dado que parte de la previa existencia de lo que postula, y de aquí su consideración de desacertada la posición de Poincaré. Pero aun en este caso es claro que la prueba de consistencia no se ha de considerar como superflua y ello en razón de las propias palabras de Russell de que el error puede surgir aun partiendo de premisas consideradas como evidentes, error que no puede estar asegurado porque aún no se haya encontrado en el proceso de descubrimiento.

En otros términos, las diferencias respecto al papel de los postulados entre Poincaré y Russell se sitúa en que este último parece aceptar los axiomas como verdades necesarias, al igual que a las restantes proposiciones del sistema, como se desprende de lo mencionado en cuanto a las proposiciones como verdaderas en virtud de su forma y no de su posibilidad demostrativa. De aquí la diferencia entre los axiomas y las restantes proposiciones no es radical, sino de la 'posición', dada por quien maneja el sistema, y se hagan intercambiables axiomas y proposiciones del sistema. Ello equivale a decir que, para el logicista, el axioma no tiene por qué ser evidente por sí mismo ni necesite tampoco de la demostración de su consistencia. Unicamente requiere una justificación que se enlaza, como en la física, con el hecho de que es posible obtenerlos mediante una 'percepción intelectual', en términos de Gödel *(1944,* 213) en base al realismo platónico radical que subyace en su posición.

2. Zermelo se sitúa en línea paralela a la de Russell en cuanto a la previa existencia de una teoría intuitiva de conjuntos, pero pretende un constructivismo apoyado en la intuición del tipo de Poincaré. Su idea consiste en partir «de la teoría de conjuntos tal como ha sido históricamente dada» y «buscar los principios requeridos para establecer los fundamentos de esta disciplina matemática» *(1908 b,* 200). Dichos principios se deben restringir «suficientemente para excluir todas las contradicciones y, por otra parte, tomarlos suficientemente amplios para retener todo lo que es válido en esta teoría» *(íd.)*. De aquí que el objetivo de Zermelo se centre en reorganizar la creación de Cantor y Dedekind en un sistema axiomático que cumpla las condiciones anteriores, sistema reducido a unas pocas definiciones y siete principios o axiomas que «aparecen como mutuamente independientes. La

cuestión, más filosófica acerca del origen de esos principios y la extensión para la cual son válidos no será discutida aquí. No he sido suficientemente capaz para demostrar rigurosamente que mis axiomas son consistentes, aunque esto es ciertamente esencial; en su lugar me he confinado a establecer que las antinomias descubiertas desaparecen para siempre si se adoptan los principios aquí propuestos como base» *(íd.,* 200-1). El pragmatismo en el enfoque de Zermelo no requiere comentarios. Tampoco, la necesidad que observa en cuanto a la definición de consistencia y su impotencia para lograrla.

Sin embargo, al responder a las críticas de Peano referentes al principio de elección, Zermelo se ligará a las mencionadas cuestiones filosóficas: indicará que, después de todo, los primeros principios que Peano maneja los ha obtenido, como los demás, «evidentemente analizando los modos de inferencia que en el curso de la historia han venido a ser reconocidos como válidos y señalando que los principios son intuitivamente evidentes y necesarios para la ciencia» *(1908 a,* 187). Frente a un nuevo axioma su uso se justifica por su *autoevidencia,* que no es lo mismo que su demostrabilidad. Pero la autoevidencia es, claramente, un criterio subjetivo. De aquí que Zermelo propone otro con carácter de objetividad: «si el principio es *necesario para la ciencia*» *(íd.)* e independiente de los axiomas ya admitidos. Es, precisamente, el criterio adoptado por Poincaré en cuanto al principio de inducción completa como 'necesario para la Aritmética'. Punto de vista de Poincaré que reconocerá Zermelo de modo explícito tras indicar: «Actualmente, los principios deben ser juzgados desde el punto de vista de la ciencia, y no la ciencia desde el punto de vista de principios fijados de una vez para siempre. La Geometría existía antes de los *Elementos* de Euclides, como la Aritmética y la teoría de conjuntos antes del *Formulario* de Peano, y las dos sobrevivirán a todos los intentos de sistematizarlos en tales formas escolares» *(íd.,* 189).

La crítica de Poincaré se centra, esencialmente, en el acentuado pragmatismo zermeliano que, si bien ha puesto cotas para impedir las antinomias existentes, no asegura que otras puedan aparecer en dicho coto, donde admite, además, las definiciones impredicativas. Al no haber demostrado la consistencia, sólo cabe admitir los axiomas como proposiciones evidentes en sí, reflejo de propiedades que se atribuyen a unas nociones determinadas; en este caso, los criterios de aceptar unos u otros carecen de objetividad alguna. En otras palabras, lo que Poincaré viene a sostener es la esencial dificultad que supone la elección de unos, de otros principios como axiomas, dificultad que carece para superarla de criterio objetivo alguno, salvo en el formalismo inscripcionista, en cuyo caso hay que demostrar la consistencia.

Es dificultad reconocida desde el terreno constructivista. Así, Mostowski mantendrá: «Es una de las tareas más difíciles para un matemático decidir si acepta o rechaza un nuevo axioma. Si los conjuntos fueran objetos reales existentes en el mundo en el mismo sentido que los cuerpos físicos podríamos acudir a la decisión de experimentos de alguna clase. Como nada soporta esta suposición platónica, nos encontramos sin ningún criterio de verdad si no consideramos como tal el criterio formal de consistencia y nuestra muy imprecisa 'intuición matemática'» *(1966,* 83). Por ello, para Poincaré, es aceptable la posición de Zermelo como solución pragmática, pero no en cuanto a real fundamentación del hacer matemático. Los postulados, el sistema axiomático, aceptables desde un enfoque pragmático, no lo son en cuanto a explicación final, como no lo es el argumento esgrimido por Borel, por Peano, para rechazar las pruebas de consistencia, apoyándose en el 'tribunal' de los matemáticos, argumentos esgrimidos posteriormente por Bourbaki. Las palabras de Peano: «Porque no creamos a voluntad los postulados, sino que tomamos como postulados las proposiciones más simples, escritas de forma explícita o implícita, en cada tratado de aritmética o geometría. El sistema de los postulados de la aritmética y de la geometría está satisfecho por las ideas que todos los autores en el dominio de la aritmética y de la geometría tienen sobre el número y sobre el punto. Pensamos el número, luego el número existe» *(1906,* 142-3).

2. *Necesidad formalizadora.* Los postulados en el sentido logicista y conjuntista requieren la existencia previa de aquello de lo cual puedan organizar y ser las primeras proposiciones. Poincaré aceptaba este punto de vista dado que lo primario era, para él, la virtud creadora que podría plasmarse, en búsqueda de objetividad, en el sistema formal y, con ello, requerir la búsqueda paralela de las convenciones que dieran paso a dicho sistema formal. Insisto: previa existencia de una materia que puede ser formalizada. Si Poincaré reconocía el mérito de Hilbert y el interés de su formalismo geométrico al igual que la conveniencia de las definiciones implícitas como caracterizadoras de estructuras

formales, tal interés se le mostraba secundario, como instrumento de perfeccionamiento y objetivación, esencialmente. Reconocía, además, en este proceso formalizador una serie de limitaciones, entre las cuales se encontraba la imposibilidad de reflejar en el sistema formal la auténtica realidad que formaliza, así como ocultar la marcha del pensamiento y la importancia relativa que pueden tener entre sí unas u otras proposiciones, unas u otras propiedades.

Ciertamente no puede haber formalización de algo que previamente no preexista como no formalizado. Sin embargo, ante el mecanismo formalizador cabe plantear dos cuestiones: En primer lugar por qué tener que formalizar una determinada teoría si la misma se encuentra ya establecida firmemente; en segundo lugar, admitida tal necesidad, la formalización ha de ser realizada de manera que refleje fielmente aquello que formaliza.

La necesidad para Poincaré ciertamente no es demasiado imperiosa. Hay una mera conveniencia porque, con ella, con el proceso que encierra, se va ganando por una parte, un rigor que, de otra forma, no es posible; por otra, se logran poner de relieve los postulados implícitos que se hacen en el razonamiento intuitivo. De ahí sus consideraciones de dividir una proposición intuitiva en dos: la experimental y la propiamente matemática. Pero también sus constantes referencias a no perder el origen intuitivo y genético de las divisiones. Por otra parte, los factores para establecer dicha necesidad no le parecen, tampoco, formalizables. Y en ello acierta. En este sentido, la obra de Russell y Whitehead constituye una obra de primerísima importancia como construcción de un posible sistema axiomático. No puede olvidarse que, como objetivos, ambos autores se proponen, «por un lado, tenemos que analizar las matemáticas existentes, con objeto de descubrir qué premisas se utilizan, si esas premisas son mutuamente consistentes, y si pueden reducirse a premisas más fundamentales» (*PM.*, Prefacio, IV), objetivo análogo al realizado por Hilbert en *Los fundamentos de la geometría;* por otro, elegidas las premisas, observar qué proposiciones interesantes se pueden obtener de ellas.

Suponen ambos objetivos, circunscribirse a un campo concreto, aunque dicho campo pretenda abarcar toda la matemática existente en un momento histórico determinado. Intento nunca realizado ni por tanto logrado [90]. Autolimitándose nuevamente a

[90] Salvo por el grupo N. Bourbaki que, sin embargo, no ha podido coronar con éxito, hasta ahora, su deseo unificador expositivo del total

reducir la Aritmética a la Lógica, como en Frege, hay que admitir la existencia de campos como la Topología, que no nacen de la Aritmética y, con ello, carecen ya del enlace unitario. Aunque quepa realizar su construcción de manera deductiva, lo cual no es decir nada nuevo. «No es aplicable un procedimiento análogo [a la reducción aritmética] a las disciplinas que no han nacido de la Aritmética: los términos primitivos de las distintas ramas del álgebra abstracta no tienen 'significaciones habituales' determinadas», tendrá que reconocer Hempel *(1945 b, 21)*, admitiendo que el procedimiento a realizar es el utilizado por Peano para la Aritmética, es decir, el método axiomático. Con ello, lo único que se realizaría sería el programa hilbertiano y que culminaría en el intento bourbakista —que para identificarse más aún con el modelo euclídeo titulan su intento, un tanto irónicamente, *Elementos de Matemática*— y no el logicista. Y, además, colocaría a tal método como el definitivo, el logrado de una vez para siempre, olvidando el curso histórico y olvidando, una vez más, que el sistema axiomático es algo subsidiario a la previa existencia de una matemática material. Como von Mises alega frente al sistema axiomático, éste «no es más que una forma de descripción, por tanto, algo que no puede tomarse en consideración sino una vez conocido el contenido esencial de lo que hay que describir» *(1939, 121)*; en otras palabras, la axiomatización es siempre una actividad secundaria, que sigue al descubrimiento efectivo de las relaciones pertinentes y las pone en una forma precisa.

Por otra parte, supone una intencionalidad tal objetivo tanto en dicha limitación como en lo que se busca en la misma. Y esta intencionalidad no es formalizable, como sostenía Poincaré. Pero es la que da la 'profunda inteligibilidad' de la matemática en términos de Bourbaki. Así, en el interior de un sistema formal, las distintas expresiones o proposiciones que lo constituyen son todas equivalentes entre sí. Considerar a unas como postulados y a otras como teoremas derivados de las mismas no es algo inherente al sistema, sino a quien lo construye. El criterio de Russell de adoptar como postulados los que posean mayor alcance deductivo supone una intencionalidad extrínseca al sistema. Para quien lo maneja «se puede considerar que algunos [teoremas]

---

hacer matemático desde los entornos de 1940, a pesar de las sucesivas refundiciones de sus fascículos que muestran, en el fondo, la vitalidad del trabajo matemático y, a la vez, el carácter utópico de la unificación de una vez para siempre.

son más 'interesantes', más 'ricos', más 'fuertes' que otros, pero los criterios que permiten distinguirlos no son nociones que hagan parte del sistema» (Grize-Matalon, *1962,* 42).

Adecuación Sistema formal-Sistema material

Si la necesidad axiomatizadora no se deriva más que de un intento de alcanzar el rigor determinado, así como de salvar según Zermelo la posible aparición de unas contradicciones [91], la clave de la formalización se centraría en la adecuación del sistema formal con aquello que formaliza. En este punto cabe mencionar las palabras de Bourbaki: «Los matemáticos parecen estar de acuerdo para concluir también que no hay más que una concordancia superficial entre nuestras concepciones 'intuitivas' de la noción de conjunto o de natural, y los formalismos que se supone dan cuenta de ellas; el desacuerdo comienza cuando se hace problema elegir entre unas y otras» *(1969,* 61 *n)*. Desacuerdo que, según los lógicos, no es problema ni de lógica ni de matemática.

Que no exista adecuación plena entre un sistema formal S y aquello que formaliza M no puede considerarse un defecto de la formalización en contra de lo que diría Poincaré. Y ello porque si la adecuación fuera perfecta, se encontraría ya realizada en M, no siendo S más que un modelo isomorfo a M. Sin embargo, no estimo consecuencia legítima que los alcances de la inadecuación no constituyan problema lógico o matemático. Sí cabe afirmar que es problema que, a su vez, exigiría un cierto número de precisiones para alcanzar su pleno sentido. Precisiones que, por supuesto, han de pertenecer a la semántica y no a la sintaxis de S. Como Roger Martin señala acertadamente, entre S y M no existe un isomorfismo sino lo que podría calificarse de correspondencia estructural. Desde un plano lógico el propio Martin indica que hay razones para admitir la existencia de dicha correspondencia. Razones que cabe resumir en la comprobación de que un cierto número de proposiciones de S se pueden traducir en proposiciones calificables de verdaderas en M, y recíprocamente. Sin embargo, el propio Martin señala que el lógico adopta sistemas formales no naturales por dos razones: «1.º El lógico considera que

[91] Ver, por ejemplo, Grize: «La formalización no sería más que el conjunto de procesos que permiten al espíritu garantizarse de la contradicción» *(1962,* 106).

la cuestión de la adecuación no le concierne directamente. En lo cual adopta la misma actitud que el matemático en su dominio. (...) 2.º Atribuye por el contrario una gran importancia al hecho de que un sistema permita calcular fácilmente» *(1962,* 138). Criterios que no son de carácter formal, sino pragmático y semiestético: cálculo fácil y sistema elegante. Criterios adoptados tras los teoremas limitativos de Gödel y sus generalizaciones, que conllevan la imposibilidad de formalizar una teoría previamente existente, es decir, aplicar el conjunto de proposiciones de un sistema formal bastante potente sobre el conjunto de proposiciones admitidas como verdaderas de la teoría que dicho sistema formaliza.

Ello supone, ciertamente, una limitación de los formalismos, intrínseca a los mismos. Desde un aspecto intuitivo, como el querido por Poincaré, la limitación era consecuente. Al delimitar en una proposición lo que de experimental hubiera en ella de su aspecto estrictamente matemático, éste no puede abarcar todo el halo que en su versión primera tenía. Los contornos establecidos al realizar la disección se hacen nítidos, enteramente rigurosos, pero se pierde la riqueza de matices y de analogías que poseía en su primera versión. Naturalmente, tal pérdida lo es en función no de sí, sino de su posterior formalización delimitadora. Volver a realizar la correspondencia estructural entre aquella materia en la que se ha obtenido el rigor matemático no es, para Poincaré, un problema matemático sino experimental. En ello se mostrarían de acuerdo sus ideas con la de los lógicos. Pero no por eso el filósofo debe abandonar dicho problema, ya que con palabras de Von Mises: «explorar cómo funciona la correspondencia es un problema grande» *(1939,* 132), con matiz marcadamente epistemológico genético en el enfoque de Poincaré. En lo que se puede disentir del matemático francés es, no ya en su intuición sintética acertada, sino en el hecho de que la misma fuera resuelta desde el interior del sistema formal, por métodos pretendidamente formales.

Gödel, tras sus trabajos de creación matemática, en el interior de los sistemas formales, llegará a resultados paralelos a los de Poincaré en cuanto a la inadecuación de las definiciones axiomáticas respecto a las ideas intuitivas que se axiomatizan. Gödel lo hace en torno al concepto, particular, de 'conjunto', aunque su ontología le obligue a no aceptar los criterios constructivos del matemático francés. Así reconocerá que «la operación 'conjunto de los x' (donde la variable 'x' recorre algún tipo dado de objetos) no puede ser definida satisfactoriamente (al menos en el estado actual de conocimientos) sino únicamente puede ser parafraseada con expresiones que envuelven a su vez el concepto de conjunto, tales como 'multitud de las x', 'combinación de cualquier número de los x', 'parte de la totalidad de los x', donde una 'multitud' ('combinación', 'parte') es concebida como algo que existe en sí sin que tenga que ser definida en un número finito de palabras» *(1964*, 262). A pesar de lo cual Gödel admite, no hay otra solución, que el trabajo sobre la manera intuitiva y no crítica de aceptar el conjunto se ha mostrado hasta ahora como autoconsistente.

En el fondo, la conclusión que puede obtenerse es la de una imposibilidad de asimilar totalmente lo que cabría calificar de conocimiento racional y conocimiento formal, una de las tesis mantenidas por Poincaré.

Si se ha partido del hecho de formalizar un cierto sistema material previamente dado, cabría invertir el punto de partida y tomar un sistema formal como principio, para después obtener una realización o modelo del mismo. Constituiría el enfoque formalista puro, el calificable como el hacer la abstracción por la abstracción. Este enfoque presenta, a su vez, limitaciones tan agudas como las anteriores, como señalara Brouwer. Al matemático holandés, un método como la formalización de algo material ya dado no ofrece duda alguna, aunque considera las axiomatizaciones como edificios verbales que no van acompañados por sistema matemático alguno; en otras palabras, que han de ser independientes de cualquier interpretación intuitiva. Si desde un punto de vista formalista tales sistemas han de mostrarse como consistentes, Brouwer criticará que el criterio es, a su vez, no consistente, ya que para probar la consistencia e independencia los formalistas hacen uso de modelos, es decir, de la matemática intuitiva. Es el argumento que Poincaré empleara contra Hilbert. Pero su crítica central se dirige a la inversión señalada: «Supongamos que hemos probado de una u otra forma, sin llamada a interpretaciones matemáticas, que el sistema lógico construido a partir de ciertos axiomas verbales es consistente, es decir, que en ningún momento del desarrollo del sistema se obtengan dos teoremas contradictorios; si hallamos después una interpretación matemática para los axiomas (lo cual consiste naturalmente en pedir la construcción de una estructura matemática con elementos que satisfacen ciertas relaciones matemáticas dadas), entonces, ¿se sigue de la consistencia del sistema lógico que tal estructura matemática *existe*?» [92]. La pregunta de Brouwer fue contestada con la negativa por Tarski: es posible exhibir sistemas axiomáticos consistentes que, para interpretaciones 'naturales' de las constantes lógicas que intervienen en el sistema no quedan satisfechas por sistema matemático intuitivamente construible alguno.

La consecuencia, como en el caso directo, es clara: no puede separarse el hacer matemático estrictamente formal de su fundamentación intuitiva, aunque tal hacer formal, manifestado en la objetivación del sistema formal axiomático, suponga un adelanto en el rigor, en la supresión de posibles contradicciones, a pesar de su esencial inadecuación.

3. *La consistencia.* Desde el enfoque formal, y a pesar de las críticas por círculo vicioso lanzadas por Brouwer, el punto quizá central lo constituya la exigencia, mantenida por Poincaré, de que los postulados que definen un sistema formal sean consistentes. La exigencia retomada por Poincaré no era, realmente, nueva dado que se había ligado de manera ya clásica al problema de existencia. Como el mismo matemático francés reconoce, raro es el matemático que tras un teorema o una propiedad, no lo hace seguir de una prueba de existencia, cuyo objetivo central es garantizar la introducción de un nuevo elemento mostrando que el mismo no conduce a contradicción. Pero si en el hacer matemático intuitivo bastaría la mostración de algún objeto que cumple la propiedad demostrada, desde un aspecto formal no intuitivo la demostración de no contradicción no cabe apoyarla en tal modelo: la exigencia de Poincaré mantendrá que únicamente la demostración de la no contradicción asegurará la existencia de lo definido. Para ello insistirá reiteradamente en la 'posibilidad' de una operación, de un término, indicando siempre que el término 'posible' en matemática sólo tiene un sentido: ser no contradictorio. Exigencias para cada término, para cada operación, también para el sistema de postulados enfocado como definición implícita. Y ello desde 1891 en que lo indica por vez primera para los postulados de la geometría. En el Congreso de Matemáticos de 1900 de París, Hilbert recogerá la exigencia de Poincaré planteando como problema número 2 la necesidad de la demostración de la consistencia de los axiomas aritméticos, indicando con ello de los axio-

[92] Palabras de la tesis doctoral de Brouwer, *1907,* tomadas de Beth, *1965,* 70-1.

mas que caracterizan los números reales y no por modo exclusivo los axiomas de la Aritmética de Peano. Hilbert convertirá en punto central de su teoría de la demostración este problema de consistencia.

Para el axiomatismo material la problemática no se había llegado a plantear con toda claridad, dado que se apoyaba en la previa existencia de lo que axiomatizaba. Incluso Hilbert en *Fundamentos de la Geometría,* a pesar de su enfoque ya radicalmente formalista inscripcionista, mantenía los términos geométricos que servían de apoyatura a la imaginación. Sin embargo, en los terrenos aritméticos, aceptando el formalismo, el problema de la consistencia cobraría todo su valor tras la aparición de las paradojas como la de Burali-Forti.

En este punto debo hacer la distinción clara que se encuentra en Poincaré: la demostración de la consistencia se exige para las distintas ramas que se pueden elaborar en la Matemática, como la Geometría, pero no para la Aritmética. Esta diferencia se apoya en lo que para Poincaré es un dato primario: la intuición sintética del número natural y su construcción para mostrar su posibilidad. Junto a este dato, y precisamente a partir del mismo, el matemático construye combinaciones de signos, cuyas posibilidades se muestran ilimitadas. La experiencia guía las construcciones, pero es el matemático el creador de ellas. Por estas condiciones, aunque guiado por la experiencia, el matemático ha de adoptar algún criterio que permita matizar o amortiguar lo que Poincaré calificaría de libertinaje; y el criterio es que las construcciones no sean contradictorias, a la vez que se mantenga la posibilidad de un correlato o de una interpretación que rinda útiles dichas construcciones.

Si se aceptara la previa existencia de unos objetos de los cuales las expresiones matemáticas no fueran más que las expresiones de sus relaciones, entonces ciertamente la condición de consistencia sería secundaria, que es lo señalado por el logicismo, y por el mismo Poincaré para lo que es directamente construible, el número natural. Para los demás casos, Poincaré parte de la convicción de que tal existencia se atribuye a los objetos matemáticos meramente por la constante habituación, por el continuado manejo que el matemático hace de tales signos, manejo que le lleva a reificarlos dándoles una especie de existencia concreta [93]. El punto de

[93] Cartan: «Por nuestra parte, pensamos que las teorías matemáticas que tienen una 'realidad' son muy simplemente aquellas de las que se

partida, no matemático, es radicalmente opuesto tanto a los logicistas como a los formalistas inscripcionistas, aunque no al que adoptará Hilbert. Hay que observar que, para Poincaré, el dato previo viene dado por el número natural y los signos concretos —que pueden ser acciones fisiológicas incluso— como elemento del cual servirse y apoyarse, datos concretos para poder utilizar la intuición. A partir de estos datos es desde los cuales puede proseguirse la construcción matemática.

Russell niega las exigencias de Poincaré. De modo análogo su portavoz francés Couturat que, en réplica a Poincaré, señalará *(1906 a,* 232-4) la no necesidad de las pruebas de consistencia. Respecto al número natural, porque existe una definición del mismo, dada por Russell, diferente a la dada por Peano —argumento nada convincente, porque una definición no implica la existencia de lo definido—. Pero, fundamentalmente, porque hay dos razones que hacen ilícitas las exigencias de Poincaré: En primer lugar, y hablando estrictamente, tal prueba es imposible, ya que sólo puede constatarse la ausencia de contradicción; lo mejor es esperar y ver si en el desarrollo se produce o no la aparición de una contradicción. En segundo lugar, porque la consistencia nada dice acerca de la existencia matemática. La contradicción prueba la no existencia, la no contradicción no demuestra la existencia. En este punto coincide con Padoa y con el mismo Peano, quien consideraba superfluo dichas pruebas. Igualmente Hadamard, frente a matemáticos como Baire y Lebesgue señalará: «No me gustaría situarme en forma alguna, como lo hace [Baire], a la manera de Hilbert sobre el terreno de lo *no contradictorio,* que me parece al menos proceder de la psicología, y hacer entrar las propiedades de nuestros cerebros. No comprendo incluso cómo Zermelo puede haber *demostrado* que *no percibimos* contradicción, etc. Ello no se demuestra, se constata: se ha percibido o no se ha percibido» [94].

Desde una orientación intuicionista, el problema de la consistencia no existe. Y ello en función de que sólo la existencia de una coordinación con ciertos grupos de hechos o fenómenos justifica el

---

tiene ampliamente la *costumbre* de manipular, y que este carácter de 'realidad' es puramente subjetivo» *(1943,* 4).

[94] Hadamard, *1905,* 156. Las palabras de Baire eran: «Zermelo dice: 'Concebimos que a todo conjunto parcial de M corresponde uno de sus elementos.' Es ello una concepción que no tiene nada de contradictorio, de acuerdo. También, todo lo que demuestra para mí, es que no percibimos contradicción al concebir que, en todo conjunto que se nos definirá, los elementos tengan entre ellos relaciones de posición...» (p. 152).

sistema formal, en lo cual se encuentran de acuerdo con los empiristas [95]. Además, como indicara Brouwer, la demostración de no contradicción tendrá que apoyarse en el tercero excluido y viene a ser equivalente a la proposición mantenida por Hilbert de que todo problema es resoluble; ambos puntos son cuestionables para el intuicionista. La consistencia, como problema interno, será un criterio necesario para la posible aplicabilidad de un sistema formal, pero en realidad no constituye nada positivo, sino que es un criterio eminentemente negativo.

Igualmente, para un formalista inscripcionista radical, la consistencia tampoco es problema, lo cual había señalado Poincaré. Extremando su posición, Bourbaki exclama: «En pura teoría formalista, la palabra 'existe' en un texto formalizado no tiene más 'significación' que las otras, y no hay que considerar otro tipo de 'existencia' en las demostraciones formalizadas» *(1969, 57 n)*. Pero ello no es objeción esencial, dado que de las marcas en el papel tampoco puede hablarse de contradicción o no. Desde un plano sintáctico, la consistencia no es problema; lo es desde el plano semántico del sistema construido o a construir. Que deben aceptarse los sistemas formales en el momento actual sin tener una demostración de su consistencia interna se deriva de los teoremas de limitación de los formalismos, entre los cuales el segundo de Gödel establece que si un sistema formal es consistente, la demostración interna de su consistencia no puede hacerse, mientras que Tarski demostraba que ningún sistema formal puede pretender formalizar todos los predicados necesarios para su construcción... Naturalmente, ello es válido desde una posición más restrictiva, impuesta por Hilbert. Emplear para la demostración métodos estrictamente finitos y no transfinitos. Utilizando estos últimos métodos cabe realizar pruebas de consistencia, aunque siempre relativas en el sentido de no ser internas.

Los métodos de su demostración

Inciden, aquí, los métodos que Poincaré prescribiera como únicos para las demostraciones de consistencia. Respecto al primero, la formulación dada por Poincaré no es, realmente, muy clara.

[95] Así un positivista como von Mises, *1939*, indicará que la consistencia no es cuestión que resuelva el problema de por qué son útiles los sistemas formales ni, a la vez, constituye un criterio de coordinación del sistema formal con el mundo empírico.

Será Pieri quien perfeccione la formulación del método indirecto en términos correctos: «Si A, B, C..., son proposiciones que pertenecen a un mismo sistema deductivo F (no importa cuál), se podrá decir que se ha demostrado su compatibilidad, si en algún dominio D de conocimientos racionales (comprendiendo los conceptos y axiomas fundamentales de la Lógica, sobre los cuales reposa toda deducción) se puede encontrar una *interpretación* de las ideas primitivas de F, que manifieste *todas* las propiedades enunciadas por las proposiciones A, B, C...; siempre que un tal dominio D no comprenda ninguna de estas proposiciones entre sus premisas o fundamentos deductivos, y que la consistencia de sus principios esté *ya establecida* o *admitida a priori* (*1906*, 197). Ahora bien, este método indirecto de demostrar la consistencia o método por el ejemplo o modelo, exige el empleo de la inducción completa, lo cual no vio el mismo Poincaré. Y ello porque si S es el sistema formal y M un modelo del mismo, entonces habrá que establecer una correspondencia entre ambos (S; o,*) y (M; .,£) de tal forma que f: S —> M con

$$f(0)=e$$
$$f(n)=x \Longrightarrow f(n')=x^{*}$$

Y para demostrar que esta aplicación 'f' es correspondencia estructural hay que emplear la inducción. Si tanto S como M están formalizados, es claro que la aplicación 'f' no pertenece al lenguaje objeto, a la sintaxis del sistema, sino a su semántica. De donde aunque se emplee para la demostración de consistencia el método directo, éste se apoya, en última instancia, en el método de inducción completa.

Considerado como tercer método, el de inducción completa se muestra, al enfocarlo como propio y no como auxiliar, para el indirecto, algo confuso en la formulación de Poincaré. Para él el método constituye una de las múltiples aplicaciones que pueden realizarse del principio de inducción completa. Claramente una de ellas consiste en la inducción que cabe calificar de *inducción deductiva* en el sentido de que si tomamos todas las consecuencias que se pueden obtener de unas premisas y queremos demostrar que todas poseen una determinada propiedad, la demostración puede realizarse por inducción: a) Demostrar que las premisas poseen la propiedad; b) Demostrar que si las premisas de una regla también tienen esa propiedad, entonces también las tiene la conclusión; c) Se concluye que la propiedad la verifican todas las proposiciones.

Poincaré se limita a afirmar que si la propiedad 'f' la verifican las premisas de partida y que, comprobado que la verifica la proposición 'n' se comprueba que la 'n+1' también la cumple, entonces puede concluirse que todas las proposiciones que se obtengan, además de las obtenidas, también poseerán dicha propiedad. Naturalmente, este enunciado está suponiendo la formulación, más correcta, de la inducción deductiva antes enunciada. Y ello porque en la correspondencia observada por Poincaré entre los números naturales y la sucesión de proposiciones obtenidas —proposiciones que se van colocando una tras otra y no en el sentido material pensado por Couturat, sino en el orden temporal de obtención de las mismas a partir de unas premisas dadas y conforme a unas reglas de derivación dadas— quien hace pasar la propiedad requerida de una proposición a otra es, precisamente, la regla de derivación. Esta correspondencia entraña una suposición implícita, como pondría de manifiesto Pieri *(1906,* 199): suponer que las proposiciones obtenidas de unas determinadas precisas sean numerables; naturalmente es suposición aceptable para Poincaré, aunque no dé razones para ello.

Junto a esta suposición se encuentra que en la demostración de consistencia por inducción completa, aquí por inducción deductiva, la propiedad 'f' que se transmite es, para Poincaré, la de contradicción; es decir, si se demuestra que las premisas están exentas de contradicción y si se demuestra que si la proposición 'n' no es contradictoria entonces la 'n+1' tampoco lo es, se estará seguro de no encontrar más contradicción en el sistema. Ateniéndose a la formulación dada de inducción deductiva ello equivaldría a asegurar que si se comprueba que las premisas están exentas de contradicción y que las premisas de las reglas de derivación también se encuentran exentas de contradicción entonces las distintas conclusiones que se obtengan también carecerán de contradicción. La formulación, así, es correcta. Pero hay una dificultad intrínseca en este método. Y es la comprobación de que las premisas del sistema deductivo sean consistentes. Precisamente lo que se pretende demostrar es esa consistencia, que en el método de inducción completa constituye la fase primera. De aquí que el método de inducción completa no sirva para dar esa demostración, sino que se articula a partir de la misma, en contra de lo sostenido por Poincaré. Unicamente admitido que dichas premisas sean consistentes se podrá asegurar la no aparición de contradicciones —no sólo de manera explícita, es decir, entre las proposiciones ya obtenidas, sino también implícita, entre las proposiciones posibles de obtener— mediante el empleo de la inducción completa. Pero la admisión de la consistencia de las premisas mencionada ha de realizarse por un acto de intuición. Y el mismo puede conducir a error. La consistencia de todo el sistema queda, pues, en el aire, siendo impotente el método de inducción deductiva para demostrarla [96]. Con lo cual el único método factible para realizar la misma es el directo, inaplicable salvo cuando el número de proposiciones obtenidas sea finito. En otras palabras, Poincaré tenía razón al sostener que el procedimiento de demostración de consistencia debería apoyarse en la inducción completa, aunque el apoyo se centre, precisamente, en el método del modelo —lo que no vio el matemático francés— y no en el método de inducción completa, contra lo que él pensaba.

4. *La Aritmética, no formalizable.* Centrándose en el problema de la Aritmética, se observó que, para Poincaré, ésta no puede venir caracterizada por medio de un sistema deductivo al tipo de los axiomas de Peano, por dos razones: una, y básica, porque esa definición implícita exige el previo conocimiento del número natural, indefinible, y la formalización de la inducción completa como principio o proposición, imposible; la segunda, porque, aun admitiendo que la definición no fuera circular y que, además, caracterizara de modo unívoco a la Aritmética material por perfectamente adecuada, el sistema de axiomas, como definición implícita, debería ser consistente. La consistencia del mismo es indemostrable salvo petición de principio y si se mantiene como definición es porque la misma no es definición formal, sino que exige la previa existencia y conocimiento de lo que define. No por ello rechaza Poincaré la legitimidad del método de definición implícita, pero dicha legitimidad viene asegurada únicamente en terrenos posteriores al aritmético, como el geométrico, por ejemplo.

Que el sistema de axiomas de Peano no sea definición implícita de los números naturales es tesis que puede aceptarse plenamente. Y ello porque el sistema no caracteriza de modo unívoco y sin ambigüedad alguna al sistema de los naturales. Es método aceptable en Geometría, donde los postulados caracterizan de modo

[96] Comparar con interpretación opuesta *Mooij, 1966,* 82-4.

unívoco a un conjunto de objetos. Si se pretende superar esta ambigüedad agregando que los distintos sistemas de objetos caracterizados por los postulados de Peano son isomorfos entre sí, entonces ha de hacerse uso de la inducción completa para demostrar tal isomorfismo y, además, la condición requerida clásicamente a una definición de caracterización unívoca, permanece inexistente. En este punto, el logicismo se encontraba de acuerdo con Poincaré y de ahí sus intentos de dar una definición rigurosa del número natural, imposible de obtener por medio de la formalización. Los axiomas de Peano, como señalaría Hempel, «no 'determinan implícitamente' la significación corriente del concepto 2 ni de los demás conceptos aritméticos. Y el matemático no puede asimilar esta definición diciéndose que él no se ocupa en la significación habitual de los conceptos matemáticos» *(1945 b,* 15), a lo cual agrega que, en el momento en que tal matemático trabaja pragmáticamente, diciendo por ejemplo que todo número real positivo tiene dos raíces cuadradas reales, dicho matemático está manejando el concepto 2 con un sentido no caracterizado por dichos axiomas, a menos que suponga algo más de lo estipulado en el sistema de Peano.

El mismo Peano había observado ya la ambigüedad de su sistema. Ambigüedad que se ha difundido por los ejemplos dados por Russell [97]. Si los conceptos indefinibles que intervienen en el sistema de Peano son 'cero', 'número natural' y 'sucesor', una de las interpretaciones o modelos del sistema peaniano lo constituye, ciertamente, la sucesión 0, 1, 2...; pero la sucesión que adopte como cero 100 y sucesor cualquier número natural sucesor suyo, es decir, una sucesión como 100, 101, 102..., también satisface el sistema. Como lo satisfacen las sucesiones 2, 4, 6... y 1, 1/2, 1/4, 1/8... Es decir, el sistema caracteriza cualquier sucesión y no la requerida de los naturales. Todas ellas son biyectivas entre sí, por lo que se ha sostenido el carácter categórico o monomorfo del sistema de Peano, lo que no ocurre cuando se adopta, por ejemplo, como sistema de postulados el que define implícitamente la estructura de grupo, en la cual los distintos modelos no son isomorfos entre sí. Ya este hecho podía indicar que, salvo un isomorfismo, los naturales podrían quedar bien definidos formalmente si se tiene en cuenta la esencial inadecuación de un sistema formal respecto a aquello que formaliza. Sin embargo, desde un enfoque

---

[97] Russell, *1919,* cap. I.

axiomático formal el teorema de Skolem de 1934 demostraba la existencia explícita de modelos no canónicos para la Aritmética. En otras palabras, demostraba la existencia de modelos o interpretaciones no isomorfas estructuralmente con los distintos modelos de la aritmética intuitiva. Una vez más, la aparente contradicción entre la supuesta categoricidad de los postulados de Peano y la existencia de los modelos no estandard, o *modelos de Skolem,* se centra en el principio de inducción completa.

Es principio que aseguraría su validez para *todas* las funciones proposicionales de un argumento, escribiéndose

$$\forall f((f(0) \wedge \forall n(f(n) \Longrightarrow f(n+1)) \Longrightarrow \forall n f(n))$$

pero entonces el principio cae bajo la posibilidad de hacer surgir las mismas paradojas que en la teoría de conjuntos, da paso a hablar del conjunto o clase de todas las propiedades, concepto que se mostró antinómico [98]. De aquí la necesidad de imponer restricciones que impidan la aparición de paradojas y en lugar de hablar de *todas* las progresiones se reemplaza el esquema por una infinidad de axiomas tales que cada uno de ellos se refiera a una determinada progresión. Pero cabe observar que si se expresa en el cálculo de predicados de primer orden, admitiendo una formalización en la cual desaparezca el cuantificador universal que afecta al predicado, entonces resulta que en dicho cálculo se pueden formar un número cardinal χ_0 de expresiones, pero como el principio es un esquema caracterizará a 2^{χ_0} de las mismas. Dicho principio no queda, por ello, suficientemente caracterizado en el cálculo de predicados de primer orden en el que se formulen los axiomas de Peano.

La consecuencia es la confirmación de la clara concepción de Poincaré: ninguna lista, finita o infinita, de axiomas imaginable es capaz de describir de modo completo la sucesión de los naturales; en otras palabras, que no hay «una caracterización *axiomática formal* de la sucesión de los números naturales en *cálculo de predicados de primer orden*», como asegurará Kleene *(1967,* 335). Y si se mantiene la formalización en el cálculo de predicados de segundo orden, con las restricciones adecuadas para evitar la aparición de las antinomias, entonces se tiene la paradoja de

[98] Menne, *1966,* 129-30; da un esquema breve, pero muy elegante, de cómo se llega a las antinomias de Russell.

Löwenheim-Skolem que asegura la imposibilidad de construir un sistema formal que caracterice unívocamente los conceptos que formaliza, en el sentido de que si dicho sistema formal es consistente entonces existirá un modelo numerable del mismo, es decir, que formalizada la aritmética en un sistema de segundo orden y admitida su consistencia en un modelo transfinito, entonces ha de tener un modelo numerable. Que no exista entonces una caracterización estrictamente formal, sino que la misma necesita incorporar elementos de contenido, materiales, vendrá expresado por Skolem, en términos cercanos a los pronunciados por Poincaré: «la sucesión de los números quedará completamente caracterizada por los axiomas de Peano, si se considera la noción de 'conjunto' o de 'función proposicional' como dada de antemano con un sentido independiente de todos los principios o axiomas que lo engendran. Pero si se quiere que la axiomática sea fiel a su propio espíritu, se deben axiomatizar también los razonamientos sobre los conjuntos o las funciones proposicionales. Ahora bien, en este último caso (...) toda caracterización unívoca o completa de la sucesión de los números es imposible» [99]. Es la misma consecuencia que obtuviera Carnap cuando afirmaba: «No existe ni un lenguaje en el cual todos los términos aritméticos puedan ser definidos ni uno en el cual todas las frases aritméticas puedan ser decidibles. En otras palabras, *todas las matemáticas pueden ser formalizadas,* pero las matemáticas *no pueden ser agotadas por un sistema;* requieren una serie infinita de lenguajes cada vez más ricos» [100].

Papel del principio de inducción completa

Realmente la escasa ductilidad del sistema formal que intente formalizar la aritmética puede provocar sorpresa. Cualquier sistema axiomático permite tomar como premisas cualesquiera de sus proposiciones, siempre que las mismas sean independientes entre sí. En este hecho se apoyaba Russell al señalar que la elección de los postulados debería hacerse en función de su potencia

---

[99] Skolem, *1934:* «Über die nicht-charakterisierbarbekeit der Zahlenreiche...» *Fundamenta mathematicae,* XXIII, 150-161. Tomado de Kleene, *1967,* 334. En Kneale, *1961,* 440.

[100] *The logical syntax of language,* 1964, 222. Tomado de Combès, *1971,* 78.

demostrativa, pero que, en el fondo, dichos postulados no se diferenciarían en nada respecto a las restantes proposiciones del sistema, salvo en su colocación. Es lo que admite el formalismo axiomatizador, interpretando las premisas como proposiciones igual que las restantes, o lo que se afirma al construir un sistema formal. Sin embargo, ya los tradicionales habían elevado sus protestas en el sentido de que principios como el de tercero excluido, el de identidad o el de no contradicción aparecieran no como principios fundamentales, sino como meramente derivados. Protesta efectuada no sólo por filósofos profesionales sino por matemáticos de orientación pragmática, como Rey Pastor *(1951*, 34-5). Si en Geometría pueden utilizarse unos sistemas de axiomas con un número determinado de postulados y conceptos primitivos que pueden variar de autor a autor —comparar los sistemas de Pasch, Padoa, Hilbert—, todos ellos caracterizan un sistema único. Análogo para los cálculos proposicionales. Y, sin embargo, ello no ocurre en Aritmética. Lo que hace exclamar a G. Frey, por ejemplo: «Hay diversas Geometrías, pero sólo hay *una* Aritmética, sólo hay *una* serie de los números naturales» *(1972*, 168). Y Papert, reconociendo justa la idea de Poincaré de la necesidad de la inducción completa, además de su idea de la irreducibilidad de la Aritmética a la lógica frente a los intentos reduccionistas de Russell, llega a señalar: «Notemos de pasada que la imposibilidad de hacer la economía de un axioma de recurrencia es, en sí, un hecho extraordinario; los sistemas axiomáticos son raramente tan rígidos. Por el contrario, hay generalmente una gran flexibilidad en la elección de los axiomas, sin que haya dos veces el mismo. Para un sistema más simple, como la lógica de las proposiciones, la diversidad es aún más sorprendente» *(1960 a,* 107). Tal extrañeza sigue a un estudio acerca de la posibilidad de restringir el alcance del principio de inducción completa, con debilitamiento correspondiente, apoyado en los intentos elaborados por Hilbert y Bernays. De hecho ambos autores construyeron sistemas aritméticos sin tal principio y demostraron la consistencia de los mismos, sin que les afectaran las limitaciones gödelianas. Así, el más completo, el sistema (D), permite la formalización aritmética salvo la operación multiplicación. Naturalmente, tal sistema se encuentra limitado de manera trivial y no refleja la serie de los números naturales. El principio de inducción completa se muestra, de esta manera, radicalmente necesario para dicha construcción, pero igualmente se muestra como imposible de ser formalizado de manera satisfactoria. Dos ideas sostenidas con fuerza por Poincaré. Aunque pueda leerse «Poincaré llega a decir en sustancia que es imposible definir una estructura que verifique todos los axiomas de Peano, con excepción del principio de inducción completa; el ejemplo (debido a Padoa) de los enteros con la aplicación $x \rightarrow x+2$ en lugar de $x \rightarrow x+1$ demuestra que esta aserción es inexacta» (Bourbaki, *1969*, 52 *n)*. Lo que Poincaré establecía es que no podía realizarse una estructura que verificara todos los axiomas de Peano y la negación del principio de inducción completa. El ejemplo, debido a Padoa, es una clara muestra de lo que Bourbaki parece entender por negación del principio de inducción completa.

La necesidad del principio de inducción completa para la elaboración de los números naturales es terminante. Bien del principio, bien de cualquiera de sus proposiciones equivalentes, como puede ser la buena ordenación, formulada por Poincaré. La demostración de la equivalencia ha de apoyarse en la reducción al absurdo y, por consiguiente, en el principio de tercero excluido. Es por lo que, para un intuicionista, la misma no sea válida y deba limitarse al manejo del método directo, del inductivo.

Cabe indicar que si bien el principio de buena ordenación es equivalente, no puede decirse lo mismo respecto al axioma de reducibilidad de Russell, como éste mostró, un tanto displicentemente. Entre otros puntos porque el axioma de reducibilidad presenta una cierta afinidad con el principio de identidad de los indiscernibles de Leibniz y permite definir la identidad como relación binaria en la forma $x = y \equiv \forall f(f(x) \Longrightarrow f(y))$, salvando mediante dicha implicación, el afirmar que dos cosas son idénticas cuando coinciden en todas las propiedades 'f', mediante la afirmación de que si dos cosas son idénticas poseen, por ello mismo, las mismas propiedades. Con lo cual la identidad se convierte en propiedad de nombres de individuos, mientras que la igualdad permite referirse a clases. Naturalmente, esta definición de identidad en función del axioma de reducibilidad hace que éste posea una amplitud insospechada para el principio de inducción completa y sea una de las razones por las cuales Russell mantenía dicho axioma. Las demás razones para señalar la mayor amplitud son de alcance menor; así, el que en intensión equivalga a «cualquier combinación o disjunción de predicados es equivalente a un predicado singular», etc.

§ 3. La crítica a Hilbert

El programa hilbertiano, tal como fue enunciado en 1904, se prestaba a la crítica. La de Poincaré fue, ciertamente, decisiva. Pero lo fue en un plano constructivo. Al señalar la pretensión de definir de modo riguroso el número ordinal mediante el empleo de signos gráficos carentes de cualquier correlato, Poincaré indicaba que este intento se mostraría fallido —al igual que el intento logicista— por verificarse uno de los términos de la disjunción: círculo vicioso o existencia de dos definiciones. En el primer caso, nada se ha adelantado; pero no es término aplicable, realmente, al formalismo inscripcionista, dado que los signos que maneja no pretenden tener un contenido semántico, sino que se quieren desprovistos del mismo. En ese caso habría que justificar la adecuación o no de la teoría sígnica construida con la aritmética material que, de hecho, se utiliza. Problema de adecuación y génesis que no aparece mencionado pudiéndose interpretar, entonces, un empirismo como base de este formalismo inscripcionista, inconsecuente radicalmente como fundamento del hacer matemático.

Es el segundo término de la disjunción el que afecta al formalismo programado por Hilbert. La acusación de Poincaré se centra, realmente, en el hecho de que el matemático alemán está manejando dos planos distintos, material o concreto y conceptual, como si fueran uno mismo. Confusión de dos planos que se mantiene al enfocar la demostración como si fuera un objeto matemático. Objeto matemático que, para serlo, según Poincaré, exigiría una definición implícita que, para ser aceptable, requiere la 'demostración' de no ser contradictoria. Luego o tal definición es superabundante —en el sentido de que no es preciso darla, por ser lo que define ya conocido—, o bien encierra un círculo vicioso —porque se requiere la demostración de que la demostración no es contradictoria—, o bien se hace referencia a otra cosa que a lo que de modo clásico se entiende por demostración y entonces requiere una nueva proposición o teorema que articule ambas definiciones de demostración. Si lo que Hilbert quiere indicar es que la demostración tal como la interpreta es una mera sucesión de signos materiales, gráficos, o de cualquier otro tipo, Poincaré tendrá toda la razón al señalar que, en ese caso, no hay problema de consistencia.

La respuesta de Hilbert, tardía, es aceptar la distinción de los dos planos señalado por Poincaré y que se formula por vez primera, con toda nitidez y de modo explícito, por Brouwer en 1907. La aceptación hilbertiana consiste en dividir el hacer matemático en dos: Matemática y Metamatemática. La primera trata por modo exclusivo con signos materiales, concretos, inmediatamente percibidos, perfectamente delimitados, con los cuales se realizan construcciones y transformaciones manuales mediante reglas rigurosamente determinadas. La elaboración de las fórmulas físicas, la enumeración de los signos que cabe aceptar, han de formularse mediante reglas de carácter finito, recurrencial. La elaboración matemática se convierte, en este sentido, en un juego estrictamente formal no permitiéndose *jugueotte* alguna, en el decir de Poincaré. Junto a ella, se sitúa la Metamatemática, cuyo objetivo central se sitúa en realizar tanto la enumeración completa de los signos que pueden adoptarse en la matemática, como de las reglas de transformación, a la vez que la demostración, por medios estrictamente finitos, de la consistencia de las premisas aceptadas. «En esta metamatemática se aplica —frente a las reglas de deducción puramente formales de la matemática propia— la deducción material, y esto siempre para demostrar únicamente la consistencia de los axiomas» (Hilbert, *1922*, 174). La demostración como proceso ha de constar, en esencia, de las etapas: *a)* Elección de ciertas fórmulas como axiomas; tales fórmulas se consideran como demostradas, para lo cual basta la inspección o intuición perceptiva; *b)* Si 'a' y 'b' son fórmulas correctamente construidas y 'a → b' y 'a' han sido demostradas, entonces 'b' ha sido demostrada.

Con este esquema [101] pueden observarse dos cuestiones: En primer lugar, y referido al enlace con Poincaré, que la distinción de Hilbert perfecciona y ahonda la del matemático francés entre Lógica formal como elemento clave para la demostración y la Intuición como clave para la epiteoría. Ambas intuiciones de Poincaré quedarán definitivamente incorporadas al hacer matemático formalista. Pero, una salvedad; Poincaré recalca la existencia de la distinción y la necesidad de eliminarla o dar cuenta de ella. Es esto último lo realizado por Hilbert, mientras que el primer término de la disjunción vendrá realizado por el intuicionismo

[101] Una exposición muy lúcida, y aún no influida por los trabajos de Gödel, se tiene von Neumann, *1931*, comunicación de un simposium sobre los fundamentos de la matemática aparecidos en la revista *Erkenntnis*.

de Brouwer. En este punto, la crítica de Poincaré ha sido realmente positiva, aunque nada permita asegurar cuál de las dos tendencias perfeccionadoras hubiera seguido él. En segundo lugar, que Hilbert introduce un nuevo sentido en el término 'demostración'. El sentido clásico, perfeccionado en el tratamiento axiomático, ve la demostración como un proceso en el cual de unas premisas 'P_i' se logra obtener una cierta conclusión 'C' que se sigue lógicamente de 'P_i' o, en términos ya comentados, que se encuentra 'contenida en P_i'. Las diferencias o divergencias en la interpretación clásica se centraban en los términos 'seguir lógicamente' o 'estar contenido'. La corriente axiomatizadora trata de mantener un sentido deductivo teórico en el sentido de que a partir de unas premisas se pueda obtener una conclusión por un método de deducción formal adecuado. Como señalara Beth, el método axiomático no envuelve el análisis de una cierta conexión entre un conjunto de premisas y un conjunto de conclusiones; únicamente confiere un estatuto de privilegio a cierto tipo de fórmulas, llamadas tesis, que pueden identificarse con las identidades lógicas leibnizianas. Junto a este sentido de la demostración, que permanece en terrenos semejantes a los clásicos euclídeos, Hilbert introduce la demostración como mera cadena de fórmulas a partir de algunas consideradas como premisas, es decir, que una demostración no es más que una sucesión finita de fórmulas donde la conclusión de la misma ocupa el último lugar de la cadena. Tal sucesión ha de establecerse mediante unas reglas explícitas que permiten establecer un esquema de reducción y a la vez el cierre de dicha sucesión. Esquema apoyado en la regla de separación o del *modus ponens*. En este punto se tiene el acuerdo básico con Poincaré, quien se había anticipado a esta noción de 'demostración', en otro punto, el que, en palabras de Beth se formula con un «*no* se sigue inmediatamente de nuestras consideraciones que exista ningún método adecuado de deducción» *(1962*, 8).

Precisamente la no existencia de método adecuado alguno de deducción viene dado por las limitaciones internas de los formalismos. El segundo teorema de Gödel —si un sistema formal es consistente la prueba de su consistencia no puede hacerse en su interior—, los de Tarski sobre la 'verdad' y 'definibilidad' —ningún sistema formal puede pretender formalizar todos los predicados necesarios para su construcción—, indican la imposibilidad de representar en un sistema formal bastante potente el conjunto de sus propiedades, lo que se calificaría, igualmente, como la gramática de la lengua. Por otro lado, la inferencia deductiva requiere, como se ha indicado, el establecimiento tanto de fórmulas —criterio máximo, el de recursividad— como el de inferencias —criterio análogo, el de recursividad—, aunque se emplee el modus ponens. Pero, en todos los casos, cabe preguntarse por su propia admisión. Y no hay respuesta formal alguna. La garantía del razonamiento se quiere el espíritu; en el fondo, es una respuesta del mismo tipo que la de quien sostiene que dicha garantía viene dada por intuición.

Un tercer aspecto, que pretende realizar la garantía, viene dado por lo que se califica 'demostración semántica', apoyada en la construcción de tablas veritativas, y que pueden traducirse a deducciones 'normales' en el caso de cálculos como el proposicional. En este sentido puede apoyarse la validez de una regla de inferencia en un criterio semántico como el dado por Beth de no hallar contraejemplo alguno mediante sus tablas deductivas [102]. Ello sólo es factible mediante el empleo de las mencionadas tablas veritativas y el recurso a la semántica. Recurso de apoyatura muy débil en cuanto al aspecto de fundamentos, que pretende elevarse de las consideraciones semánticas por la ambigüedad que conlleva como para tener que volver a fundamentarse en la misma.

De esta forma, la crítica de Poincaré en cuanto a la inexistencia de criterios para saber cuándo se ha terminado una demostración como sucesión de fórmulas, para saber los criterios a seguir en dicha marcha, criterios de decisión, se mantiene válido, así como su visión de que una demostración formal no sea otra cosa que una sucesión y, por tanto, se encuentre estrechamente ligada a la aritmética.

Lo que interesa destacar es el hecho de que Hilbert pretenda superar las críticas de Poincaré —entre otras— con la distinción entre ambos niveles. Ciertamente que con la misma gran parte de los argumentos de Poincaré quedan sin fuerza, aunque no todos como en el caso de los criterios epiteóricos de la demostración, por ejemplo. Para terminar de superar tales críticas Hilbert necesita escindir en dos, igualmente, el método de inducción completa. Con la misma podrá asegurar que la crítica de Poincaré no le afecta y estará, ciertamente, en lo verdadero aunque, con palabras de Mooij, «ello no es verdad más que porque su teoría

102 Beth, *1956 a, 1962 a, 1962.*

ha sido adaptada a las objeciones de Poincaré» *(1966,* 101). Sin embargo, tal distinción y las interpretaciones que el mencionado principio de inducción completa han provocado, merecen especial atención, que será esbozada siguiendo una línea histórica, donde creo que se pondrá aún más de relieve el papel jugado por las críticas de Poincaré.

Trayectoria histórica: A vueltas con el principio de inducción completa

En 1912 Brouwer ataca al formalismo, principalmente en cuanto método axiomático centrado en la elaboración conjuntista de Zermelo. Con palabras que retoman los criterios formulados por Poincaré —y que por ello transcribo a pesar de su extensión— el matemático holandés, al referirse al principio de inducción completa, señalará: «por medio de razonamientos relativamente complicados se prueba el principio de inducción completa como propiedad fundamental de esos conjuntos [los finitos]. (...) Que el formalista deba dar una demostración explícita de este principio, que es autoevidente para los números finitos desde la explicación intuicionista de su construcción, muestra al mismo tiempo que el primero no será capaz de justificar su elección de axiomas reemplazando la insatisfactoria llamada a la práctica inexacta o a la intuición igualmente inexacta para él de una demostración de la no-contradicción de su teoría. Porque para probar que una contradicción no puede obtenerse entre una infinidad de conclusiones que se pueden obtener de los axiomas que utiliza, tendrá que demostrar primero que si ninguna contradicción ha encontrado con la *n* conclusión entonces ninguna contradicción alcanzará en la n+1, y segundo, tendrá que aplicar el principio de inducción completa intuitivamente. Pero es esta última etapa la que el formalista no quiere adoptar, ya que piensa que ha demostrado el principio de inducción completa; para esto requerirá el matemático la certeza de que el conjunto de propiedades obtenidas tras la conclusión *n* haya sido alcanzada, que se satisfaga para un *n* arbitrario esta definición de conjuntos finitos (Poincaré, *1905,* 834), y en orden a asegurar esta certeza tendrá que haber recurrido no sólo a la aplicación no permisible de un criterio simbólico a un ejemplo concreto sino también a otra aplicación intuitiva del principio de inducción completa; esto le conducirá a un círculo vicioso en el razonamiento» *(1912,* 71).

Puede observarse que, en la cita anterior, Brouwer se hace eco del resumen de la crítica total que Poincaré hiciera a Hilbert, incluso adoptando como criterio para la demostración de consistencia de un sistema el método de inducción completa —dado que el método por el modelo no encuadra con el enfoque formalista—, que he criticado anteriormente como insostenible en la formulación de Poincaré, traducida en los términos holandeses. Traducción que, al ser imposible —para Brouwer no lo es, sino que es mero círculo vicioso— hace que el formalista no logre obtener ni siquiera la condición primera, y fundamental, de su programa. Sin embargo, en estas palabras Brouwer no hace más que admitir la evidencia intuitiva del principio de inducción completa, sin distinguir los dos niveles en dicho principio señalados por Poincaré, aunque ya admitiera los niveles de lenguaje matemático y matemática de segundo orden, lógica e intuición en Poincaré, matemática y metamatemática en Hilbert.

Es en 1922 cuando Hilbert puede indicar que la crítica de Poincaré no le afecta. «Su objeción de que este principio no puede ser probado de ninguna otra manera más que por la inducción matemática misma es injustificada y está refutada por mi teoría.» Teoría en la cual se muestran dos inducciones de diferente tipo: uno que se aplica a sucesiones materiales, intuitivas de signos o de sucesiones de signos; otro que está representado en su significación clásica. Poincaré sostiene que, en todo caso, la demostración de consistencia podría justificar el segundo principio, pero que jamás se podría justificar el primero. En otras palabras, que el primer principio no puede considerarse más débil que el segundo, por lo que éste, en última instancia, habrá de apoyarse en el primero. Hilbert, sin embargo, se esfuerza por indicar que el primer principio no es una auténtica inducción matemática, para lo cual señala cómo pueden realizarse construcciones sígnicas, materiales o de contenido sin necesidad de aplicar inducción alguna. Con sucesión de signos '1', demuestra, por ejemplo, la propiedad conmutativa de la adición material. Agrega: «Esta demostración, como yo querría sin embargo destacar particularmente, es un procedimiento que permanece (...) exclusivamente bajo la composición y descomposición de los numerales y es en esencia diferente del principio que, como principio de inducción matemática, o inferencia de n a n+1, juega un papel predominante en la matemática superior» *(1922,* 164). Papel apoyado en el manejo del término 'todo' y que, por ello mismo, pertenece a los métodos de demostración transfinitos, es decir, no finitos como lo es el primer principio de inducción de contenido. Como resultado de esta distinción, lo que Hilbert pretende es demostrar que los métodos metamatemáticos no van más allá del caso típico de un objeto concreto dado. Pero ello es, realmente, insostenible. En primer lugar porque las proposiciones de la metamatemática han de referirse a todas las propiedades de la misma; en particular, las demostraciones de consistencia, como había indicado con toda claridad Poincaré, han de referirse a todas las proposiciones del sistema y no sólo a unas en particular. Mantener este punto, equivaldría a mantener que se hace referencia por modo exclusivo a las marcas del papel, lo cual es claro que suprime tales cuestiones de consistencia y, en realidad, todo problema matemático. En segundo lugar, porque la pretendida supresión de la inducción completa en el primer tipo de construcción de contenido, no existe. A este punto ya respondió el mismo año de 1922 el matemático Skolem. Al argumento de Hilbert de que Poincaré se había equivocado por no distinguir los dos tipos de inducción y considerar que la material no era tal inducción, Skolem replica: «Pero entonces la gran cuestión es si podemos probar este principio por medio de principios más simples y *sin usar ninguna propiedad de expresiones o fórmulas que a su vez caigan bajo la inducción matemática o sus equivalentes.* Me parece que este último punto no ha sido tomado suficientemente en consideración por Hilbert. Por ejemplo, hay en su escrito (...), para un lema, una demostración en la que hace uso del hecho de que en cualquier demostración aritmética en la que ocurre un cierto signo ese signo debe ocurrir necesariamente por primera vez. Pensamiento evidente esta propiedad puede apoyarse sobre nuestra intuición perceptiva de expresiones finitas, una demostración formal de la misma únicamente puede darse con certeza por medio de la inducción matemática. En la teoría de conjuntos (...) partimos de la dificultad de probar que todo conjunto finito ordenado está bien ordenado, es decir, que todo subconjunto tiene primer elemento» *(1922,* 300), pero ello es equivalente, precisamente, al principio de inducción completa. En otras palabras, Skolem objetará, defendiendo el punto de vista de Poincaré, que incluso la admisión de la inducción material exige, en cuanto se quiera romper con el inscripcionismo, el empleo de la inducción completa enfocada como construcción primaria al basarse en la posibilidad reiterativa de una misma operación.

Igualmente Skolem hará referencia al problema de la demostración indicando, con Poincaré, que el concepto 'proposición que se sigue de ciertas suposiciones' también posee un carácter inductivo o recurrente. De aquí el círculo vicioso cometido por quienes aceptan el concepto 'finito' como apoyado en premisas cuya consistencia debe ser demostrada. Los teóricos conjuntistas piensan que la noción de entero finito puede ser definida y demostrado el principio de inducción completa, al igual que los logicistas. A lo cual Skolem objetará repitiendo términos del matemático francés que ya he citado: «Pero está claro que no podemos definir o demostrar ad infinitum; más pronto o más tarde llegaremos a algo que ya no es definible o demostrable. Nuestra única preocupación entonces estará en que los fundamentos iniciales sean algo inmediatamente claro, natural y no abierto a la duda. Esta condición está satisfecha por la noción de entero y por las inferencias inductivas, y no está satisfecha en modo alguno por los axiomas de la teoría de conjuntos del tipo de Zermelo o cualquier otro de ese tipo; si aceptamos la reducción de las primeras nociones a las últimas, las conjuntistas tendrán que ser más simples que la inducción matemática y razonando sobre ellas se revelarán menos dudas, pero esto se muestra enteramente contrario al estado actual de las cosas» (*íd.*, 299).

Hilbert y su escuela mantienen el enfoque contrario, sin embargo. Así, Ackerman señalará en 1924 la necesidad de eliminar de los terrenos de la construcción matemática las inferencias transfinitas, siempre cuestionables, entre las cuales se sitúa el principio de inducción completa en su segunda acepción formal. Pero será Hilbert quien nuevamente insista en 1927. Insistencia en los dos métodos diferentes y en el error de Poincaré agregando aquí la consideración de la influencia en los matemáticos posteriores de este gran matemático. Hilbert escribirá: «ante todo, él negaba de antemano la posibilidad de una demostración de consistencia para los axiomas aritméticos, sosteniendo que la consistencia por el método de inducción completa no podría demostrarse nunca salvo por el método inductivo mismo. Pero, como muestra mi teoría, dos métodos distintos que proceden recursivamente entran en juego cuando se establecen los fundamentos de la aritmética; por una parte, la construcción intuitiva del entero como numeral (a la que también corresponde, recíprocamente, la descomposición de cualquier numeral dado, o la descomposición de cualquier figura concreta dada construida como el numeral), es decir, la inducción *material*, y, por otra parte, la inducción *formal* propia [103], que está apoyada en el axioma de inducción y sólo mediante el cual la variable matemática puede empezar a jugar su papel en el sistema formal. Poincaré llega a su errónea convicción porque no distingue entre esos dos métodos de inducción, de naturaleza enteramente distinta. Lamentablemente Poincaré, el matemático que en su generación fue el más rico en ideas y el más fértil, tenía un decidido prejuicio hacia la teoría de Cantor, que le impedía formarse una justa opinión de las magníficas concepciones de Cantor. En esas circunstancias Poincaré ha rechazado mi teoría que, por otra parte, estaba todavía en sus comienzos y los trabajos iniciales eran por completo insuficientes para su comprensión. Por su autoridad, Poincaré ha ejercido una influencia unilateral sobre la generación más joven» (*1927*, 299-300) [104].

Hilbert no ha tenido en cuenta la crítica realizada por Skolem. Confía, todavía en esta época, en la posibilidad de realizar la demostración de consistencia por métodos finitos. En esta esperanza se mueven los trabajos de Ackermann de 1924 en que se daba una primera demostración de la consistencia, restringida por el propio Ackermann, así como por la crítica de von Neumann de 1927, crítica acompañada de un nuevo intento de demostración de consistencia en el cual la inducción completa únicamente se aplicaba sobre fórmulas libres de cuantificador. En esta línea, Ackermann pretendía dar otra demostración, no publicada, aunque sí comunicada a Bernays y editada en 1928. Esperanza sostenida y en nombre de la cual se atacaba a los demás. Esperanza eliminada con los trabajos de Gödel de 1931. A pesar de lo cual Ackermann daba una demostración de consistencia en 1940, pero empleando métodos transfinitos, los métodos prohibidos, utilizando la inducción transfinita, no formalizable en la aritmética de primer orden.

En el mismo año de 1927 se encuentra una nueva defensa de la postura de Poincaré frente a Hilbert, realizada por Weyl en lo que llega a calificar de 'segunda lectura de los Fundamentos de

---

103 En su primera versión Hilbert utiliza para la primera inducción los términos *die inhaltliche Induktion*, y para la segunda, *formal*. Ambos calificativos los suprime en la reimpresión de 1928, así como al incluir esta conferencia como Apéndice IX en *Fundamentos de la Geometría*, de 1930, 3.ª ed.

104 Esta es la crítica a la que se refiere Mooij en las palabras antes citadas. Ver igualmente Mooij, *1966*, 97-102.

la Matemática', considerando que la primera fue la dada por Poincaré (1905-6). Hermann Weyl escribe: «Cuando Poincaré decía que la *inducción matemática* es para el pensamiento matemático una base última que no puede reducirse a ninguna más primaria, tenía en el espíritu precisamente el proceso de composición y descomposición de numerales, que Hilbert mismo emplea en sus consideraciones materiales y que son completamente transparentes a nuestra intuición perceptiva» *(1927,* 482). Es decir, reconoce que Poincaré había distinguido entre ambos tipos de inducción y que, aun admitiendo que la inducción formal pueda demostrarse en cuanto a la consistencia, no lo será la primera, que exige de la intuición y es indemostrable. Si se tiene presente la crítica de Skolem, esta primera inducción de contenido resulta, como quería Poincaré, inducción completa y no mera inspección perceptiva de signos concretos; empirismo que, para el matemático francés, es improcedente como última apoyatura de la matemática. Y en cuanto al punto señalado de prohibir el uso del término 'todo' de los terrenos de la metamatemática Weyl indica con nitidez que ello es contradictorio, dado que «es absolutamente esencial que los argumentos materiales en la teoría de la demostración se lleven *en generalidad hipotética,* sobre *cualquier* demostración, sobre *cualquier* numeral» *(íd.,* 483). Y esta generalidad únicamente puede venir asegurada, si se quiere evitar las llamadas a la psicología en cuanto a la condición de experiencia, por la inducción completa. Que continúa siendo, por tanto, un principio base, imposible de formalizar y fundamentar en cualquier otro terreno, ni siquiera el perceptivo finito.

El mismo año de 1927, Brouwer planteará la formulación de cuatro tesis en las cuales podría establecerse el acuerdo o desacuerdo entre los formalistas y los intuicionistas. Es un punto que deseo destacar firmemente, para dar cuenta de la posición de Poincaré y de la interpretación aquí sostenida, frente al hecho de su difundido antiformalismo, opinión apoyada en frases como las que he transcrito anteriormente de Hilbert. La primera tesis de Brouwer establece: «Distinguir, en los procesos formalistas, entre una construcción de 'el inventario de las fórmulas matemáticas' (aspecto formalista de la matemática) y una teoría intuitiva (relativa al contenido) de las leyes de esta construcción, sabiendo que para esta última teoría la matemática intuicionista del conjunto de los números naturales es indispensable» *(1927,* 490-1). Comentando esta tesis, Brouwer agrega: «El primer punto está todavía ausente en Hilbert 1904, ver en particular Sección V, que está en contradicción con él. Después de haber sido enérgicamente preparado por Poincaré, aparece por vez primera en la literatura en Brouwer 1907 donde en pp. 173-174 los términos *lenguaje matemático* y *matemática de segundo orden* son utilizados para distinguir entre las partes de la matemática formalista mencionada antes y donde el carácter intuitivo de la última parte es realzado. Este punto penetra en la literatura formalista con Hilbert 1922 donde a las matemáticas de segundo orden se les da el nombre de metamatemática» (*íd.*, 491). Exponiendo las tesis de Brouwer Heyting, en 1934, llegará a señalar: «La primera parte de esta declaración corresponde exactamente a la concepción hilbertiana. (...) La segunda parte de estas condiciones también hoy se han cumplido» (*1955*, 61). Y el mismo Heyting reconoce que para la matemática formal, una parte del dominio de la matemática intuicionista es indispensable; «la inducción completa es necesaria para la demostración de la no-contradicción. Pero aunque renuncie a un examen teórico de la no contradicción, se utiliza, para comprender las reglas de las operaciones de la matemática intuicionista, los conjuntos finitos, comprendido el concepto de número finito cualquiera» (*íd.*, 62).

Insisto en que interesa destacar las afirmaciones de Brouwer, de 1927, en el sentido de que la preparación para la distinción de niveles entre matemática y metamatemática, ausente en Hilbert 1904, se encuentra 'enérgicamente' en Poincaré, quien había señalado la misma. La desventaja del matemático francés, desde mi punto de vista, es la no continuación de su apreciación, el no haberla llevado hasta sus soluciones teóricas, como lo hiciera Brouwer y después Hilbert. En este sentido interesa mencionar la afirmación contenida en los Elementos de Historia de Bourbaki, en la que se invierten los matices anteriores: «Hostil por principio a los lenguajes formalizados, de los que negaba la utilidad, confunde constantemente la noción de entero en las matemáticas formalizadas, y la utilización de los enteros en la teoría de la demostración, que empezaba a aparecer entonces (...); era sin duda difícil en esta época hacer tan nítidamente como hoy —tras cincuenta años de estudios y discusión— esta distinción que sin embargo habían sentido un Hilbert o un Russell» (*1969*, 52-3). Poincaré murió en 1912; la formulación de la teoría de la demostración surgió en 1922, preparada, precisamente, según he ido indicando, por las críticas de Poincaré donde se manifiesta la distinción no sentida en la época por Hilbert y sí recogida por Brouwer.

Hilbert mantiene, a pesar de las críticas, su idea básica. Ante el hecho de que las demostraciones de consistencia exigen el empleo de 'todas' las proposiciones del sistema, como indicara Poincaré y reitere Weyl, Hilbert replica: «De aquí, cuando yo quiero asegurar si una fórmula, tomada como axioma, conduce a una contradicción, la cuestión es si una demostración que conduce a una contradicción puede presentárseme. Si tal demostración no se me puede presentar, tanto mejor; me he ahorrado el trabajo de tener que rehacerla. Si tal demostración se me presenta, tengo el derecho de sacar alguna de sus partes y considerarlas en sí mismas y, en particular, descomponer además los numerales que, compuestos y construidos, ocurren en ella. Esto no emplea sin embargo la inferencia de n a n+1 en manera alguna» *(1928,* 317). Ciertamente, no de forma explícita. En cuanto pretenda que esa demostración sea válida para todas las consecuencias, la inducción completa habrá hecho acto de presencia. Y nuevamente en 1928, en el Congreso de Bolonia, haciendo un recuento de los problemas que todavía tiene planteada la Matemática en su aspecto de fundamentación, Hilbert enlazará la inducción completa con el nombre del matemático francés: «Fue Poincaré, este maestro de la invención matemática, quien por una desgraciada concepción del razonamiento inductivo —concepción que hacía veinte años había sido refutada por Dedekind mediante una acabada demostración— cerraba el camino del progreso» *(id.,* 311).

Puede concluirse señalando cómo para Poincaré la axiomatización y el formalismo no dan cuenta de la virtud creadora del hacer matemático. Y en ello hay acuerdo, porque ambas tendencias pretenden reconstruir, formalizando, lo ya elaborado. Pero tampoco dan, en esta reconstrucción, una fundamentación rigurosa, adecuada, de lo que reconstruyen. En esta operación es central demostrar la consistencia de los sistemas axiomáticos, y tal consistencia es imposible. Desde este punto de vista, queda aceptar que, hasta el momento, tal contradicción no ha aparecido, y puede confiarse en que no aparecerá. Pero ello es un enfoque pragmático. Es lo indicado por Poincaré ante la solución axiomática conjuntista de Zermelo, que basta para seguir, pero no para dar cuenta, para explicar el por qué del hacer matemático. En este sentido la explicación a la impotencia de la orientación creo que es la dada por Skolem: habría que formalizar los razonamientos para asegurar el formalismo; y ello es imposible. El gran éxito del formalismo, frente a las intuiciones del matemático francés, consiste, indiscutiblemente, en haber dado demostraciones rigurosas de tal imposibilidad, de esas intuiciones.

CAPÍTULO 8

PREDICATIVIDAD. CONSTRUCTIVISMO

§ 1. EL PROBLEMA DE LA PREDICATIVIDAD

El proyecto de fundamentación querido por Frege —y su construcción paralela e independiente cantoriana— iba a encontrar, antes de plasmarse en realización completa, una barrera aparentemente insalvable: la revelación de que el proyecto encerraba paradojas en su interior. Cantor, Burali-Forti, Zermelo, Russell serán los primeros en señalarlo. Un matiz diferencia, sin embargo, las primeras paradojas. Como matemáticos, acostumbrados a trabajar contra la intuición, tales dificultades se mostraban no como algo intrínseco al nuevo método, sino como una dificultad más, como un obstáculo a superar del mismo modo a como se habían ido superando obstáculos anteriores. Es Poincaré, 1905-6, quien insistirá en un punto: las paradojas son algo inherente al método con el cual se realiza el proyecto de fundamentación, no algo accesorio que quepa eliminar con leves retoques. Y lo son porque dichas paradojas se fundamentan en el uso del círculo vicioso. Superable en terrenos finitos, tal uso no lo es cuando se enfrenta el matemático con clases infinitas. En otras palabras, la causa de las paradojas se centra en el manejo de las clases infinitas enfocadas como actualmente existentes con reglas lógicas que se han mostrado válidas para las clases finitas pero que no se ha estudiado si lo son para clases infinitas; al menos no se ha tenido la prudencia de tomar medidas restrictivas que impidan la aparición de contradicciones.

Si la causa central, para Poincaré, se encuentra en la inversión metodológica con la aceptación del infinito actual que conlleva, la misma se manifiesta, insisto, en el empleo de definiciones y clasificaciones impredicativas. He procurado exponer el concepto que de tal impredicatividad poseía Poincaré con el máximo detalle porque sus afirmaciones han quedado como caracterización de lo que debe entenderse por impredicatividad, a pesar de que algún autor pretenda, principalmente, en la actualidad, que la misma no es lo suficientemente precisa.

Así, Christian Thiel, 1971, reconoce: «Fue Poincaré quien primero se dio cuenta de una característica común de las antinomias hasta entonces conocidas: en cada una de ellas se introduce un objeto en términos de una totalidad a la que él mismo pertenece, totalidad que, al parecer, no puede en modo alguno ser considerada como existente sin tal objeto. Poincaré creyó haber encontrado con ello el fundamento de las antinomias e identificó la impredicatividad con la circularidad. (...) Russell se adhirió a esta concepción que constituyó la base de su 'vicious-circle-principle', formulado en el artículo sobre la Teoría de los tipos» *(1971,* 90). Desde este enfoque Poincaré va señalando qué construcciones y demostraciones utilizan este tipo de circularidad. Pero la formulación de Poincaré se muestra como algo difusa ya que, según Thiel, «se llaman impredicativas aquellas definiciones en las que la introducción de un objeto se refiere a una totalidad (sin calificación más exacta) a la que pertenece el propio objeto a introducir» *(íd.,* 92). Es formulación que no proporciona, realmente, delimitación alguna para las construcciones ilegítimas de conceptos. En ello Thiel no hace otra cosa que seguir la afirmación russelliana de que su principio es negativo, no positivo. A su vez, Kneale ya advertía, tras puntos idénticos a los expuestos por Thiel, que «del contexto se desprende claramente que Poincaré trataba sólo de *explicar* por qué algunas expresiones con apariencia de definiciones están, en rigor, lejos de definir cosa alguna. Y asimismo se evidencia que el círculo vicioso que hacía surgir las paradojas de la teoría de conjuntos tenía para él carácter específicamente matemático, dependiendo en su opinión del intento de tratar a un conjunto como un todo complejo» *(1961,* 609). Ambos autores se limitan a considerar la caracterización de impredicatividad dada por Poincaré en *1906 a,* sin tener en cuenta sus ulteriores manifestaciones.

Sin embargo, creo que las palabras de Poincaré son realmente claras y especifican cuándo una construcción determinada es impredicativa. Según Poincaré, desde un enfoque extensional el *definiendum* ha de presentarse como una multitud por la que parece natural suponer que la misma no se constituye en unidad capaz de considerarse como un objeto nuevo —como variable de individuo— más que si se ha establecido previamente una definición que permita distinguir los objetos que pertenecen a esta multitud, de aquellos objetos que no pertenecen a la misma. En otras palabras, que la extensión del *definiendum* esté determinada de modo unívoco, las fronteras del mismo nítidamente delimitadas. Pero ello es lo que no ocurre con las definiciones impredicativas, que son claramente circulares: Para que una definición de este tipo tenga sentido preciso es necesario que el dominio de variación de la variable ligada que contiene esté perfectamente determinado; pero el *definiendum*, como unidad, debe pertenecer a ese dominio. Luego para que el *definiendum* esté bien determinado, es necesario que el dominio de variación esté bien delimitado; y para que ese dominio de variación esté bien delimitado es preciso que el *definiendum*, que es uno de sus elementos, esté bien determinado [105]. En otras palabras, las definiciones impredicativas se caracterizan porque el *definiens* contiene una variable ligada cuyo dominio de variación contiene el *definiendum*.

Es lo admitido por Russell tras el ensayo de Poincaré. Acepta que las paradojas tengan su origen en los círculos viciosos, «lo que presupone el todo de una colección no debe formar parte de la colección». Paradojas que, según Russell, adoptarían la forma: «Dada una propiedad g y una función f tal que, si g pertenece a todos los miembros de u, fu existe siempre, tiene la propiedad g y no es miembro de u; entonces la suposición de que hay una clase w de todos los términos que tienen la propiedad g y que fw existe, conduce a la conclusión de que fw a la vez tiene y no tiene la propiedad g» *(1906*, 635). De esta forma, una paradoja como la de Burali-Forti se obtiene sin más que poner 'gx=x es un número ordinal' y 'fu = el número ordinal de u'. Si el acuerdo con Poincaré es, hasta aquí, completo, Russell se separa en cuanto a las causas y remedios de la aparición del círculo vicioso, de la impredicatividad. Así, se niega a admitir que la causa se centre en el manejo o aceptación del infinito actual, dado que el círculo vicioso también aparece con clases finitas: la paradoja de Berry hace referencia a conjuntos finitos y, sin embargo, es impredicativa. Poincaré respondería que, de modo efectivo, él mismo indica que los círculos viciosos pueden mostrarse en clases finitas, pero que en este caso son meros juegos de palabras que pueden solventarse fácilmente. Creo que en este punto Poincaré llevaría razón, como se puso de manifiesto tras la se-

105 Comparar con Beth, *1956*.

paración en paradojas lingüísticas y paradojas matemáticas o lógicas realizada por Ramsey. Las que de modo efectivo afectan a la fundamentación son aquellas que versan sobre el infinito actual. Por otro lado, Russell reprocha a Poincaré su rapidez en resolver la cuestión mediante su constructivismo, cuando el problema es mucho más profundo. Aquí incide una crítica un tanto agria: «No puedo evitar el pensar que sus tentativas para evitar el círculo vicioso ilustran el tipo de aquellos que desprecian la lógica» *(íd.,* 649), cuando poco antes ha escrito: «La aserción de que deben ser evitados (...) envuelve uno de esos círculos que prescribe evitar» *(íd.,* 648). Es claro que, para Russell, la causa, al no querer encontrarla en el infinito actual, ha de ser puramente lógica y no matemática como quería Poincaré. Y ello porque, como apunta Kneale, de adoptar el enfoque querido por el matemático francés, Russell tendría que abandonar su posición logicista: «La única solución satisfactoria del problema tenía que consistir en la eliminación de las paradojas mediante una reforma de la lógica que, una vez propuesta, se acreditara por sí sola como una necesidad inexcusable» (Kneale, *1961,* 610). De aquí el estudio de tres tipos de solución, ya bosquejados anteriormente, y su decisión por uno de ellos que entraña la teoría de los tipos y el axioma de reducibilidad, que apunta en las palabras: «Todo enunciado que contiene x y una variable aparente es equivalente, para todos los valores de x, a algún enunciado g(x) que no contiene variable aparente alguna» *(1906,* 648).

Si las paradojas, la impredicatividad suponen un embarazo para los lógicos, que han de reconstruir sus bases hasta el punto de que Poincaré llegue a la afirmación «La vieja logística ha muerto, por más que la *zig-zag-theory* y la *no-class theory* se disputen ya su sucesión. Para juzgar a la nueva, esperaremos que exista» *(CM.,* 151), también la impredicatividad suponía un embarazo para los matemáticos. Es lo que Zermelo pondría de manifiesto al indicar que la no aceptación de las definiciones impredicativas equivaldría a la destrucción de grandes partes de la matemática clásica. Zermelo admite la crítica de Poincaré a los logísticos como Peano, dado que su enfoque propio es también constructivo. Zermelo acude a la sombra de Poincaré frente al matemático italiano. Pero su enfoque es más que constructivo, pragmático, como manifiesta al indicar que desde su punto de vista Poincaré también tendría razón al considerar los juicios de la matemática como sintéticos a priori, porque lo 'analítico' y lo 'sintético' es distinción «puramente filosófica y no afecta a las matemáticas para nada» *(1908 a,* 190). Para Zermelo sin embargo, Poincaré se ha dejado arrastrar y ha penetrado en esos terrenos filosóficos lanzando una crítica excesivamente radical. «Según Poincaré una definición es 'predicativa' y lógicamente admisible únicamente si *excluye* a todos los objetos que son 'dependientes' de la noción definida, es decir, que en forma alguna pueden ser determinados por ella» *(íd.)*. En este sentido, Poincaré tiene la razón cuando señala que su demostración de que todo conjunto puede ser bien ordenado utiliza métodos no predicativos. Pero igualmente el concepto de 'cadena' de Dedekind encierra la impredicatividad —lo que puede ponerse de manifiesto al indicar que cadena propia de un conjunto A respecto a la aplicación 'f' es el conjunto tal que $\forall Y((A \subset Y \wedge f(Y) \subset Y) \Rightarrow x \in Y))$—, por lo que dejaría de ser un instrumento operativo matemático. Y ello a Zermelo, matemático, no le parece oportuno. En este aspecto, Zermelo es más constructivo que el mismo Poincaré. Considera demasiado lógico-formal el concepto de impredicatividad, que para Poincaré es término matemático. Pero, frente a Russell, Zermelo insiste en que tal concepto, como lo 'analítico' y lo 'sintético' no debe afectar a la matemática. Además, la propia forma de la definición llamada predicativa encierra un círculo. Habría que conocer a todos los objetos que pueden ser determinados y excluidos, a la vez. A pesar de lo cual reconoce «Ciertamente la cuestión de si un objeto arbitrariamente dado cae bajo una definición debe ser decidible independientemente de la noción que va a ser definida, por medio de un criterio *objetivo*» *(íd.,* 191). La crítica de Poincaré, basada en la lógica formal es «una crítica que amenazaría la existencia de todas las matemáticas» *(íd.,* 198) ya que no sólo se utilizan las definiciones impredicativas en las nociones conjuntistas, sino que también se utilizan en la matemática clásica, en partes que pueden ser consideradas como fundamentales. Así el mismo tipo de demostración «puede encontrarse en análisis siempre que el máximo o el mínimo de un conjunto 'completo' previamente definido de números se use para otras inferencias. Esto ocurre, por ejemplo, en la demostración bien conocida de Cauchy del teorema fundamental del álgebra, y hasta ahora a nadie se le ha ocurrido considerarla como ilógica» *(íd.,* 190-1).

Desde estas afirmaciones de Zermelo ha quedado como idea central el empleo de las definiciones impredicativas para probar que todo conjunto acotado no vacío de números reales tiene cota superior. La conclusión no puede mantenerse para el teorema fundamental del álgebra, desde mi punto de vista, tras la respuesta que ya he mencionado de Poincaré. Respuesta en la que se hace la distinción entre a) caracterizar un conjunto por medio de sus elementos que sólo pueden caracterizarse por el conjunto al que pertenecen, y b) la construcción de un elemento que puede o no pertenecer a dicho conjunto. El caso es parecido en cuanto a los números reales. Si un número real 'r' está determinado por medio de un cierto conjunto de números racionales, por ejemplo, por el conjunto 'R' de todos los racionales 'x' menores que 'r', entonces la caracterización de 'r' es predicativa. Por ejemplo, lo es el número real '$\sqrt{2}$' cuando se determina mediante el conjunto 'R' de todos los números racionales 'x' que verifiquen o bien '$x \leq 0$' o bien '$x^2 \leq 2$'. Dado ahora un conjunto 'M' acotado no vacío de números reales, entonces su cota superior mínima 'm' suele determinarse por medio de un conjunto 'Q' de todos los racionales 'x' contenidos en algún conjunto 'X' que determinan un cierto número real 'r' en 'M'. La definición del conjunto 'Q' es claramente impredicativa porque contiene el cuantificador 'algún' respecto a la variable 'X', cuyo recorrido contiene precisamente al conjunto 'Q'. Pero como Lorenzen ha mostrado, en 1952, la definición puede sortear esta acusación de impredicatividad mediante una formulación que, al estilo de la de Poincaré, se vuelva predicativa. Lorenzen adopta la familia S_0 de todos los conjuntos que pueden ser definidos sin hacer uso de variables de conjunto, S_1 como familia de todos los conjuntos definidos por medio de variables de conjunto con la condición de que esas variables tengan por recorrido S_0. Se reitera este proceso obteniéndose la sucesión $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ Y sea $S_\omega = \bigcup_{i=0}^{n} S_i$. El continuo consistirá, entonces, en aquellos números reales r que pueden ser determinados para algún conjunto R en S_ω. Con lo cual el teorema de la cota superior mínima quedaría en la forma: Sea M un conjunto de números reales r, acotado y no vacío. Tales r podrán ser determinados por conjuntos R que pertenecen a una y la misma familia S_n $(n < \omega)$. Entonces M tiene una cota superior mínima, determinada por cierto conjunto R perteneciente a la familia S_{n+1}. La impredicatividad ha desaparecido, mediante un proceso iterativo, costructivo.

Interviene, en este punto, un elemento en cuanto a la definición de impredicatividad. Se observa que la definición de Poincaré de 1912 se escinde en dos apartados. Ello hace que la definición de impredicatividad muestre dos matices no siempre percibidos [106]: uno estricto y otro amplio. En sentido estricto, la definición impredicativa es aquella que caracteriza a un individuo haciendo intervenir al conjunto al cual pertenece —son los dos postulados de Poincaré *(1912 a,* 91)—, mientras que en sentido amplio es una definición que caracteriza a un individuo que posee una cierta propiedad utilizando el conjunto de individuos a quienes puede aplicarse dicha propiedad —son los tres postulados de Poincaré *(íd.)*—. Esta última es la que interviene precisamente en casos como los de la cota superior mínima, o los del valor mínimo que toma una función en un intervalo determinado. Es la que, en un momento determinado, podrá salvarse mediante artificios constructivos como los indicados por Poincaré, como los intentados por Lorenzen. En el primer sentido, en el estricto, la definición impredicativa no podrá ser remplazada por una definición predicativa equivalente.

El postulado de abstracción

Tanto en uno como en otro sentido, la clave de la definición impredicativa estriba en la conversión de un conjunto en elemento de otro conjunto. Elevación o conversión que, ya lo he indicado, sólo es factible si el conjunto ha sido previamente caracterizado sin ambigüedad alguna, permitiendo la distinción de sus elementos respecto a los que no son elementos del mismo. En el fondo, afinca la impredicatividad en los terrenos de la intuición, manifestada en lo que se denomina postulado de comprehensión. En su forma ingenua establece que a toda función proposicional se le asigna un conjunto, el formado por los objetos que la satisfacen. En otras palabras, los conjuntos se presentan como multitudes que engloban objetos con una propiedad común. Es lo admitido ingenuamente por Cantor, por Dedekind para sus 'multiplicidades', 'agregados' o 'sistemas'. Sistemas que, de modo inmediato, son considerados como elementos para formar otros sistemas. Salto clave, por ejemplo, en la definición por abstracción como hice notar al hablar de Frege y de las dificultades que éste encontraba al admitirlo, dificultades procedentes de considerar que los objetos no podían

106 Sin embargo, Ladrière, *1957,* 112.

ser enfocados como conceptos a pesar de que notara que en lugar de hablar de 'extensión de un concepto' podría decir simplemente 'concepto'. El postulado de comprehensión, en su versión intuitiva, puede enunciarse, siguiendo a Beth, en tres apartados:

a) Los objetos que poseen una propiedad en común constituyen un conjunto del cual son sus elementos y que está unívocamente determinado por esa propiedad.
b) Todo conjunto es un objeto y por ello puede aparecer como elemento de otro conjunto.
c) Conjuntos que contienen los mismos elementos son idénticos.

En otras palabras: Para toda fórmula 'F' con una variable libre 'x', existe un conjunto 'X' constituido por todos los elementos 'a' que satisfacen a 'F'. Como es este postulado —esquema postulacional realmente— el motivo de la aparición de las paradojas, el mismo puede restringirse de tres maneras posibles:

1. No se acepta el principio para todas las fórmulas 'F'. Es decir, no toda propiedad o concepto posee extensión.
2. La variable 'a' se restringe. Es decir, se toman clases no excesivamente amplias.
3. Se imponen simultáneamente las condiciones 1 y 2.

En esencia, estos tres mecanismos son los propuestos por Russell en 1905. El primero bajo el nombre de *zig-zag theory,* de marcado carácter intensional ya que la existencia depende de su contenido o significado. La segunda es la *theory of limitation of size;* de carácter extensional ya que hace referencia a la existencia de una clase o concepto como dependiendo de la extensión de la función proposicional, extensión que no ha de ser excesivamente grande. El tercer camino superador es la *no-class theory;* nombre desafortunado que permite la irónica frase de Poincaré de que cuando hayan desaparecido todos los términos 'clase' de una página de lógica «no quedarán más que algunos sobrevivientes esparcidos en medio de una página blanca» *(CM.,* 145). Como solución, Kneale advertirá que equivale a suprimir las enfermedades infantiles suprimiendo los niños. Naturalmente, lo que Russell pretende indicar es que las clases o conceptos no existen como objetos reales y los enunciados referidos a ellas son significativos únicamente como formas de hablar. Las tres han sido seguidas: La primera, por Quine en «Nuevos fundamentos para la lógica matemática», 1937; la segunda, por los matemáticos empezando por Zermelo; la tercera, por el propio Russell.

Si bien en 1905 y 1906 Russell vuelve a la teoría sin clases apuntada ya en 1903, sólo es en 1908 cuando da la formulación prácticamente definitiva. Pero es camino que exige la teoría de los tipos lógicos para evitar las circularidades y, con ellas, la impredicatividad, dado que cada vez que se hable de una totalidad para definir un objeto, este objeto no puede pertenecer a esa totalidad. Ciertamente esta teoría remedia las paradojas, pero ya se ha hecho clásico el conjunto de críticas a la misma y yo me he referido a ellas. A pesar de lo cual, cabe insistir. En virtud de la jerarquía de tipos es imposible hablar de una definición de los números naturales, por ejemplo, como quería Frege; habrá multitud de números '2', según el orden del tipo al que se estuviera refiriendo. Análogamente, habría tantos principios lógicos como niveles. Las demostraciones matemáticas, por otro lado, y es lo que se pretende justificar, violan la teoría de manera constante dado que los números reales, por ejemplo, aparecen como subconjuntos de números racionales y habría distintos órdenes, sin poder demostrar propiedades nada más que para cada orden. Se viola el propio sistema al indicar que ninguna función puede ser significativamente aseverada de todas las entidades sin distinción de tipo con lo que —y es devolución a Russell de su crítica a Poincaré— «nuestro enunciado envolverá la ilimitada generalidad cuya imposibilidad proclama» *(Kneale, 1961,* 622). Russell pretende resolver estas dificultades apelando al axioma de reducibilidad cuyas ventajas enumera para hacerlo más plausible, dada la cuestionabilidad de su carácter lógico. Ventajas que se pueden esquematizar en las siguientes: Suprime las generalizaciones acerca de la totalidad de las funciones independientemente de su orden; suprime paradojas como las de Berry; encierra el principio de identidad de Leibniz. Pero simplemente la aceptación de este axioma, así como los del infinito y elección, anula el principio logicista como ya he indicado. La nueva explicación que esperaba Poincaré para juzgarla, suponía el anulamiento del programa inicial.

Por otro lado, tampoco es una solución que suprima la impredicatividad, para la cual fue fundada, sino todo lo contrario. Precisamente el axioma de reducibilidad va a ser la llave para que tales definiciones impredicativas vuelvan a entrar en la fundamentación matemática elaborada por Russell. Skolem, delicadamente, indicaría en 1922, refiriéndose a los logicistas, en general: «se contentan simplemente con rodear la dificultad introduciendo una estipulación, el *axioma* de reducibilidad. De hecho, este axioma decreta que las estipulaciones no predicativas serán satisfechas. No hay demostración de ello; además, por lo que veo, tal demostración es imposible desde el punto de vista tanto de Russell y Whitehead como desde el de Zermelo» *(1922,* 297). Ya que, para ello, Skolem indica que tendrían que apoyarse en los modos recursivos de razonamiento, modos que son precisamente los que pretenden fundamentar bien en la teoría de tipos, bien en la teoría conjuntista, con lo cual cometerían círculo vicioso. Más radical, Hao Wang 1954 afirmaría: «Parece que Russell, intentando remediar una dificultad verbal menor, ha reintroducido sin quererlo las definiciones impredicativas por una puerta trasera a través del axioma de reducibilidad (en verdad ha introducido una suposición que incorpora la esencia de las definiciones impredicativas en la teoría de conjuntos)» *(1954,* 257). Por su lado Gödel sostiene «es demostrable que el formalismo de las matemáticas clásicas no satisface el principio del círculo vicioso (...) ya que los axiomas implican la existencia de números reales definibles en este formalismo únicamente por referencia a todos los números reales» *(1944,* 218-9). Como en *PM* se logran derivar tales matemáticas, la conclusión de Gödel es clara: no se han suprimido las definiciones impredicativas, lo que, además, prueba que el principio del círculo vicioso es falso.

Frente a la solución adoptada por Russell en 1908, el mismo año Zermelo daba su vía: axiomatizar la teoría de conjuntos utilizando la idea de limitar el alcance de las clases a utilizar. Con enfoque pragmático puro, Zermelo acepta las definiciones impredicativas y el problema consiste, entonces, en delimitar la extensión de los conjuntos de partida. En otras palabras, aceptar la existencia de un cierto dominio en el cual trabajar mediante delimitaciones adecuadas del mismo. Es lo que, en la práctica, hace el pintor: dado un lienzo va encajando en él sus formas, sus colores. Ahora bien, si de modo efectivo las antinomias conocidas desaparecen en esta axiomática y, admitiendo la impredicatividad, se logran en ella sin grandes distorsiones todos los resultados del análisis clásico, presenta una serie de desventajas, señaladas por Poincaré. Los axiomas se han de mostrar como decretos arbitrarios por lo que se ha de demostrar su consistencia. Demostración que indica como necesaria Zermelo pero que no hace, ni puede hacer. Lo cual indica que si bien han desaparecido las antinomias existentes, no indica que no puedan aparecer en el desarrollo del sistema. Enfoque pragmático es, con palabras de Poincaré, menos profundo que el intento de Russell. Intento que, por otro lado, se ha demostrado consistente admitiendo la teoría de los tipos con el axioma del infinito y sin el de reducibilidad.

Desde el propio terreno conjuntista la obra de Zermelo recibirá críticas. Así, Fraenkel, 1922, afirmará que el sistema de Zermelo presenta una debilidad: la noción imprecisa de 'definida', como apuntara Poincaré en 1909. Es noción que aparece básicamente en el tercer axioma, el de separación. Fraenkel buscará perfeccionar la axiomática, apoyándose, para ello, en el concepto 'función' *(1922,* 286). El mismo año Skolem se ligaba a este punto y daba su solución mediante el axioma de reemplazamiento, utilizado hoy como uno de los axiomas base del sistema Zermelo-Fraenkel. Posteriormente, reconocería que la solución de Fraenkel se reducía a la suya. Zermelo, sin embargo, no podía aceptar este tipo de axioma solución dado que en él se emplea el concepto de número natural, noción que debe ser definida por medio de la teoría de conjuntos. La conclusión de Skolem es que, desde este enfoque, la debilidad del sistema de Zermelo es difícilmente remediable, por lo que necesita apelar al número natural que pretende fundamentar y, con ello, comete círculo vicioso. Pero las críticas más interesantes son las realizadas por el mismo Skolem en 1922. El lienzo del que parte Zermelo queda sin definir; pero en este caso se puede concebir como un conjunto sin fronteras precisas. Como, por otro lado, lo que caracterizan los axiomas es 'conjunto', al concebir ese dominio inicial como conjunto resultará que se está cometiendo círculo vicioso. Por otro lado, los axiomas no caracterizan de modo unívoco el concepto 'conjunto' y, para realizar la delimitación de modo perfecto y adecuado, se hace preciso el empleo de previos conocimientos conjuntistas y, además, el previo conocimiento del número natural. Parece claro que cuando se hace una fundamentación de carácter axiomático, «la teoría de conjuntos no puede quedar como una teoría lógica privilegiada; está situada entonces en el mismo nivel que las restantes teorías axiomáticas» *(1922,* 292); de donde tal axiomatización no puede considerarse como una fundamentación adecuada para el total de la Matemática. Además de exponer la relatividad de los conceptos conjuntistas mediante la demostración de lo que se considerará 'paradoja de Löwenheim-Skolem' que enuncia «Si los axiomas son consistentes, entonces existe un dominio B en el cual los axiomas se cumplen y cuyos elementos pueden ser enumerados por medio de los naturales» *(íd.,* 293), Skolem señalará la dificultad de lograr una demostración de consistencia para los axiomas. «En particular, las estipulaciones *no predicativas* que gobiernan la formación de conjuntos causarán dificultades» *(íd.,* 297). Los axiomas podrían concebirse como principios generadores y se pueden enfocar como generando conjuntos de conjuntos ya establecidos mediante un número finito de etapas siempre que los axiomas sean consistentes. «Pero la dificultad es que tenemos que formar algunos conjuntos cuya existencia depende de *todos* los conjuntos. Tenemos así lo que se llama una *definición no predicativa.* Poincaré criticaba este tipo de definición y la considera como la debilidad real lógica de la teoría de conjuntos» *(íd.).* Para superarla, Skolem adopta el enfoque de Poincaré: sólo cabe utilizar los modos recursivos de razonamiento. Pero en Russell-Whitehead, en Zermelo, tales modos no figuran sino como derivados.

Las dos vías, logicista, conjuntista, aceptan la impredicatividad. Implícitamente la primera, de modo explícito la segunda. Ambas han hecho plausible la idea de que la impredicatividad no es suficientemente peligrosa. «Se impone reconocer, en todo caso, que Zermelo ha hecho creíble el carácter inofensivo de ciertas construcciones de conceptos que, según el criterio de Poincaré, han de calificarse de impredicativas» (Thiel, *1971,* 91). Conclusión inmediata, no ver en la impredicatividad, contra el parecer de Poincaré, la causa de las paradojas. Lo expresa el mismo Thiel diciendo: «Con ello pareció que se ponía en tela de juicio el aserto de Poincaré de que la causa de las antinomias residía en dichas construcciones» *(íd.).* Causa en Poincaré no, sino manifestación de la causa, como he insistido: el manejo del infinito actual hace que se utilicen las definiciones impredicativas, imposibles de evitar tanto en el logicismo como en la teoría axiomática de conjuntos; evitables en la matemática clásica mediante argumentos convenientes. Infinito actual que hay que aceptar dada la inversión metodológica que tanto el logicismo como el cantorismo suponen.

Carnap y 'número inductivo'

En esta última línea intenta Carnap hacer plausible la admisión de la impredicatividad tomando como modelo la definición de 'número inductivo', cuya impredicatividad puso de manifiesto Poincaré. Se recuerdan las definiciones base: Una propiedad se dice 'hereditaria' si siempre que pertenece a n pertenece a $n+1$. Un número se dice 'inductivo' si posee todas las propiedades hereditarias del cero. Esta última es impredicativa: en el definiens aparece la expresión 'todas las propiedades', pero la propiedad inductiva pertenece a la clase de todas las propiedades, luego el definiendum ya está incluido en el definiens, por lo que se define en términos de sí mismo. Tras dar un ejemplo concreto y recordar las soluciones propuestas para superar este tipo de definiciones, Carnap se detiene a observar el uso que se hace de la definición. Así, que el número '2' es inductivo vendría dado por

$$\forall \mathrm{f}((\mathrm{Her}(\mathrm{f}) \wedge \mathrm{f}(0) \Longrightarrow \mathrm{f}(2))$$

Hay un cuantificador universal y Carnap se pregunta: ¿Cómo se verifica una proposición universal? Es imposible hacerlo verificando cada una de las propiedades en particular. «Pero la verificación de una proposición universal lógica o matemática no consiste en un recorrido a través de una serie de casos individuales, porque usualmente las definiciones impredicativas se refieren a totalidades infinitas» *(1931,* 40). Supondría, además, confundir la generalidad 'numérica' que se refiere a objetos ya dados, con la generalidad 'específica' que se establece por derivación lógica de unas propiedades respecto a otras. En el ejemplo dado, Carnap observa que 'f(2)' puede ser derivado para una propiedad arbitraria 'f' de la expresión 'Her(f) $\wedge$ f(0)' por medio de operaciones lógicas por modo exclusivo: es trivial obtener 'f(0)' de dicha expresión, lo que prueba la inductividad de '0'. Como '$\mathrm{Her}(\mathrm{f}) \equiv \forall\, \mathrm{n}(\mathrm{f}(\mathrm{n}) \Longrightarrow \mathrm{f}(\mathrm{n}+1))$' entonces '$\mathrm{f}(0) \Longrightarrow \mathrm{f}(0+1)$' y de aquí 'f(1)', de donde '1' es inductivo. Reiterando el proceso se obtiene que '2' es inductivo. Aunque la definición de número inductivo es impredicativa, Carnap sostiene que es significativa, luego es útil y por ello no puede ser desterrada de la lógica y de la matemática. Naturalmente Carnap se da cuenta de que no ha hecho más que un caso particular, de aquí que concluya «Si rechaza-mos la creencia de que es necesario pasar a través de los casos particulares y se hace claro a nosotros mismos que la completa verificación de una proposición arbitraria no significa más que su validez lógica (más exactamente, tautológica) para una propiedad arbitraria, llegaremos a la conclusión de que las definiciones impredicativas son lógicamente admisibles» *(íd.,* 41). Ahora bien, creencia contra creencia, Carnap reconoce «Si una propiedad está definida impredicativamente, entonces, el establecimiento de si se obtiene o no en un caso individual, bajo ciertas circunstancias, puede ser difícil, o incluso imposible si no hay solución al problema de decisión para el sistema lógico. Pero en ningún caso la impredicatividad hace tales decisiones imposibles en principio para todos los casos. Si la teoría esbozada aquí es factible, el logicismo habrá superado su más grande dificultad» *(íd.)*.

Lo que está en juego en el intento justificador de Carnap es, realmente, la verificabilidad de una proposición universal. Tal verificación, como para Poincaré, ha de ser constructiva ya que «Yo creo que debemos seguir el dicho de Frege de que en matemáticas, sólo debe ser considerado como existente aquello cuya existencia ha sido demostrada (y él indicaba demostrada en un número finito de etapas)» *(Carnap, 1931,* 39). Así, pretende probar que un enunciado universal puede ser establecido en ciertos casos por un procedimiento finito sin necesidad de tener que realizar ni un solo caso de sustitución, rechazando así que las expresiones que contienen términos 'impredicativos' no sean decidibles. Ahora bien, el mismo Carnap lo reconoce: su solución sería perfectamente aceptable si la teoría de conjuntos fuera 'decidible'. El mismo año de su propuesta, Gödel demostraba lo contrario. Decir, entonces, que 'en ciertos casos' una definición es decidible sin más especificación no es resolver el problema. De ahí el abandono de esta postura por el mismo Carnap posteriormente y su acercamiento a enfoques no-constructivos, con radical aceptación, ya, de la impredicatividad y abandono de los consejos constructivos de su maestro Frege.

Cantorismo y logicismo faltos de fundamentación sólida

La credibilidad provocada por Zermelo en el carácter inofensivo de las definiciones impredicativas posee un marcado carácter pragmático. Es el mismo que fuerza a Carnap a indicar que, significativa, se muestra útil. Es el mismo que se ampara en haber sido empleada en otras ramas de la Matemática admitidas anteriormente. Es la postura que ha conducido a admitir que puede establecerse de manera lógica el Análisis moderno, incluyendo la Aritmética, a condición de admitir, junto a postulados de carácter lógico, postulados como son el del infinito, el de elección para ciertas zonas y, como señala Beth, ciertos axiomas referentes a la existencia de clases o conjuntos «que no pueden ser definidas más que por definiciones impredicativas; las definiciones de este género se caracterizan por el hecho de que hacen intervenir operaciones infinitas sobre un dominio de variación que contiene la entidad definida» *(1954,* 236). Lógica adoptada en sentido excesivamente amplio. Aceptar todo este conglomerado permite, indiscutiblemente, justificar tanto la definición como el razonamiento por recurrencia. Y ello en la línea marcada por Dedekind. Ahora bien, la justificación de los axiomas conjuntistas, impredicativos en general, no ha sido establecida de manera plausible, según he criticado. Es la clave y origen de las diversas teorías propuestas. Beth señala que cabrían tres modos de garantizar los axiomas conjuntistas. En primer lugar, admitir que las clases especiales son evidentes intuitivamente, lo que, sin embargo, entrañaría la pregunta de por qué requieren entonces definiciones impredicativas para tal evidencia. En segundo lugar, demostrar la consistencia ya indicada por Zermelo y exigida por Poincaré de los axiomas, a lo que Beth agrega «Poincaré ha indicado ya que tal demostración requeriría posiblemente una llamada al método del razonamiento (y de la definición) por recurrencia, y presentaría, por tanto, un círculo vicioso. Por otro lado, Gödel (1931) ha demostrado que una demostración de este tipo exige de todas maneras una llamada a suposiciones más fuertes incluso que las representadas en los axiomas» *(íd.,* 236). Finalmente, podría garantizarse reemplazando las definiciones impredicativas por predicativas. «Pero tras los resultados de las búsquedas recientes de Mostowski y de Hao Wang, que se ligan al teorema citado de Gödel, hay algunas definiciones impredicativas que no pueden ser reemplazadas por definiciones predicativas» *(íd.,* 237).

La conclusión que se puede obtener de las frases anteriores es, desde enfoque cercano al de Poincaré, su tesis de que ni el logicismo ni el cantorismo o teoría ingenua de conjuntos, «los únicos puestos en causa» por las paradojas, poseen en sí un fundamento sólido. Menos aún pueden ser una explicación final de los fundamentos de la Matemática en el sentido de que son ellos los que necesitan tal fundamentación. A pesar de que se mantenga la impredicatividad como inofensiva dentro de marcos adecuados. Que las antinomias descubiertas hasta 1908 no hayan aparecido en el interior de los sistemas no es razón enteramente coherente para aceptarlos. Y ello, si reconocido por Poincaré en 1909, será remachado por Hilbert en 1918, al señalar que no basta que no se presenten contradicciones conocidas, sino que hay que demostrar que las contradicciones no se pueden presentar. «No basta evitar las contradicciones que pueden presentarse, si se quiere devolver a las matemáticas por ellas comprometidas su reputación de ser el modelo de ciencia más rigurosa. Por su misma esencia, el método axiomático tiene exigencias mucho más extensas, debe demostrar en particular que en cada caso y sobre la base del sistema de axiomas establecidos, las contradicciones son *absolutamente imposibles* en el interior del dominio científico.»

La diversidad de lenguas

Ahora bien, la conclusión de falta de fundamento del logicismo y del cantorismo se apoyaba en Poincaré no ya en la aparición de las paradojas —reitero frente a versiones citadas— sino en la inversión metodológica que ambas tendencias representaban. Inversión que les conducía a admitir el infinito actual, en otras palabras, a admitir una ontología platónica. Eran lenguas diferentes que no se aprenden. Y para los realistas platónicos la impredicatividad no constituía problema alguno porque los elementos que intervenían en sus definiciones no eran 'construidos' sino descritos, por dados en su mundo eidético. Y, en este punto, Poincaré mostraba su radical agudez. Cuando Zermelo defiende la impredicatividad frente a Poincaré, acusará a éste de olvidar que «después de todo, un objeto no está creado a través de una tal 'determinación' [definición]; más bien, todo objeto puede ser determinado por una gran variedad de caminos, y esas determinaciones diferentes no son idénticas sino meramente nociones equivalentes, es decir, nociones que tienen la misma extensión. De hecho, la existencia de nociones equivalentes parece haber sido descuidada por Poincaré en su crítica» *(1908 a,* 191). No había descuido alguno en Poincaré. Había una ontología diferente. Es punto en el que incidirá Gödel al señalar «el mismo objeto puede ser descrito de formas diferentes» *(1944,* 220). Pero, para ello, Gödel ha de reconocer de manera explícita que «Las clases y los conceptos pueden ser, sin embargo, concebidos como objetos reales (...). Me parece que la suposición de tales objetos es tan legítima como la suposición de cuerpos físicos» *(ídem)*. De aquí su afirmación de que las definiciones impredicativas no son las causantes de las antinomias y sea necesario buscar otra solución para las mismas «según la cual la falacia no consiste en la suposición de ciertas auto-reflexividades de los términos primitivos sino en otras suposiciones acerca de los mismos. Tal solución puede ser hallada en el presente en la teoría simple de los tipos» *(íd.,* 222). Pero Gödel no acusa de olvido a matemáticos como Poincaré. Reconoce la importancia de la impredicatividad para los constructivistas o conceptualistas y nominalistas: «No es sorprendente que las paradojas tengan soluciones diferentes para interpretaciones diferentes de los términos que aparecen en ellas» *(íd.)*.

Naturalmente, en el platonismo caben matices. Radical, Russell escribiría «la Lógica y la matemática nos fuerzan, pues, a admitir una especie de realismo en el sentido escolástico, es decir, admitir que hay un mundo de universales y verdades que no llevan directamente sobre tal o cual existencia particular. Este mundo de los universales debe subsistir» *(1911,* 289-290). A su lado se situaría Ramsey para quien la totalidad de los individuales y de las propiedades existe en sí misma. En este enfoque la existencia de una multitud o la consideración de que puede enfocarse como elemento de otro sistema, carecen de enlace con la definición de los mismos. Las definiciones sólo tienen sentido por referirse a algo ya dado de antemano, a lo cual se limitan a describir. La impredicatividad es meramente un error verbal cometido por imprudencia. Basta prescribir algunas condiciones o reglas para evitar que las mismas conduzcan a antinomia o contradicción.

Sin embargo, el platonismo radical muestra límites, a pesar de lo atractivo que puede presentarse a algunos matemáticos en el sentido de que permite justificar la totalidad de la matemática a partir de la teoría de conjuntos siempre que no tenga en cuenta las dificultades que para ello debe superar. Dificultades señaladas por Bernays en 1935. Tras reconocer que sistemas como *PM* se apoyaban no sólo en un conjunto de axiomas y reglas de razonamiento sino en la existencia implícita de un mundo o dominio universal de individuales y un dominio de predicados, lo que se le mostraba como una suposición *ad hoc,* Bernays afirmaba: «Pero aun con tales suposiciones auxiliares, no se puede incorporar con éxito el total de la aritmética en el sistema de lógica. Porque, como este sistema está desarrollado según reglas fijadas, se debería ser capaz de obtener por medio de series de reglas fijas todos los teoremas de la aritmética. Pero éste no es el caso; como Gödel ha demostrado, la aritmética va más allá de todo formalismo dado. (De hecho, lo mismo es verdad de la teoría axiomática de conjuntos)» *(1935,* 283). Limitaciones de Gödel que han obligado a mitigar el platonismo radical sostenido en principio por los logicistas y han conducido a posiciones de nominalismo moderado que, aun admitiendo las construcciones platónicas, pretenden desterrar dicho platonismo suprimiendo la consideración de que una multitud pueda tomarse como unidad, es decir, como un posible valor de una variable ligada, lo que implica la atribución a la misma de un grado de sustancialidad platónica que el nominalista rechaza, al igual que el empleo de las definiciones impredicativas.

Frente a estas posturas, cabe admitir un lote inicial de conjuntos como dados de antemano —por ejemplo, los numerables—; lote que puede servir para dominio de variación de las variables ligadas que se pueden presentar en las definiciones impredicativas, con lo cual éstas podrán tener sentido determinado y permitirán la introducción de nuevos conjuntos. Es un enfoque constructivista en el que cabría incluir el mencionado intento de Lorenzen de superar la impredicatividad producida en el análisis al enfocar los problemas de cotas minimales. También a Poincaré, según se desprende de los ejemplos y del mecanismo con el que sortea la dificultad planteada por Zermelo del teorema fundamental del álgebra, así como su demostración, *1909 b,* del teorema de Cantor. En ellos admite la previa existencia de conjuntos, que pueden tomarse como dominio de variables ligadas, a condición de que los conjuntos estén perfectamente caracterizados, con fronteras precisas. Es posición ontológica que Poincaré calificaría de *pragmática* y que no debe confundirse con lo que Quine calificará de 'conceptualismo' [107], atribuyendo el mismo a los intuicionistas como Poincaré, Brouwer, Weyl y otros, aun cuando en ambos casos la Matemática será un producto del matemático

---

[107] «Acerca de lo que hay», 1948. En Quine, *1953,* cap. I.

y no algo a descubrir por el mismo. Es ontología que conlleva que el hacer matemático no pueda derivarse partiendo de la lógica pura o de la sola teoría de conjuntos, prefijada de una vez para siempre. La 'diversidad de lenguas' conduce a tratar de la posición o solución constructivista sostenida por Poincaré como única fundamentación acorde con la virtud creadora del hacer matemático.

§ 2. El constructivismo

La aparición de las primeras paradojas afectó básicamente a los terrenos calificables de filosóficos, representados principalmente por el logicismo. En los matemáticos la problemática básica se centraría en el empleo de unos u otros métodos de razonamiento. Manejando la teoría de conjuntos, aparecían procedimientos calificables de no clásicos, de carácter existencial, indirectos y no constructivos, en el sentido de no dar ley alguna que pudiera permitir alcanzar uno de los elementos de los conjuntos que se estaban manejando. El postulado de elección se mostraría como uno de los métodos de razonamiento más comprometidos. Postulado de elección puesto de relieve por Zermelo en 1904 al dar su primera demostración de que un conjunto puede ser bien ordenado. En terrenos finitos el postulado era claro: se convertía en teorema demostrable. Pero el mismo perdía ese carácter al enfrentarse el matemático con conjuntos infinitos. En ellos exigía la elección simultánea y actual de infinitos elementos. Obligaba, así, a la aceptación del infinito actual que matemáticos como Gauss consideraban como meras formas de hablar. Demasiado revolucionario —no en cuanto a postulado, sino en cuanto a método, realmente— concitó buen número de polémicas. De ellas desearía destacar aquí la suscitada entre algunos matemáticos franceses, representantes de lo que se ha venido calificando con los términos de 'escuela de París', fundadora del actual Análisis funcional conjuntista y cuya posición filosófica puede ser denominada de empirismo o semiintuicionismo.

'Cinco cartas' en torno a la teoría de conjuntos

Tras la demostración de Zermelo, Emilio Borel manifestará, de modo inmediato, que la misma no es constructiva. Hadamard replica aceptando «lo que es cierto, es que Zermelo no da medio alguno de ejecutar *efectivamente* la operación de la que habla, y que parece dudoso que nadie pueda, en lo futuro, indicar ese medio» *(1905,* 150). Pero, para Hadamard, hay que distinguir entre correspondencia definida y correspondencia descrita, siendo la primera la constructiva. Señala que Borel ha utilizado la descrita, como Zermelo y, lo que es más fundamental, considera que «la noción de correspondencia 'que puede ser descrita' está, para tomar tu expresión, 'fuera de las matemáticas'; pertenece al dominio de la psicología y es relativa a una propiedad de nuestro espíritu» *(íd.)*. Interviene en la polémica Baire señalando que «la expresión *conjunto dado* se emplea en cada instante: ¿tiene algún sentido? No siempre, me parece» *(íd.,* 151). Lo cual conduce a sostener que de la afirmación de que un conjunto esté dado es falso considerar a las partes de ese conjunto como dadas; con lo cual, para Baire, el único cardinal transfinito aceptable sería el numerable. Baire intenta precisar, «Para mí, el progreso, en este orden de ideas, consistiría en delimitar el dominio de lo que es definible» *(íd.,* 152). La carta de Baire es de diciembre de 1904. A petición de Borel interviene en el intercambio epistolar Lebesgue. Centra el problema: «¿Se puede demostrar la existencia de un ser matemático sin definirlo? Evidentemente es cuestión de convención: pero creo que no se puede construir sólidamente más que admitiendo que *no se demuestra la existencia de un ser más que definiéndolo*» *(íd.,* 153). Hadamard vuelve al punto de partida: el postulado de elección. «La cuestión principal, la de saber si el conjunto puede ser bien ordenado, no tiene evidentemente el mismo sentido para Baire (igual que para Lebesgue y para ti) que para mí. (...) Son dos concepciones de las matemáticas, dos mentalidades las que están en juego» (156). Palabra y subdivisión de los matemáticos expuestas precisamente por Poincaré en 1900 y retomadas, entre otras ocasiones, en *1912 a* como explicación de las ontologías diferentes. Hadamard agregará la condición que sus oponentes prescriben: «no se debe considerar, desde tu punto de vista, más que las definiciones expresables en un número finito de palabras» *(íd.,* 157). Es la prescripción mantenida, ciertamente, por la escuela de París, cuyo portavoz es Borel. Quien insistirá en la misma en 1908, tanto en el Congreso Internacional de Bolonia —donde llega a sostener la utilidad de la construcción cantoriana, pero como mera forma vacía de todo contenido preciso— como en su ensayo de *1908 b,* donde distinguirá dos tipos de numerabilidad, la general y la efectiva; esta última es la que se expresa mediante un número finito de palabras.

Los preceptos de Poincaré

Lo que interesa destacar, en esa polémica, es el tono personal y algo vago y opinable de unos y otros. También, que se han utilizado términos que Poincaré incorporará o habrá manejado. Precisamente ligado a la polémica anterior —la carta última de Hadamard es posterior a mayo de 1905— Poincaré termina por establecer una serie de reglas del trabajo matemático, reglas que cabría enfocar como medidas de prudencia del mismo. Son las formuladas en *1909 c.* Cabe observar que se presentan, ante las mismas, dos reacciones —habrá una tercera— de matiz contrapuesto. Por un lado, Borel haciendo la recensión de dicho ensayo, se referirá a las reglas de constructivismo enunciadas por Poincaré en términos de aceptación total: «La adaptación completa y real de estas proposiciones por los matemáticos ejercería, desde mi punto de vista, una de las más felices influencias sobre el desarrollo y porvenir de las matemáticas» *(1909,* 504). Frente a Borel, Winter señalará que los preceptos son autocontradictorios y que más bien deben tomarse como medidas de prudencia, ya que si se admiten, no habría posibilidad de elaborar matemática alguna. La posición de Winter será recogida por Brunschvicg en *Les étapes de la philosophie mathématique* al escribir: «Porque, entre las palabras en número finito, objeta con razón Winter, podrán encontrarse expresiones como *tan frecuentemente como se quiera, tan grande como se quiera,* o palabras tales como *siempre, indefinidamente, infinitamente;* ¿estamos seguros, en este caso, que la definición no implique, al menos en potencia, la infinidad de palabras que era necesario evitar?» (p. 532).

A la objeción de Winter, Borel responderá desde el plano del matemático pragmático. Plano que, ya he indicado, será mantenido igualmente por Zermelo cuando consideraba que cuestiones como 'analítico', 'sintético', eran filosóficas que no afectaban para nada al hacer matemático, y que el mismo Poincaré mantendrá en algún momento de su polémica con Russell al afirmar que la verdadera matemática, la de ayer y la de mañana, seguirá su marcha independientemente de las marejadas que ocurran a su alrededor, marejadas que afectan a los terrenos filosóficos. Borel será, en su respuesta, más explícito: «La forma dada por Winter a su objeción me parece característica de la interpretación de espíritu filosófico, oponiéndose a la interpretación de espíritu científico. No creo en efecto que ningún matemático se pregunte nunca, *mientras hace matemáticas,* si una definición en términos finitos implica o no una infinidad de palabras. No hay para él más que una distinción útil: algunas definiciones permiten conocer perfectamente el ser matemático del que se habla, calcular sobre él sin ambigüedad alguna o confusión posible, otras no lo permiten» *(1912,* 166). Así, Borel menciona el número π que posee infinidad de cifras aunque no sepamos su número total pero puede ser perfectamente definido mediante un número finito de palabras, y manejado sin ambigüedad. Lo importante es saber si la ley de esas operaciones puede ser dada por medio de un número finito de palabras, «de tal manera que esa ley pueda ser concebida igual por todos los matemáticos y el resultado esté por consiguiente definido de manera única sin ambigüedad posible» *(íd.,* 169-70). Borel señala que nadie ha podido usar jamás un número infinito de palabras y que, por ello, los idealistas más impenitentes están reducidos a operar lo mismo que los realistas más ingenuos, incluso cuando piensan que razonan sobre números inconmensurables transfinitos; si no los determinan mediante un número finito de palabras, no pueden hacer más que razonamientos que se aplican también a un número indeterminado, «es decir, a todos los números de una cierta clase; el realista puede pues interpretar su razonamiento como aplicándose, no a un número del que rechaza la definición, sino a la clase entera» *(íd.,* 170). Hay que observar estas últimas frases de Borel, porque Poincaré irá más allá, invirtiendo los términos de idealista y realista al dar la explicación profunda de la diferencia entre ambos por sus ontologías de base diferente, así como el rechazo de que se pueda manejar la definición, sin más precisiones, de la clase como totalidad, cuando se razona sobre un elemento de la misma enfocado como elemento paradigmático que es, en el fondo, lo que admite Borel.

El principio de constructividad

Ciertamente las reglas enunciadas por Poincaré han de verse como meras medidas de prudencia para un platónico o logicista. De mero valor heurístico. No ocurre lo mismo para quien se sitúa en el plano calificado de 'pragmático' por el matemático francés. Son las reglas centrales de lo que se puede calificar como *constructivismo.* Qué sea el constructivismo, sin embargo, queda sin delimitación precisa. Y ello sigue siendo válido en la actualidad. Como reconoce Thiel —que indica adoptar una postura constructivista respecto a la impredicatividad y, aunque parece ignorarlo, es la sostenida por Poincaré— «los no constructivistas han reprochado al concepto de constructividad el ser demasiado impreciso para una investigación crítica; mientras que, por otra parte, los constructivistas rehúsan constreñirse, a priori, al concepto claro, pero demasiado estrecho, de recursividad» *(1971,* 97). Precisando algo más, Mostowski pretende clarificar el panorama: «Tras el descubrimiento de las antinomias conjuntistas, varios matemáticos decidieron que la única solución radical del problema creado por esas antinomias es excluir todas las nociones generales conjuntistas de las matemáticas y limitarse al estudio de aquellos objetos que pueden ser efectivamente definidos o construidos» *(1966,* 99). Mostowski reconoce la existencia de otras corrientes que pueden caer bajo la misma denominación, no tan extremadas como la anterior, calificada de intuicionista: «su programa es limitar el dominio de objetos matemáticos admisibles a una clase elegida más o menos arbitrariamente sin modificación (como los intuicionistas) de las reglas clásicas de demostración. Como la clase de objetos admisibles no está unívocamente determinada no podemos hablar de una tendencia constructiva única; hay, por el contrario, muchos programas constructivos mutuamente conflictivos que difieren unos de otros en muchos detalles, algunos muy importantes, aunque sus tendencias generales sean semejantes» *(íd.)*.

Tendencias representadas, precisamente, en la tesis de Poincaré o *principio de constructividad.* Principio que, de manera amplia, esbozaría:

La única técnica admisible demostrativa de existencia es la construcción efectiva.

Es técnica de demostración directa y uno de los métodos de razonamiento que pueden ejemplificarla es el razonamiento por inducción completa. La demostración indirecta de existencia, es decir, la demostración de que la afirmación que contradice lo que se quiere probar lleva a contradicción, hace uso de la reducción al absurdo y, por ello, es meramente indicativa de la posibilidad de existencia, pero no garantiza a la misma. No por eso debe suprimirse este tipo de demostración que, en algunos casos, es el único factible, principalmente si el hacer matemático se enfrenta con definiciones de tipo implícito, definición mediante una serie de postulados, en los cuales la eliminación no es posible en general. A pesar de lo cual, como Mario Bunge reconoce «el intuicionista matemático tiene razón cuando insiste en que la prueba de existencia dice menos, es decir, nos suministra menos información, que la construcción efectiva por medio de la cual el objeto cuya existencia se ha determinado, es exhibido realmente» *(1962,* 60).

Si se acepta la construcción directa, entonces ésta sólo es posible con procedimientos finitos: es decir, mediante un número finito de signos y operaciones, por lo que las proposiciones que encierran totalidades infinitas impredicativas deben ser suprimidas, o al menos, muy claramente delimitadas. Ello supone el rechazo de aquellas demostraciones existenciales puras que sólo pueden elaborarse mediante pruebas indirectas o bien mediante postulados como los de elección, y, a la vez, implica la obligación de buscar otro tipo de demostración. Lo cual puede hacerse de dos maneras. Bien remodelando la misma para obtener una conclusión justificable desde un enfoque constructivista puro, bien imponiendo algunas condiciones al teorema general, y logrando así una demostración constructiva que, sin embargo, poseerá un alcance menos general que el del enunciado de partida. Poincaré adopta ambas posturas según los teoremas dados: Así, la segunda ante el teorema fundamental del álgebra de que toda ecuación de coeficientes racionales posee raíz en el dominio complejo; su demostración se apoya no solamente en aceptar que el coeficiente a_o es en valor absoluto mayor que cero, sino que tiene que aceptar que dicho coeficiente, en valor absoluto, ha de ser mayor que una fracción positiva explícitamente dada. Adopta el primer enfoque ante la demostración de la numerabilidad del continuo, rehaciendo la demostración de Cantor para hacer ver clara la conclusión que de esa demostración puede obtenerse desde una perspectiva constructivista: la de que no existe una aplicación biyectiva entre los números naturales y un segmento de recta. Lo cual no implica que el cardinal asociado a dicho segmento, el continuo, tenga que ser mayor que lo numerable. Para obtener esta conclusión Cantor ha de agregar una premisa implícita: el continuo se encuentra dado de manera actual, lo que no es tan evidente. Es punto en que observo coincidencia total con el pensamiento del matemático francés, como no podía ser de otra manera. Hao Wang, por ejemplo, indicará: «Del hecho de que ninguna enumeración pueda agotar todos los conjuntos de enteros positivos, Cantor deduce que el conjunto de todos los conjuntos de enteros positivos es absolutamente innumerable. A fin de justificar esta inferencia, debemos suponer que hay un conjunto que incluye todos los conjuntos de enteros positivos, o que hay una ley que define un conjunto que incluye todos los conjuntos de enteros positivos. La teoría de conjuntos constructiva rehúsa reconocer tal conjunto o tal ley. Mientras que el punto de vista constructivo acepta las totalidades de leyes relativas a diferentes estadios de construcción, rechaza una totalidad cerrada que excluye las posibilidades de construcción ulterior» *(1954,* 245).

Los dos enfoques posibles para superar las demostraciones de existencia pura se apoyan en la imposibilidad actualmente existente para transformar todo tipo de éstas en sus equivalentes constructivas, es decir, no puede utilizarse siempre el primer enfoque. Lo cual marca, en realidad, una limitación al constructivismo. Y ello porque, en el fondo, y como señalara Beth, los teoremas de existencia son teoremas de compacticidad para ciertos espacios topológicos, lo que puso de relieve Kelley al demostrar la equivalencia del postulado de elección con el teorema de Tychonoff respecto al producto cartesiano de espacios topológicos compactos, espacio producto que también es compacto. Pero ello muestra que, en tales teoremas, «es necesario en general acudir a métodos de carácter no constructivo. Ya en los casos más elementales, interviene el principio de tercero excluido; y frecuentemente no se puede evitar el recurso al axioma de elección» (Beth, *1956 a,* 35).

Tendencias constructivistas

Bajo el término constructivismo, como señalara Mostowski, se encierran muchas tendencias a veces contrapuestas entre sí. Prácticamente casi todas las formulaciones realizadas tras la aparición de las antinomias recurren, de una manera más o menos explícita, mas o menos auténtica, al constructivismo; incluso aquellos realistas platónicos que sostenían el logicismo primitivo a ultranza, tras las restricciones a sus excesos platónicos producidas por las limitaciones formalistas, como he señalado, han aceptado métodos que califican de constructivos. Lo cual constituye, realmente, una confirmación de la posición de Poincaré, de encontrarse en la línea más plausible en cuanto a la fundamentación del hacer matemático. De modo efectivo podrían incluirse bajo esta rúbrica, gracias a la vaguedad de la misma, tendencias tan dispares como las siguientes:

a) *Axiomática conjuntista.* En sus orígenes Zermelo indica que procede de manera constructiva: «El punto de vista aquí mantenido, el de que estamos tratando con una ciencia productiva que permanece en último extremo bajo la intuición, ha sido alegado recientemente, en oposición a la 'logística' de Peano, por Poincaré, en una serie de ensayos [1905 y 1906]; en ellos también hace justicia al principio de elección, que considera un axioma indemostrable pero indispensable» *(1908 a,* 190). Naturalmente, las divergencias entre ambas posiciones son bastante acentuadas, fundamentalmente en su versión primitiva. Hoy cabe aceptar, sin embargo, tal aproximación siempre que se suprima de la base conjuntista su platonismo, lo cual es factible en la línea de Poincaré, atendiendo al significado de las proposiciones —mediante las directivas de sistema formal— que se objetivan en el hacer matemático y no a la referencia objetual, inexistente, de las mismas.

Incluso sin esa supresión cabe englobar en este punto constructivista la postura mantenida por Gödel en 1940, al demostrar la consistencia de la hipótesis del continuo y ello a pesar de que, como reconoce Mostowski «Un espíritu matemático constructivo no puede comprender la demostración de Gödel, si es sincero, porque no acepta la noción de ordinal arbitrario. Puede interpretar únicamente esta demostración de una manera puramente formal; los ordinales serán entonces ciertos objetos descritos por los axiomas de la teoría» *(1966,* 81). Es la postura que habría aceptado, por ejemplo, Borel, enfocándola como «una especie de álgebra lógica cuyos símbolos no recubren realidad accesible alguna» *(1908 a,* 160). Sin embargo, la construcción gödeliana sigue las líneas prescritas, a partir de los ordinales como lote inicial, de la más pura constructividad, lo que el mismo Gödel reconocía al hablar de 'conjuntos construibles'. Mostowski ha de aceptar que «La familia de conjuntos definida por Gödel representa una realización de lo que es conocido como fundamento predicativo de las matemáticas» *(1966,* 81-2), fundamento introducido por Poincaré, añadirá. Es el proceso retomado por Lorenzen en 1952 al que ya me he referido y que, en esencia, consiste en la construcción inductiva de familias de conjuntos a partir de un nivel anterior, aunque el nivel de partida sea, precisamente, el de los ordinales. Procedimiento que tiene su antecedente, en Poincaré, en la demostración del teorema de Cantor de 1909 c.

b) *Métodos finitistas puros.* Representado en sus orígenes por la Aritmética recursiva de Skolem, los métodos a utilizar en esta tendencia son estrictamente finitos. No sólo limitan los tipos de objetos, sino también las clases de demostración admisibles, de tal manera que, en esta tendencia, no se manejan cuantificadores ni conectivos lógicos, sino meramente ecuaciones. Ha sido seguida, entre otros, por Goodstein. La clave de los razonamientos se centra en la recursividad. Aunque parecen presentar un interés casi marcadamente técnico, han provocado la aparición de un nuevo género matemático calificado de 'matemáticas finitas' que, de momento, están encontrando una serie de aplicaciones en otras disciplinas —como es el caso de los algoritmos de Markov— y no sólo en el interior de la matemática, que hace de esta tendencia finitista una de las técnicas más fecundas del actual hacer matemático. Signo importante por la progresiva esterilización a la que dicho hacer se ha visto abocado desde su formalización algebrizadora, válida para una sistematización y reorganización de lo ya construido ciertamente profunda.

c) *Formalismo hilbertiano.* Hilbert acepta un constructivismo finitista al estilo intuicionista, aunque únicamente requiere la intuición para la parte no formal del trabajo matemático, para la metamatemática, mientras que la parte formal o matemática pura se elabora por procedimientos estrictamente señalados. En la matemática sólo se aplica la inferencia inmediata, basada en el contenido perceptivo que procede en el pensamiento representando experimentos sobre objetos captados en una intuición; en otras palabras, lo que Hilbert calificaría de inferencia finitista consiste en una reflexión directa acerca de un contenido que procede sin presupuestos axiomáticos por medio de experimentos mentales sobre objetos imaginados en toda su concreción, haciendo uso también de la inducción completa, fundamentalmente para las demostraciones de consistencia, como admitiría, después de la crítica de Poincaré, de manera explícita. Principio de inducción completa cuyo carácter conclusivo y admisibilidad desde un punto de vista finitista son considerados como autoevidentes. La inducción completa como método demostrativo se escinde en dos formas: argumento por recursión sobre la construcción de una fórmula y argumento por recursión sobre la deducción de un teorema, con lo que se demuestra si una fórmula está construida a partir de las fórmulas atómicas primitivas y si la misma tiene o no cierta propiedad, respectivamente.

Junto a los métodos inductivos, el finitismo hilbertiano admite lo que se calificará de inferencia finitista, que será explicado con nitidez por Herbrand, aunque el matemático francés emplee el término 'intuicionista' por 'finitista': «Por un argumento intuicionista entendemos un argumento que satisface las condiciones siguientes: No se considera nunca más que un número definido de objetos y de funciones; están bien definidos permitiendo su definición calcular su valor de una manera unívoca; no se afirma jamás la existencia de un objeto sin dar el medio de construirlo; no se considera nunca el conjunto de todos los objetos de una colección infinita; y cuando se dice que un teorema es verdadero para todos los x, ello significa que para cada x en particular es posible repetir el razonamiento general en cuestión, que no debe ser considerado más que como el prototipo de esos razonamientos generales» *(1931,* 622).

La admisión de los métodos finitistas, puramente constructivos, en el interior del formalismo se debe al esfuerzo de Hilbert por escapar en la construcción de la matemática clásica y en la fundamentación de la misma de los conjuntos infinitos o de los conceptos relacionados con la infinitud. A pesar de que pretenda conservar el paraíso creado por Cantor, como dicho paraíso encierra la antinomia, Hilbert enfoca el infinito actual como una mera forma de hablar, aunque le atribuya el papel de una Idea de la Razón en el sentido kantiano, el de trascender toda experiencia al mismo tiempo que la completa de alguna manera. Es el papel de los puntos del infinito de la geometría proyectiva, por ejemplo. Pero ello obliga a sostener que los axiomas de los que ha de derivarse toda la matemática clásica y la lógica deben demostrarse consistentes mediante una argumentación de carácter finitista, constructivo. Como el sistema a construir a partir de los axiomas elegidos ha de encerrar proposiciones que se refieran a conjuntos infinitos, la consistencia es imposible de demostrar mediante el modelo, por lo que sólo cabe realizarla por procesos que se encuentren ellos mismos al abrigo de las antinomias. Y sólo se encuentran al abrigo de las antinomias los métodos finitistas, constructivos. De ahí su aceptación.

d) *Intuicionismo.* Es la corriente que se ha venido considerando como *la* constructiva por excelencia, aunque después de lo dicho se vea que no es la única. La influencia, en su génesis, de Poincaré, es total; sus diferencias, también. Es lo que intentaré poner de relieve en lo que sigue, sin detenerme en exposición detallada, que puede encontrarse, además de en Brouwer *1912,* en Heyting *1955* y *1956,* en Beth *1955, 1965,* por ejemplo.

Para Brouwer la matemática es una creación libre, independiente de la experiencia. Creación que se desarrolla a partir de una intuición primitiva, a priori, que calificaría de 'constancia en el cambio' o 'unidad en pluralidad' en 1907, mientras que en 1912 señalará: «en la medida en que uno de los elementos de la *twee-eenigheid* puede ser concebido como una nueva *twe-eenigheid,* proceso que puede repetirse indefinidamente» *(1912,* 69) se crean los restantes elementos numéricos. En el fondo, es la capacidad reiterativa infinita que basta para crear, paso a paso, de modo constructivo, los números naturales, en el lenguaje de Poincaré. La traducción del término holandés *twe-eenigheid* es difícil; cabe hacerlo en inglés por *two-oneness* o *two-ity;* en castellano el término duidad ha sido sugerido por Bunge *(1962,* 46).

En términos de Heyting la explicación de Brouwer es «En la base se encuentra primeramente el concepto de entidad, es decir de un objeto o de una sensación que consideramos como dada separadamente del resto del mundo. Inmediatamente podemos distinguir tal entidad de otra, y en fin podemos representarnos una repetición indefinida de este segundo proceso» *(1955,* 14). Son palabras más cercanas, si cabe, que las del propio Brouwer a las de Poincaré. Pero Brouwer insiste: «esta intuición básica de las matemáticas en la que lo conexo y lo separado, el continuo y lo discreto están unidos, da paso inmediatamente a la intuición del continuo lineal, es decir, del 'entre'» *(1912,* 69). En este último punto, Poincaré no se encuentra de acuerdo con Brouwer, dado que el continuo exige de la intuición sensible, geométrica, para comenzar la construcción tanto del continuo sensible o de primer orden, el racional como, finalmente, el real o auténtico continuo matemático. Lo he puesto de manifiesto indicando cómo para Poincaré el proceso de aritmetización del análisis supedita el resto de la matemática a dicha aritmetización, con supresión de la intuición, con sacrificio de la misma. De aquí que él mismo se autolimite a emplear términos analíticos y no geométricos en sus primeros trabajos, en beneficio del rigor expositivo exigido entre los contemporáneos, pero dejando claro que la base de sus ensayos tiene un origen intuitivo geométrico irreducible al analítico. De esta forma, Poincaré se alejaría de la artificiosidad constructiva del continuo intuicionista mediante las 'sucesiones de elección', cuya arbitrariedad queda limitada por la 'ley del despliegue', a la vez que indica que no todas las propiedades de los números reales pueden reducirse a las de los números naturales, hecho demostrado posteriormente por Tarski.

Con ello Poincaré estaba indicando, simultáneamente, que el lenguaje se le mostraba secundario en cuanto a la auténtica construcción de la matemática; secundario, pero no inesencial, dado que lo que el hombre construye es, precisamente, tal lenguaje en su hacer con el cual comunicarse con los demás mediante un instrumento objetivo y lo más perfecto posible, y, a la vez, tomado como base para sus ulteriores construcciones. Es punto de desacuerdo, igualmente, respecto a Brouwer, para quien el lenguaje es radicalmente secundario, dado que la construcción matemática es independiente del mismo, al igual que de la lógica y de la experiencia. El pensamiento de una construcción matemática o de una sucesión de tales entidades no tiene por qué encontrarse ligado a expresión lingüística alguna, lo mismo que los principios lógicos en la construcción carecen de aplicación ilimitada.

Punto último en el que Poincaré se encontraba de acuerdo, e incluso más, en la concepción de que la propia lógica no es más que una aplicación de la constructividad matemática, por lo que el matemático francés ya había señalado que las leyes lógicas no son eternas a priori, sino que cabría aceptarlas como principios reguladores en cuanto al trabajo con conjuntos finitos, pero que pueden mostrar fallos en relación con conjuntos infinitos. Son consideraciones que conducen a Brouwer a rechazar demostraciones apoyadas en el tercero excluido porque de lo que se trata al poner en evidencia una contradicción es, en realidad, de la afirmación de que una construcción matemática que debiera cumplir determinadas condiciones no es realizable. Igualmente Brouwer ataca las condiciones constructivistas impuestas por Poincaré —y es la tercera reacción a la que antes aludí— dado que «el intuicionista no necesita para garantías de la exactitud matemática la demostración de su no contradictoriedad, la posibilidad de definir sus conceptos por un número finito de palabras...» *(1912,* 70), haciendo llamada a nota, «Ver, sin embargo, Poincaré en *Scientia* número XXIV, p. 6», referencia a Poincaré *1912 a.*

A pesar de lo cual otros puntos hay de acuerdo, como en el que se fundamenta la virtud creadora, o la intuición de dicha virtud, dado que para Brouwer el hombre tiene una capacidad innata de su potencia que acompaña todas sus interacciones con la naturaleza; la capacidad, particularmente, de reconocer matemáticamente su vida, viendo en el mundo repeticiones de sucesiones, sistemas causales en el tiempo. En este reconocimiento, que posibilita la captación intuitiva de su duidad, se observa que el hombre maneja conjuntos finitos por lo que no cabe admitir más que el cardinal numerable y ello en el sentido de que la serie de los números naturales ha de considerarse como una multiplicidad abierta, haciéndose una idea de la misma a través, únicamente, de la captación de su ley de formación. Ley de formación que se extiende en el tiempo, cuya intuición es la originadora, realmente, de la Aritmética.

Lo que deseo destacar es que, si en las explicaciones de base Brouwer parece aceptar las tesis de Poincaré, inmediatamente hay unas divergencias en cuanto al desarrollo, divergencias profundas. Las mismas hacen pensar, precisamente, en que las ontologías de ambos constructivistas son diferentes. Es lo que se pone de manifiesto al encararse ambos autores con el principio de constructividad enunciado por Poincaré y rechazado por Brouwer, en la admisión en Poincaré de las demostraciones de consistencia para los objetos matemáticos siempre que los mismos vengan definidos mediante definiciones implícitas o axiomáticas y su rechazo por Brouwer. Para éste, a pesar de su cita a Poincaré, respecto a la diversidad de lenguas entre el intuicionismo y el formalismo con el que termina la disertación de 1912, existen universales, aunque producidos por la mente, por lo que la atribución de conceptualismo realizada por Quine parece correcta.

Poincaré

Atribución de conceptualismo a Poincaré francamente dudosa, por su constante apoyo en el lenguaje, y su requerida necesidad del principio de constructividad, principio que Heyting califica, con entera precisión, de 'principio de positividad', aunque pretenda remarcarlo enunciándolo en los términos: Todo enunciado matemático o lógico expresa el resultado de una construcción. Pero, como acertadamente señala Bunge, el principio «se trata, en realidad, de una prescripción *pragmatista,* aunque se le suele adjudicar un origen kantiano» *(1962,* 62). Si para el logicismo y para el intuicionismo no es necesario, para Poincaré sí lo es, al igual que para el finitismo formalista hilbertiano. Precisamente es el principio que resume, en realidad, su constante posición en cuanto a los fundamentos de la matemática, expresada en primer lugar para el principio de inducción completa, auténtico paradigma de lo que debe ser una proposición y, a la vez, un razonamiento matemático. Como proposición, porque muestra su carácter de construcción finita, sintética, fecundada por la intuición del número puro, número construible por la potencia que el hombre tiene de repetir un acto desde que el mismo se le muestra como posible. Como razonamiento porque engloba en sí, sintetiza una infinidad de verificaciones, con lo cual permite obtener otras proposiciones universales mediante un proceso constructivo, enunciado en número finito de palabras y constructivo o directo a la vez.

La virtud creadora del matemático se ha de mostrar, por ello, en el carácter constructivo de su hacer, mediante el cual realiza síntesis proposicionales, razonando mediante procesos en número finito de etapas, constructivamente. Sin olvidar que, en esa construcción, la experiencia juega un papel determinante, aunque Brouwer indicara que la relación de la matemática con las restantes disciplinas, con la experiencia, era asunto del antropólogo y no del matemático. Sin olvidar que, en esa construcción, no cabe aceptar normas rígidas establecidas de una vez para siempre, salvo cuando se trata de manejar conjuntos infinitos en cuyo caso las únicas medidas son las de prudencia y las del manejo de reglas igualmente constructivas.

Otro matiz hay en la formulación de Poincaré y que lo distancia de aquellos matemáticos a los que Quine calificará de conceptualistas, acercándolo a los nominalistas o formalistas hilbertianos, matiz que se pone de manifiesto, ya, en la aceptación por parte del matemático francés de las demostraciones de consistencia. Necesarias porque hay que tomar precauciones al aceptar ideas como la del espacio, base para la construcción del continuo. En cuya construcción hay que ir superando, paso a paso, aunque la educación haga olvidar este proceso genético, las sucesivas contradicciones que se presentan. Contradicciones que conducen a restringir los principios de totalidad y de analogía o permanencia de leyes formales. Bernays reconocería que tal condición restrictiva no es otra que la «consistencia de las consecuencias que son deducidas de las suposiciones fundamentales» *(1935,* 284).

El matiz estriba en que, para Poincaré, las construcciones matemáticas, obtenidas a partir de unos datos concretos —bien materiales, bien previas construcciones interiorizadas— son construcciones sígnicas. En ellas no se puede buscar correlato real alguno, y busca un objeto como lo correspondiente a un sustantivo. Es postura mantenida posteriormente por Wittgenstein, por ejemplo, por los nominalistas moderados a lo Quine: un sustantivo puede significar algo aun sin nombrar nada. En este sentido, el principio de constructivismo formulado por Poincaré cabría reformarlo, como señalara Bunge, en términos:

> El significado de una expresión es el conjunto de operaciones que nos permiten construirla o verificarla.

e implicaría la aceptación de una síntesis entre un cierto formalismo con el razonamiento intuitivo, que es una de las lecciones más fecundas que cabe obtener del pensamiento de Poincaré.

Otra lección, en el terreno del hacer matemático antropológico, es el reconocimiento de que su propia postura es una más en cuanto a la fundamentación de la matemática; y ello porque las soluciones que se pretendan a dicha fundamentación son propuestas por el hombre y hay diversidad de hombres, al menos dos tipologías, que crearán ontologías antagónicas y polemizarán en defensa de ellas. Polémicas comparables a 'una guerra entre hormigueros rivales'.

BIBLIOGRAFIA

ABEL, N. H.

1881: *Oeuvres.* Ed. Sylow-Lie. Christiania, 2 vols.

ALBERGAMO, Francesco

1950: *La critica della scienza nel novecento.* La Nuova Italia, Firenze, 2.ª ed; la 1.ª de 1941.

ARQUÍMEDES

El método. Trad. de Cora Ratto de Sadosky sobre versión de Heath, *The works of Archimedes.* Dover, N. Y. Intr. y notas de José Babini, Eudeba, B. A., 1966.

AYER, A. J.

1935: *Language, Truth and Logic.* Víctor Gollancz, Londres, 2.ª edición, 1958. Trad. de Ricardo Resta, *Lenguaje, verdad y lógica.* Eudeba, B. A., 1965.

1956 (y otros): *The Revolution in Philosophy.* Macmillan, Londres. Traducción de Montserrat Macao, *La revolución en filosofía.* Editorial Revista de Occidente, M., 1958.

1959 (editor): *Logical positivism.* The Free Press, USA. Existe trad. española en FCE, Méx., 1965.

BAIRE, R.

Ver BOREL, E., 1905.

BALLUE, E.

1894: «Le nombre entier considéré comme fondement de l'Analyse mathématique». *RMM* 2, pp. 317-328.

BARINAGA, José

1937: *Miscelánea matemática.* Junta Ampliación Estudios. M.

BARKER, S.

1964: *Philosophy of mathematics.* Prentice-Hall. Trad. de Carlos Moreno, *Filosofía de las Matemáticas.* Uteha, Méx., 1965.

BELL, E. T.

1937: *Men of mathematics.* Simon-Schuster, N. Y. Trad. de Felipe Jiménez de Asúa, *Los grandes matemáticos.* Losada, B. A., 1948.

1940: *The Development of Mathematics.* McGraw-Hill. Trad. de la 2.ª ed. de 1945 de R. Ortiz, *Historia de las matemáticas.* FCE, México, 1949.

BELLIVIER, André

1956: *Henri Poincaré ou la vocation souveraine.* Gallimard, NRF. P.

BENACERRAF—PUTNAM

1964 (editores): *Philosophy of Mathematics. Selected Readings.* B. Blackwell, Oxford.

BERNAYS, P.

1934: «Sur le platonisme dans les mathématiques». *L'Enseignement* *mathématique* 34 (1935), pp. 52-69. Trad. inglesa en Benacerraf—Putnam, 1964, pp. 274-286.

BERTHELOT, René

1911: *Un romantisme utilitaires. Etude sur le mouvement pragmatiste.* Vol. I. *Le pragmatisme chez Niestszche et chez Poincaré.* F. Alcan, P.

BETH, E. W.

1954: «Poincaré et la Philosophie». Conferencia en La Haya con motivo del centenario del nacimiento. En *Livre du centenaire,* páginas 232-238.

1955: *Les fondements logiques des mathématiques.* 2.ª ed. rev., Gauthier-Villars, P.

1956: *L'existence en Mathématiques.* Gauthier-Villars, P. Conferencias pronunciadas en La Sorbona, 1954.

1956 a: «La lógica formal y el pensamiento natural», en *Psicología, lógica y comunicación.* Ed. Nueva Visión, B. A., 1959, pp. 133-36. Comunicación original en *Et. d'epist. gén.*, I, bajo el título «Epistémologie génetique et recherche phychologique». PUF, P.

1962: *Formal methods.* Reidel-Dordrecht. Synthese Library.

1962 a: «Tableaux déductifs pour la logique de l'implication», en *Et. d'épist. gén.*, XVI, pp. 99-101, PUF, P.

1965: *Mathematical thought.* Synthese Library. Reidel-Dordrecht.

BETH, E. W.—PIAGET, J.

1961: *Epistémologie mathématique et psychologie,* en *Et. d'épist. gén.*, XIV. PUF, P. (Existe trad. española.)

BLANCHE, R.

1955: *L'Axiomatique.* PUF, P.

BOCHENSKI, I. M.

1956: *Formale Logik.* Verlag, Friburgo-Munich. Trad. de Millán Bravo, *Historia de la lógica formal.* Ed. Gredos, M., 1967.

1957: *Los métodos actuales del pensamiento.* Trad. de Drudis Baldrich de *Die zeitgenossischen Denkmethoden.* Ed. Rialp, M.

BOREL, Emilio

1899: «A propos de l'"infini nouveaux"». *Rev. Ph.* En BOREL, 1950, páginas 135-142.

1900: «L'antinomie du transfinie». *Rev. Ph.* En BOREL, 1950, páginas 142-146.

1905: «Cinq lettres sur la théorie des ensembles». *Bull. de la Soc. Mathématique de France, 33.* Pp. 261-273. En BOREL, 1950, páginas 150-159. (Hadamard a Borel, Baire a Hadamard, Lebesgue a Borel, Hadamard a Borel, Borel a Hadamard.)

1908 a: «Sur les principes de la théorie des ensembles». IV Congreso Internacional de Matemáticos, de Roma. En BOREL, 1950, páginas 159-161.

1908 b: «Les 'Paradoxes' de la théorie des ensembles». *Annales de l'École Normales.* Oct. En BOREL, 1950, pp. 161-165.

1909: Recensión a POINCARÉ, 1909 c., en *Revue du Mois, 8,* p. 504.

1912: «La Philosophie mathématique et l'infini». *Revue du Mois.* Agosto. En BOREL, 1950, pp. 165-172.

1950: *Leçons sur la théorie des fonctions.* Gauthier-Villars, P., 4.ª edición.

BOURBAKI, Nicolás
1948: «L'architecture des mathématiques». En *Le Lionnais.* Páginas 35-47.
1960: *Éléments de mathématique. Théorie des ensembles.* Hermann, París, 2.ª ed.
1969: *Éléments d'histoire des mathématiques.* Hermann, P., 2.ª edición rev, la 1.ª es de 1960. Existe trad. española en Alianza Editorial, M., 1972.

BOUTROUX, Pierre
1913: «La obra filosófica de Henri Poincaré». En *Enrique Poincaré. Su vida y su obra.* Ed. Iberoamericana, B. A., s. a., con trabajos de Appel, Masson, Volterra, Nagel. El ensayo de Boutroux se publicó en *Revue du Mois,* 10 Fbro., pp. 181 ss. Se reprodujo en *H. Poincaré: l'oeuvre scient., l'oeuvre philosophique.* Alcan, P., 1913.

BRAITHWAITE, R. B.
1959: *Scientific explanation.* Cambridge Univ. Press. Trad. de Víctor Sánchez de Zavala, *La explicación científica.* Ed. Tecnos, Madrid, 1965.

BROGLIE, Luis de
1952: «Henri Poincaré y las teorías de la física». Pp. 43-61, en *Sabios y descubrimientos.* Espasa Calpe, B. A. Trad. de Cortés Pla de *Savants et Découvertes.*

BROUWER, L. E. J.
1912: «Intuitionism and formalism». Disertación inaugural Universidad Amsterdam, 14-X-1912. Trad. inglesa en Benacerraf—Putnam, 1964, pp. 66-77.
1927: «Intuitionistic reflections on formalism». Trad. inglesa en Van Heijenoort, 1971, pp. 490-492.

BRUNSCHVICG, Léon
1913: «Henri Poincaré: Le philosophe». *RMM.* Set., suplemento al número 5, 21, dedicado a Poincaré, pp. 585-616. Recogido en *Écrits philosophiques.* III, pp. 153-182, PUF, 1958.

BUHL, A.
1912: «Les univers non euclidiens et l'infini». Nota II a la 2.ª edición en separata de la Rev. *Scientia,* del ensayo de H. Laurent *Sur les principes fondamentaux de la Théorie des nombres et de la Géometrie.* Gauthier-Villars, P.; la 1.ª ed. en *Scientia* del ensayo de Laurent es de 1902.

BUNGE, Mario
1962: *Intuition and Science.* Prentice-Hall, New Jersey. Trad. de Emilio O. Colombo, revisada por el autor, *Intuición y ciencia.* Eudeba, B. A., 1965.

BURALI-FORTI, Cesare
1896: «Le classi finite». *Atti dell'Academia di Torino 32,* pp. 34-52.
1897: «Une questione sui numeri transfinite». *Rendiconti del Circolo mat. di Palermo, 11,* pp. 154-164. Trad. inglesa en van Heijenoort, 1971, pp. 104-111.

CARNAP, Rudolf
1931: «The logicist foundations of mathematics». Trad. inglesa en Benacerraf—Putnam, 1964, pp. 31-41. Apareció en *Erkenntnis*, pp. 91-121.
CARROL, Lewis
1972: *El juego de la lógica y otros escritos*. Selección, pról. y trad. de Alfredo Deaño. Alianza Ed., M. Incluye «Lo que la tortuga le dijo a Aquiles», pp. 153-158.
CARTAN, Henri
1943: «Sur le fondement logique des Mathématiques». *Rév. Scientifique*, pp. 3-11.
CAVAILLES, Jean
1938: «Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles», en 2.ª ed. en 1962, pp. 23-176.
1962: *Philosophie mathématique*. Prefacio de Raymond Aron, *Intr.* de Roger Martin. Hermann P. Contiene tanto la correspondencia Cantor-Dedekind como el ensayo «Transfini et continu», obra póstuma escrita hacia 1940-1, además de la anterior.
COHEN, Morris R.
1931: *Reason and nature*. Trad. española de Eduardo Loedel, *Razón y naturaleza*. Ed. Paidós, B. A., 1956.
COHEN, M. R.—NAGEL, E.
1934: *An Introduction to Logic and Scientific Method*. Trad. de Néstor Míguez, *Introducción a la lógica y al método científico*. Ed. Amorrortu, B. A., 2 vols., 1968.
COMBÈS, Michel
1971: *Fondements des mathématiques*. PUF, P.
COUTURAT, L.
1905 a: *Les Principes des Mathématiques*. Artos. en *RMM*, 1904; 19-50; 211-240, 664-698, 810-844; 1905: 224-256. Apéndice: «La Philosophie des Mathématiques de Kant», en *RMM*, 1904, páginas 321-383.
1905 b: «Les définitions Mathématiques». *L'Enseignement Mathématique* 7, pp. 27-40.
CURRY, Haskel B.
1963: *Foundations of mathematical logic*. McGraw-Hill.
CHEVALLEY, Cl.
1935: «Variations du Style mathématique». *RMM*, pp. 375-384.
CHURCH, Alonzo
1956: *Introduction to Mathematical Logic*. Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey.
DANTZIG, Tobías van
1971: *El número, lenguaje de la ciencia*. 2.ª ed. española con agregados de M. Balanzat de la 4.ª ed. inglesa de 1954. La 1.ª edición de *Number: The Language of Science* es de 1930. Editorial Hobbs-Sudamericana, B. A.
DARBOUX, Gaston
1914: «Eloge historique d'Henri Poincaré». *Mémoires de l'Académie des Sciences*. Gauthier-Villars, XXXI-CXLVIII. En *Poincaré: Oeuvres II*, 1916, pp. VII-LXXI.

DAVAL, R.—GUILBAUD, G. T.
1945: *Le raissonement Mathématique.* P.
DEDEKIND, Richard
1888: *Was sind und was sollen die Zahlen?* Brunswick, 2.ª ed., 1893; 3.ª ed., 1911. Trad. inglesa en Dover, N. Y.
1890: Carta a Keferstein de 27 febrero. Trad. inglesa van Heijenoort, 98-103.
DESCARTES
Regulae ad directionem ingenii. Trad. francesa de J. Brunschvicg en *Oeuvres philosophiques I,* Garnier, P., 1963.
DIEUDONNE, Jean
1959: «Pour une conception nouvelle de l'enseignement des mathématiques». En *Mathématiques Nouvelles.* OCDE, 1961, pp. 31-47.
1968: *Calcul infinitesimal.* Hermann, P.
DOU, Alberto
1970: *Fundamentos de la matemática.* Labor, B.
ENRIQUES, Federico
1947: *Problemas de la lógica.* Trad. de Luis Scheinkestel. Espasa-Calpe, B. A.
1948: *Para la historia de la lógica.* Trad. de Juan L. de Angelis. Espasa-Calpe, B. A.
FRAENKEL, Abraham
1922: «Der Begriff 'definit' und die Unabhängiqkeit des Auswahlsaxioms». *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften,* pp. 253-257. Trad. inglesa en van Heijenoort, 1971, pp. 284-289.
FREGE, Gottlob
1879: *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens.* Halle. Trad. inglesa en van Heijenoort, 1971, pp. 1-82. (En preparación, trad. española de M. Garrido y J. Sanmartín, Tecnos, M.)
1884: *Die Grundlagen der Arithmetik.* Breslau. Trad. de Ulises Moulines, *Fundamentos de la Aritmética. Investigación lógico-matemática sobre el concepto de número.* Ed. Laia, B., 1972. Contiene pról. de J. Mosterín, pp. 5-12, y el ensayo de Claude Imbert, *Estudio de los Fundamentos de la Aritmética de Frege,* pp. 129-238, editado originalmente en Ed. du Seuil, 1969.
1893-1903: *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet.* Jena. Reimpreso, 1962, en Olms, Hildesheim. Prólogo e introducción del vol. 1, en Frege, 1971.
1971: *Estudios sobre semántica.* Trad. de Ulises Moulines, con introducción de J. Mosterín. Ed. Ariel, B. (Antología publicada en 1962 por Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, con el título *Funktion, Begriff, Bedeuntung, Fünf logische Studien,* edit. por Günther Patzig, con 2.ª ed., 1965.)
FREUDENTHAL, Hans
1954: «Poincaré et les fonctions automorphes». Conferencia en La Haya conmemorativa del centenario del nacimiento. En *Livre du centenaire,* pp. 212-219.
1958: *Logique mathématique appliqué.* Gauthier-Villars, P.

1967: *Mathematik und Wissenschaft im täglichen Leben.* Trad. de Luis Rute, *Las matemáticas en la vida cotidiana.* Ed. Guadarrama, M.

FREY, G.

1972: *La matematización de nuestro universo.* G. del Toro, M. Traducción de José Barrio de *Die Mathematisierung unserer welt,* Verlag-Stuttgart.

GALOIS, E.

1962: *Oeuvres mathématiques d'.* Edición preparada por Azra-Bourgue. Gauthier-Villars, P. Prefacio de J. Dieudonné.

GALLEGO DÍAZ, José

1954: «Enrique Poincaré». *ABC,* 29 abril.

GARCÍA BACCA, Juan David

1961: *Textos clásicos para la historia de las ciencias.* Univ. Central de Venezuela, Caracas. El vol. 2 es de 1968.

GARRIDO, Manuel

1971: «El teorema de Gödel y la filosofía». Simposio de Lógica en Valencia, abril 1969. *La filosofía científica actual en Alemania,* pp. 43-53. Ed. Tecnos, M.

GENTZEN, Gerhard

1934-5: «Untersuchungen über das logische Schliessen». *Mathematische Zeitschrift 39,* pp. 176-210, 405-431. Trad. francesa de J. Ladrière con notas de R. Feys y Ladrière, *Recherches sur la déduction logique,* PUF, P., 1955.

GOBLOT, E.

1908: «La démonstration mathématique. Critique de la théorie de M. H. Poincaré». *L'Année psychologique,* pp. 264-283.

1910: «Sur l'induction mathématique». *Rev. Ph.,* 71, pp. 63-71.

GÖDEL, Kurt

1931: «On formally undacidable propositions of Principia Mathematica and related systems». Trad. inglesa en van Heijenoort, 1971, pp. 596-616.

1940: *The consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum-hypothesis with the axioms of Set theory.* Princeton Univ. Press. 7.ª impr. 1966 con correcciones y notas sucesivamente agregadas.

1944: «Russell's Mathematical Logic». En *The Philosophy of B. Russell,* Schilpp, N. Y., pp. 125-53. En Benacerraf—Putnam, 1964, pp. 211-232.

1964: «What is Cantor's Continuum problem?» En Benacerraf—Putnam, 1964, pp. 258-273. Es la 2.ª ed. revisada y ampliada del ensayo del mismo título de 1947 en *American Mathematical Monthly 54,* 515-25.

GODEMENT, Roger

1963: *Cours d'Algebre.* Trad. de Mario Meléndez, *Algebra.* Ed. Tecnos, M., 1967.

GOLIVINA, L. I.—YAGLOM, I. M.

1961: *La inducción en geometría.* Trad. de la versión inglesa *Induction in geometry,* de 1963, The University of Chicago, por

J. H. Pérez Castellanos. Ed. Limusa-Wiley, 1972. La 2.ª ed. original rusa es de 1961.

Gortari, Eli de

1964: «Introducción» a *Henri Poincaré: Filosofía de la Ciencia.* Antología seleccionada de Gortari. UNAM, Méx., pp. VII-XXIII. Reproducido bajo el título «La filosofía científica de H. Poincaré» en *Ensayos filosóficos sobre la ciencia moderna.* Ed. Grijalbo, Méx., 1969, pp. 97-114.

Greco, P.

1960: «Recherches sur quelques formes d'inferences arithmétiques et sur la comprehension de l'iteration numerique chez l'enfant». En *Ét. d'épist. génetique XI,* pp. 149-213, PUF, P.

Grize, J. B.

1960: «Du groupement au nombre». En *Ét. d'épist. gén. XI,* páginas 69-96, PUF, P.

1962: «Remarques sur las limitations des formalismes». En *Ét. d'épist. gén. XVI,* pp. 103-127.

Grize, J. B.—Matalon

1962: «Introduction a une étude experimentale et formelle des raissonnement naturel». En *Ét. d'épist. gén. XVI,* pp. 9-67. PUF, P.

Guilbaud, G. T.

Ver Daval-Guilbaud.

Hadamard, Jacques

1905: En Borel, 1905.

1913: «Henri Poincaré: Le mathématicien». *RMM 21,* 5, Suplemento dedicado a la figura de Poincaré, pp. 617-658. Reproducido en *H. Poincaré: l'Oeuvre scientifique, l'oeuvre philosophique,* Alcan.

1921: «L'oeuvre mathématique de Poincaré». *Acta mathematica 38,* pp. 203-287. En *Poincaré Oeuvres,* t. XI, pp. 152-242.

1944: *Psychology of invention in the mathematical field.* Princeton Univ. Pres. N. Y. Trad. de Santaló Sors, *Psicología de la invención en el campo matemático.* Espasa-Calpe, B. A., 1947.

Hahn, Hans

1933 a: «Die Krise der Anschaung». «La crisis de la intuición», en Newmann, 1956-5, pp. 342-362.

1933 b: *Logik, Mathematik und Naturerkennen.* Viena, Gerold. Traducción inglesa de A. Pap en Ayer, 1959 (ed.), pp. 147-161, salvo las dos últimas secciones.

1933 c: «El infinito». En Newmann, 1956-4, pp. 384-401.

Hausman, Bernard

1960: *From an Ivory Tower.* Trad. de J. E. Bolzan, *Problemas filosóficos de la matemática moderna.* Ed. Columba, B. A., 1968.

van Heijenoort, Jean

1971 (editor): *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931.* Cambridge, Mass., Harvard Univ. Press. La 1.ª ed., de 1967.

Hempel, Carl G.

1945 a: «Geometry and Empirical Science». *American Math. Monthly 52,* pp. 7-17. Trad. en Newman, 1956-5, pp. 23-34.

1945 b: «On the nature of mathematical truth». *American Math. Monthly 52,* pp. 543-56. Trad. en Newmann, 1956-5, pp. 7-22. En Benacerraf—Putnam, 1964, pp. 366-381.

HERBRAND, Jacques

1931: «Sur la non-contradiction de l'arithmétique». *Journal für die reine und ang. Mathematik 166,* pp. 1-8. Trad. inglesa en van Heijenoort, 1971, pp. 618-628.

HEYTING, A.

1955: *Les fondements des mathématiques. Intuitionisme. Théorie de la démonstration.* Gauthier-Villars, P. Es la 2.ª ed. ampliada de 1934: *Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus. Beweistheorie.*

1966: *Intuitionism. An Introduction.* Nort-Holland, Amsterdam. La 1.ª ed. es de 1956.

HILBERT, David

1904: «Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik». Comunicación al Congreso Intnal. de Mats. de Heidelberg. Reimpreso en Hilbert, 1930, Apéndice VII, pp. 250-263.

1917: «Axiomatischen Denken». *Mathematische Annalen 78* (1918), 405-415.

1922: «Neubegründung der Mathematik (Erste Mitteilung)». *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 1,* pp. 157-177.

1925: Über das Unendliche, *Math. Annalen 95,* pp. 161-190. En forma abreviada y con enmiendas como Apéndice VIII de Hilbert, 1930, pp. 264-287. Trad. inglesa parcial en Benacerraf—Putnam, 1964, pp. 134-151; completa, en van Heijenoort, 1971, pp. 367-392.

1927: Die Grundlagen der Mathematik. Confer. al Seminario de Hamburgo, reimpreso en Hilbert, 1930, Apéndice IX, pp. 288-309, con algunas modificaciones. Trad. al inglés completa en van Heijenoort, 1971, pp. 464-479.

1928: Probleme der Grundlegung der Mathematik. Congr. Intnal. de Mats. de Bolonia. Reimpreso en Hilbert, 1930, Apéndice X, pp. 310-319.

1930: *Grundlagen der Geometrie.* 7.ª ed. Trad. de Francisco Cebrián, *Fundamentos de la Geometría,* C. S. I. C., M., 1953.

JIMÉNEZ RUEDA, Cecilio

1889: *Prolegómenos de Aritmética universal.* M.

JOLIVET, Régis

1960: *Tratado de filosofía.* T. I. *Lógica y cosmología.* Trad. de Leandro de Sesma. Ed. Carlos Lohlé, B. A.

KAC, M.—ULAM, S. M.

1968: *Mathematics and Logic. Retrospect and Prospects.* Trad. de Néstor Míguez, *Matemáticas y Lógica.* Monte Avila Ed., Caracas, 1969.

KANT, M.

1781: *Kritik der reinen Vernunft* (A-1781, B-1789). Trad. de José del Perojo de 1883, *Crítica de la razón pura.* Reimpresión, 1938, Ed. Losada, B. A., con prefacio de Francisco Romero. La 4.ª edición de 1961, cotejada con texto original por Ansgar Klein. El vol. I contiene «Vida de Kant e Historia de los orígenes de la Filosofía crítica», de Kuno Fischer.

KLEENE, Stephen C.
1967: *Mathematical Logic.* Wiley and Sons, N. Y. Trad. francesa de Jean Largeault, *Logique mathématique.* Armand Colin, 1971, P.

KLEIN, Félix
1908: *Matemática elemental desde un punto de vista superior.* Traducción de Roberto Araújo en *Biblioteca Matem.* 2. vols., M., 1927.

KNEALE, W. C.
1952: *Probability and induction.* Oxford and Clarendom Press. Reimpr. de la 1.ª ed. de 1949.
1956: «Gottlob Frege y la lógica matemática». En Ayer (y otros), 1956, pp. 33-49.

KNEALE, W. C. y Martha
1961: *The Development of Logic.* Clarendon Press Oxford. Trad. de Javier Muguerza, *El desarrollo de la Lógica.* Ed. Tecnos, M., 1972. Incorpora correcciones de las ediciones inglesas de 1964, 1966 y 1968.

KNEEBONE, G. T.
1963: *Mathematical logic and the foundations of mathematics.* Van Nostrand, Londres.

KOTARBINSKI, Tadeusz
1964: *Leçons sur l'histoire de la logique.* Intr. de René Poirier. Traducción del polaco, de 1957, por Anna Posner. PUF, P.

KREISEL, G.; KRIVINE, J. L.
1967: *Éléments de logique mathématique.* Dunod, P.

LACHELAS
1894: «Note sur la nature du raisonnement mathématique». *RMM*, pp. 709-718.

LACHELIER, Jules
1876: Études sur le syllogisme. *Rev. Ph.* Con el título «Las consecuencias inmediatas y el silogismo», en 1907, en Lachelier, 1928, pp. 165-186.
1906: Études sur le syllogisme. *RMM,* marzo. Con el título «La proposición y el silogismo», editado en 1907. En Lachelier, 1928, pp. 187-244.
1907: *Études sur le syllogisme.* P.
1928: *Del Fundamento de la inducción y Estudios sobre el silogismo.* Trad. y Nota preliminar de Joaquín Xirau, Ed. Reus, M.

LADRIÈRE, Jean
1957: *Les limitations internes des formalismes.* Ed. Nauwelaerts, Lovaina. Trad. de José Blasco, *Limitaciones internas de los formalismos.* Ed. Tecnos, M., 1969.

LEBESGUE
Ver BOREL, 1905.

LEIBNIZ
1715: *Nouveaux essais sur l'entendement humain.*

Le Lionnais, F.

1948 (editor): *Les grands courants de la pensée mathématique.* Cahiers du Sud. Existe trad. en Eudeba, B. A.

Livre (Le) du Centenaire de la naissance de Henri Poincaré: 1854-1954. Gauthier-Villars, 1955. También en *Poincaré Oeuvres* unido al XI.

Lorenzen, Paul

1952: Die Rolle der Logik in der Grundlagenkrisis der analysis. En *Applications Scientifiques de la Logique mathématique.* Actas del 2.º Congr. Intnal. de Lógica mat. París, 1952, pp. 65-74. Gauthier-Villars, P., 1954.

Lorenzo, Javier de

1966: «Niels Henrik Abel». Rev. *Tercer Programa 1,* pp. 77-118.

1967: Platón y la matemática. Rev. *Tercer Programa 7,* pp. 7-46.

1971: *Introducción al estilo matemático.* Tecnos, M.

1972: *Iniciación a la teoría intuitiva de conjuntos.* Tecnos. M.

Luquet, G. H.

1910 a: L'induction en mathematique. *Rev. Ph. 70,* pp. 262-269.

1910 b: Mathématique et sciences concrétes. *Rev. Ph. 71,* pp. 408-414.

Mach, E.

1905: *Erkenntnis und Irrtum.* Trad. de Cortés Pla, *Conocimiento y error.* Espasa-Calpe, B. A., 1948.

Martín, Roger

1962: Systemes formels et preoccupations génetiques. En *Ét. d'épist. gén.,* XVI, pp. 129-150, PUF, P.

1964: *Logique contemporaine et formalisation.* PUF, P.

Matalon

Ver Grize-Matalon, 1962.

Menne, Albert

1966: *Einführung in die Logik.* Verlag-Bern. Trad. de Leopoldo Eulogio Palacios, *Introducción a la lógica.* Gredos, M, 1969.

Milhaud, G.

1897: Le raissonement géométrique et le syllogisme. *Rev. Ph.,* páginas 364-389. En Milhaud, 1898, como Cap. IV, pp. 108-144.

1898: *Le rationnel.* P.

1903: Le Science et l'Hypothèse, par M. H. Poincaré. *RMM. 11,* páginas 773-791.

von Mises, R.

1939: *Kleines Lehrbuch des Positivismus.* Trad. inglesa de 1951: *Positivism: A Study in Human Understanding.* Cambridge, Harvard Univ. Press. Selección en Newmann, 1956-5, pp. 112-142.

Mooij, J. J. A.

1966: *La Philosophie des mathématiques de Henri Poincaré.* Gauthier-Villars.

Mostowski, Andrzej

1952: *Sentences undecidables in Formalized Arithmetic.* North-Holland, Amsterdam. 3.ª impresión, 1964.

1966: *Thirty years of foundational studies.* Oxford Blackwell. Acta Philosophica Fennica XVII.

MUÑOZ, Vicente
1962: *Lógica matemática y lógica filosófica.* Ed. Rev. Estudios, M.

NAGEL, Ernest
— La obra de Poincaré en geometría. *Osiris.* En *Enrique Poincaré: Su vida y su obra.* Ed. Iberoamericana, B. A., s. a.
— Ver Cohen-Nagel.

von NEUMANN, Johan
1931: The formalist foundations of Mathematics. Simposio publicado en *Erkenntnis,* pp. 91-121. Trad. inglesa en Benacerraf—Putnam, 1964, pp. 50-54.

NEWMAN, James R.
1956 (editor): *The World of mathematics.* Trad. dirigida por Manuel Sacristán, *Sigma, el mundo de las matemáticas,* 6 vols. Ed. Grijalbo, B. 1968, vols. 1-3; 1969, vols. 4-6.

PAP, Arthur
1955: *Analytische erkenntnistheorie.* Springer-Verlag de Viena. Traducción de Francisco Gracia, *Teoría analítica del conocimiento.* Tecnos, M., 1964.
1958: *Semantics and Necessary Truth.* Yale Univ. Press. Trad. de C. N. Molina Flores, *Semántica y verdad necesaria.* FCE, Méx., 1970.

PAPERT, Seymour
1960 a: Sur le reductionnisme logique. En *Ét. d'épist. gén. XI,* páginas 97-116.
1960 b: Problèmes epistemologiques de la recurrence. En *Ét. d'épist. gén. XI,* pp. 117-148. PUF, P.

PASCAL, Blas
1658: «De l'esprit géométrique et de l'art de persuader». En Pascal, 1963, pp. 348-359.
1670: *Pensées.* En Pascal, 1963, según ed. Lafuma, pp. 493-649.
1963: *Oeuvres completes.* Ed. Seuil, P.

PASCH, Moritz
1882: *Vorlesungen über neuere Geometrie.* Trad. de 1913 de Alvarez Ude y Rey Pastor, *Lecciones de Geometría moderna.* Ed. Junta para Ampliación de Estudios, M. Edición anotada por los traductores, contiene prólogo especial de Pasch, así como notas y adiciones a la mayoría de los parágrafos realizados por Pasch.

PEANO, G.
1889: *Arithmetices principia, nova methodo exposita.* Turín. Traducción inglesa parcial en van Heijenoort, 1971, pp. 83-97.
1906: Super Theorema de Cantor-Bernstein. *Revista di Matemática 8* (1902-1906), pp. 136-143.

PIAGET, J.
1950: *Introduction a l'épistémologie génétique.* Vol. I. *La pensée mathématique.* PUF, P.
1960: Problèmes de la construction des nombres. En *Ét. d'épist. gén. XI,* pp. 1-68.
1972: *Essai de logique opératoire.* 2.ª ed., revisada por J. B. Grize del *Traité de logique* de 1949. Dunod, P.

Ver Beth-Piaget, 1961.

PICARD, Emilio

1913: *L'oeuvre de H. Poincaré.* Gauthier-Villars. Separata de *Annales de l'École Normale Supérieur.* P., 3.ª serie, vol. 30.

PIERI, Mario

1906: Sur la compatibilité des Axiomes de l'Arithmétique. *RMM 14,* pp. 196-207.

PLATÓN

Menón. Ed. bilingüe. Trad. de Antonio Ruiz de Elvira. Inst. Est. Políticos, M., 1958.

La República. Ed. bilingüe. Trad., notas y estudio preliminar de J. M. Pabón y M. Fernández Galiano. 3 vols. Inst. Est. Pols., M., 1949.

POINCARÉ

1881: Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires. *Mathem. Annalen 19,* pp. 553-564. En *Oeuvres II,* pp. 92-105.

1882: Théorie des groupes fuchsiens. *Acta math. 1,* pp. 1-62. En *Oeuvres II,* 108-168.

1887: Sur les hypothèses fondamentales de la Géométrie. *Bull. de la Soc. math. de France 15,* 2 noviembre, pp. 203-216. En *Oeuvres XI,* pp. 79-91.

1891: Les géométries non-euclidiennes. *Rev. gén. des Sciences pures et appliquées 2.* 15 diciembre, pp. 769-774. En *CH,* cap. III, algo modificado.

1892: Lettre à M. Mouret sur les géométries non-euclidiennes. *Rev. gén. des Sciences pures et appliquées 3,* 74-75. Algo modificado en *CH,* pp. 34-5 y 83-87.

1893: Le continu mathématique. *RMM 1,* pp. 26-34. Algo modificado en *CH,* cap. II.

1894: Sur la nature du Raissonnement mathématique. *RMM 2,* 371-384. Algo modificado en *CH,* cap. I.

1895: L'espace et la Géométrie. *RMM 3,* 631-646. Algo modificado en *CH,* cap. IV.

1897 a: *Réponse à quelques critiques. RMM 4,* 59-70.

1897 b: Sur les Rapports de l'analyse pure et de la physique mathématique. *Acta math. 21,* 331-341. En forma algo modificada en *VC,* cap. V.

1899: La notation différentielle et l'enseignement. *L'Enseignement math. 1,* pp. 106-110. En *Oeuvres XI,* pp. 125-128.

1900: Du rôle de l'intuition et de la logique en mathématiques. *Compte rendu* del 2.º Congr. Intnal. de Mats., pp. 115-130. Algo modificado en *VC,* cap. I.

1902: *La Science et l'Hypothèse.* Bibliothèque de Ph. Scient. Flammarion, P. Cito por ed. 1907. Trads. múltiples castellano. En circulación actual en Espasa-Calpe, B. A.

1902: Les fondements de la géométrie. Compte rendu de Hilbert 1899 (1930). *Bull. des Sciences math.,* 26, pp. 249-272. En *DP,* páginas 161-185, y *Oeuvres XI,* pp. 92-113. Rectification 1903, *íd. 27,* p. 115. En *DP,* pero no en *Oeuvres.*

1903: L'espace et ses trois dimensions. *RMM 11*, pp. 281-301 y 407-429. Algo modificado en *VC*, caps. III y IV.
1904 a: Les definitions générales en mathématiques. *L'Enseignement mathématique* 6, pp. 257-283. Algo modificado en *CM* II, cap. II.
1904 b: L'avenir de la Physique mathématique. En *VC*, cap. IX.
1905: *La Valeur de la Science.* Bibl. de Ph. Sc., Flammarion, P. Cito por ed. 1948. Numerosas trads. En circulación actual Espasa-Calpe, B. A.
1905: Les mathématiques et la logique. *RMM 13*, pp. 815-835, y *RMM 14*, pp. 17-34. En *CM*, II, caps. III y IV, abreviados y modificados.
1906 a: Les mathématiques et la logique. *RMM 14*, pp. 294-317. En *CM*, II, cap. V, abreviado y modificado.
1906 b: À propos de la logistique. *RMM 14*, pp. 866-868.
1907 a: Le Hasard. *Rev. du Mois 3*, pp. 257-276. *CM*, I, cap. IV.
1907 b: La relativité de l'Espace. *L'Anné psychologique 13*. En *CM*, II, capítulo I.
1908: *Science et méthode.* Bibl. de Ph. Sc., Flammarion, P. Cito por traducción de García Miranda y L. Alonso, Espasa-Calpe, B. A., 4.ª ed., plagada de errores, y no de imprenta, en algunos capítulos.
1908 a: L'Invention mathématique. *L'Enseign. math. 10*, pp. 357-371. En *CM*, I, cap. III.
1908 b: L'Avenir des mathématiques. *Rev. gén. Sc. pures et apl. 19*, páginas 930-39. Algo modificado en *CM*, I, cap. II.
1909 a: Réflexions sur deux notes de M. A. S. Schönflies et de M. E. Zermelo. *Acta math. 32*, pp. 195-200, 2 fbro. En *Oeuvres XI*, páginas 114-119.
1909 b: Über transfinite Zahlen, 27 abril. En *Sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik und mathematische Physik.* Leipzig-Berlín, 1910, pp. 43-48. En *Oeuvres* XI, páginas 120-124.
1909 c: La logique de l'Infini. *RMM 17*, pp. 461-482, julio. En *DP*, páginas 7-31.
1910: La Morale et la Science. Conferencia en *Foit et Vie,* 17 marzo En *DP*, pp. 32-47.
1911: L'Évolution des Lois. Conferencia del 8 de abril en 4.º Congreso Internacional de Filosofía de Bolonia. Publicado en *Scientia 9*, IV, pp. 275-292. En *DP*, pp. 48-67.
1912 a: La logique de l'infinie. Conferencia en la Univ. de Londres, 3 de mayo. *Scientia 12*, pp. 1-11. En *DP*, pp. 84-96.
1912 b: Pourquoi l'espace a trois dimensions. *RMM 20*, pp. 483-504. En *DP*, pp. 133-157.
1913: *Dernières pensées.* Bibl. de Ph. Sc., Flammarion, P. La edición de 1963 reproduce los textos originales sin modificación, agregando tres ensayos más, ordenados cronológicamente. Numerosas trads. En circulación, Espasa-Calpe, B. A., trad. de Besio y Banfi, que prologan y anotan; sin orden y con algunos errores, tanto cronológicos como de sentido.
1916-1956: *Oeuvres.* 11 vols., Gauthier-Villars, P.

POIRIER, René
1954: Henri Poincaré et le problème de la valeur de la Science. Conferencia de 22 mayo en Univ. Nancy. En *Rev. Ph.*, pp. 485-513. En *Livre du Centenaire*, pp. 176-202.

POLYA, George
1954: *Mathematics and Plausible reasoning.* Princeton Univ. Press, 2 vols. Trad. en 1 vol. de José Luis Abellán, *Matemáticas y razonamiento plausible.* Tecnos, M., 1966.

PUTNAM, Hilary
1967: La tesis de que las matemáticas son lógica. En *Homenaje a Bertrand Russell*, pp. 385-428, recopilación de Ralph Schoenman, Allen-Unwin con el título *Bertrand Russell, Philosopher of the century.* Trad. de Ulises Moulines, Ed. Oikos-Tau, B., 1968.
Ver Benacerraf—Putnam, 1964.

QUINE, W. H.
1937: New Foundations for Mathematical Logic. *Amer. Math. Monthly 44*, pp. 70-80. En QUINE 1953, cap. V: «Nueva fundamentación de la Lógica matemática», pp. 125-151, con modificaciones y añadidos.
1953: *From a Logical Point of View.* Cambridge, Mass., Harvard Univ. Press. Trad. de Manuel Sacristán, *Desde un punto de vista lógico.* Ariel, B., 1963.

RADEMACHER, H.—TOEPLITZ, O.
1930: *Von Zahlen und Figuren.* Trad. de la ed. inglesa ampliada de 1956: *The Enjoyment of Mathematics,* por E. Rodríguez y M. Gregori, *Números y figuras.* Alianza Ed., M., 1970.

REY, Abel
Lógica. Trad. de Julián Besteiro. Ed. La Lectura, M., s. a.

REY PASTOR, J.
1951: *La matemática superior.* Ed. Iberoamericana. Refundición de la obra de 1916, que recogía ciclo de conferencias en Ateneo de Madrid.
1954: Jerarquías entre lenguajes y delincuentes. *ABC,* 30 de marzo.

RICHARD, Jules
1905: Les principes des mathématiques et le problème des ensembles. *Rev. gén. Sc. pures et appliquées 16,* p. 541. Trad. inglesa en van Heijenoort, 1971, pp. 142-44.

ROUGIER, Louis
1920: *La philosophie géométrique de Henri Poincaré.* Alcan, P.

RUSSELL, Bertrand
1901: Recent Works on the Principles of Mathematics. *The International Monthly 4,* pp. 83-101. Con el título «Mathematics and the Metaphysicians», en cap. V de *Misticismo y lógica,* 1953. En NEWMANN 1956-4, pp. 368-381.
1903: *The principles of mathematics.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2.ª ed., Norton, N. Y., s. a. Trad. de Juan Carlos Grimberg, *Los principios de la matemática.* Espasa-Calpe, B. A., 1948.
1905 a: La Ciencia y la Hipótesis, recensión en *Mind 14,* pp. 412-418, a Poincaré 1902 en su trad. inglesa. Reproducido con alguna modificación en RUSSELL 1966, pp. 97-109.

1905 b. On some difficulties in the theory of transfinite number and order types. *Proc. of the London Math. Soc. 4* (1906), pp. 29-53.
1905 c: Sur la relation des mathématiques à la logique. *RMM 13,* páginas 906-917.
1906: Les paradoxes de la logique. *RMM 14,* pp. 627-650.
1908: Mathematical logic as based on the theory of types. *American Journal of Math.* Reproducido en RUSSELL 1956, pp. 75-114.
1910: La théorie des types logiques. *RMM 18,* pp. 263-301.
1911: L'importance philosophique de la logistique. *RMM 19,* páginas 281-291.
1918: The Philosophy of Logical Atomis. Reproducido en RUSSELL 1956, pp. 249-484.
1919: *An Introduction to Mathematical Philosophy.* Trad. de José Fuentes en *Obras escogidas.* Aguilar, M., 1962, 2.ª ed., pp. 52-354.
1923: Vagueness. *The Australasian Journal of Psychology and Ph. 1,* páginas 84 ss. En *Antología semántica.* Recapitulación de Mario Bunge, pp. 14-24, con el título «Vaguedad», Ed. Nueva Visión, B. A., 1960.
1956: *Logic and Knowledge. Essays 1901-1950.* Allen-Unwin, Londres. Traducción de Javier Muguerza, *Ensayos sobre Lógica y Conocimiento (1901-1950).* Taurus, M., 1966.
1966: *Philosophycal Essays.* Allen-Unwin, Londres. Trad. de J. R. Capella, *Ensayos filosóficos.* Alianza Ed., M., 1972, 3.ª impre.

RUSSELL—WHITEHEAD, A. N.
1910: *Principia Mathematica.* Cambridge Univ. Press, Cambridge. El volumen 2, de 1912; el vol. 3, de 1913; 2.ª ed., 1925 el vol. 1; 1927, volúmenes 2 y 3.

SÁNCHEZ MAZAS, Miguel
1953 a: Notas sobre la Combinatoria de Leibniz. *Theoria 5-6,* pp. 133-145.
1953 b: Breve esquema de las principales ideas lógicas de Leibniz. *Theoria 5-6,* pp. 167-168.

SELVAGGI, Felipe
1953: *Filosofia delle Scienze.* Trad. de Alvarez de Linera, *Filosofía de las Ciencias.* Ed. Soc. de Educación Atenas, M., 1955.

SKOLEM, Thoralf
1922: Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre. *Mathematiskerkongressen i Helsingfonrs den 4-7 Juli.* Traducción inglesa en van Heijenoort 1971, pp. 290-301.

SOMINSKII, I. S.
1959: *El método de la inducción matemática.* Trad. de la versión inglesa *The method of mathematical induction,* 1963, The Univ. of Chicago, por J. H. Pérez Castellanos, en Ed. Limusa-Wiley, México, 1972. La 5.ª ed. rusa es de 1959.

TANNERY, J.
1928: Mathématiques pures. En *De la méthode dans les sciences.* 1.ª serie, pp. 31-73, Alcan, P.
1946: La filosofía de Enrique Poincaré. En *Ciencia y Filosofía,* pp. 65-9. Espasa-Calpe, B. A. Trad. J. L. de Angelis. Es Antología realizada por Emilio Borel.

TARSKI, Alfred

1931: The concept of Truth in formalized Languages. Comunicado en esta fecha a Soc. Cient. de Varsovia. Publicado en versión alemana en 1936. Es el cap. VIII, pp. 152-278, de TARSKI, 1956.

1941: *Introducción a la lógica y a la metodología de las ciencias deductivas.* Trad. de Rodríguez Bachiller y Fuentes de la 1.ª ed. inglesa, en Espasa-Calpe, B. A., 1951. La 1.ª ed. polaca es de 1937.

1956: *Logic, Semantics, Metamathematics.* Oxford Univ. Press. Trad. de J. H. Woodger.

THIEL, Christian

1971: La historia del problema de la impredicatividad y su solución constructiva. Simposio de Lógica, en Valencia, abril, 1969, *La Filosofía científica actual en Alemania.* Tecnos, M., pp. 87-99.

1972: *Sentido y referencia en la lógica de Gottlob Frege.* Trad. de José Sanmartín, Tecnos, M. *(Sinn und Bedeutung in der Logik Gottlob Frege.* Tesis. Verlag Anton Hain.)

TOEPLITZ, Otto

Ver Rademacher-Toeplitz 1930

TORANZOS, F. I.

1949: *Introducción a la epistemología y fundamentación de la matemática.* Espasa-Calpe, B. A., 2.ª ed. La 1.ª ed. es de 1943. Prólogo y epílogo de Rey Pastor.

ULAM, S. M.

Ver Kac-Ulam 1968.

VIRIEUX-REYMOND, A.

1962: *La logique formelle.* PUF, P.

WANG, Hao

1954: The formalization of Mathematics. *Journal of Symbolic Logic,* páginas 241-266.

1967: Russell y su lógica. *Teorema 4,* 1971, pp. 31-76. Correcciones, *Teorema 8,* 1972, pp. 91-98. Original en *Ratio 7,* pp. 1-34.

WEINBERG, J. R.

1936: *An examination of Logical Positivism.* Trad. de Fernández de Castillejo, *Examen del positivismo lógico.* Aguilar, M., 1959.

WEYL, H.

1927: Diskussionsbemerkungen zu dem zweiten Hilbertschen Vortrag über die Gründlagen der Mathematik. Trad. inglesa en van Heijenoort 1971, pp. 480-484.

1940: The mathematical way of Thinking. *Science 92,* pp. 437-446. En NEWMANN 1956-5, pp. 220-237.

1949: *Philosophy of Mathematics and Natural Science.* Princeton Univ. Press. Trad. de Carlos Imaz, UNAM, Méx., 1965, *Filosofía de las Matemáticas y de la ciencia natural.*

WINTER, M.

1908: Note sur l'intuition en mathématique. *RMM,* 921-5.

YAGLOM, I. M.

Ver Golivina-Yaglom 1961.

Zermelo, Ernst

1908 a: Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung. *Mathematische Annalen 65,* pp. 107-128. Trad. inglesa en van Heijenoort 1971, pp. 183-198.

1908 b: Untersuchungen über dir Grundlagen der Mengeblehre I. *Id.,* páginas 261-281. Trad. inglesa en van Heijenoort 1971, pp. 199-215.

1909: Sur les ensembles finis et le principe de l'induction complète. *Acta Mathematica 32,* pp. 185-193.

INDICE DE NOMBRES

LOS objetivos de este trabajo son: a) Exposición sistemática del pensamiento de Poincaré respecto a la fundamentación del hacer matemático (Parte 1); b) Exposición histórico-crítica tanto de a) como de las distintas líneas que se han producido en el tema de Fundamentos, desde fines del siglo XIX en que cristaliza como problemática con entidad propia, a través de la obra de Dedekind, Frege, Russell, Hilbert, Brouwer... (Parte 2).

Entre los temas que Poincaré aporta cabe resaltar: problema de la impredicatividad; distinción entre plano lógico e intuitivo o matemática formal y material; necesidad de las demostraciones formales de consistencia para el plano lógico si se suprime el proceso constructivo; necesidad del principio de inducción completa como reflejo de la virtud creadora del razonar matemático cuya esencia es la reiteración de una acción desde que la misma es posible; especificidad de dicha forma de razonamiento; enlace «número natural-demostración sintáctica»; necesidad de una síntesis dialéctica entre sistema formal y razonamiento intuitivo...

De la posición de Poincaré y del examen histórico-crítico paralelo se obtiene, como tesis de esta obra, la necesidad de compatibilizar un cierto razonamiento intuitivo con el manejo de sistemas formales que constituyen la plasmación objetivadora de tal razonamiento. Tesis que conlleva la consideración de que el hacer matemático es un hacer antropológico, no «teológico», que se manifiesta en un discurso significativo, aunque carente de referencial.