Javier de Lorenzo

EL METODO AXIOMATICO Y SUS CREENCIAS

EDITORIAL TECNOS

SERIE DE FILOSOFIA Y ENSAYO

Dirigida por Manuel GARRIDO

Abellán, José Luis: *Mi[.llll'i de Unamww a la fu : de la psico/o¡.:ia.*
Abellán, José Luis: *Ortt'¡.:a y Gasset l'n la [i/os1J{ía espt11io/a.*
Alston. W. P.; Edwards. P.: Malcolm, N.; Nelson. J. O., y Prior, A.: *Los orÍ\|/l'lles de la jiloSIJ/ia analítica. Moore. Ruue/1, Wi11[.1l'IWI'ill.*
Couturat. Louis: *El álf!ebra de la ló[.lica.*
Díaz. Elías: *Revisiá11 de Unamuno.* Análisis crítico de su pensamiento político.
Dopp. Joseph: *Nociones de ló[.lü·a formal.*
Edelman. B.: *La prtktica ideolágica del Derecho.*
Enjuto Berna!. Jorge: *La :fiiosojia de Alfred North Whitehead.*
Fann, K. T.: *El nmcepto de Filosofía en Will[.lenstein.*
Fernández de Castillejo. José Luis: *Actualidad y parricipaciá n.*
Ferrater Mora. J.. y otros: *Filosofía* v *ciencia en t'l pensamiento espwiol contemporán eo (1960-1970¡.*
García Suárez. A.: *La lií[.lim de la experie11cia.*
Garrido, M.: *Lágica simbólica.*
Gurméndez, Carlos: *Ser para no ser.* Ensayo de una dialéctica subjetiva.
Hasenjager. G.. y otros: *La .filo.wfía cie11tíjica acrual en Alema11ia.*
Hierro. José S.-P.: *Problemas de a11álisis del lell}lllaje moral.*
Hintikka. J.: *Ló}lica. jue}lm de lell[.llwje e illfo mwciiÍII.* Temas kantianos de filosofía de la lógica.
Hintikka, J.: *Sabt'r y creer.* Una introducción a la lógica de las dos nociones.
Hughes. John B.: *José Cadalso y las «Cartas Marrt11'ca.1·•.*
Kuhn. T. S.: *Se[.ltl!ldo, penwmil'ntos sobre paradi[.lmas.*
Lakatos, lmre: *Historia de la Cit'llcitt v sus r<'('OIIstruccio!les mcimwle L*
Lindsay. P. H.. y Norman, D. A.: *Pru·esamiemo de l1!fó rmaciá11 Httllltlltu.* Una introducción a la Psicología (3 vols.). Vol. 1: Percepción *y* reconocimiento de formas; Vol. 11: Memoria y lenguaje. Vol. 111: Aprendizaje. conocimiento y decisión.
Lorenzen. Paul: *Metammemática.*
Lorenzo. J. de: *La .filo.wfía de la matemática de Jules Henri Poincan:.*
Lorenzo. J. de: *lntroducción al estilo mateflltÍtico.*
Martín Santos. Luis, y otros: *Ensayos de fi/os1{ía de la ciencia.* Simposio de Burgos. En torno a la obra de Karl R. Popper.
Mates. Benson: *Ló[.lica matemática l'iememal.*
Mouloud. Noel: *Lell}l llt(ie y estructuras.*
Nicol, Eduardo: *El problema tle la jilo.wfía hispti11im.*
Nicol. Eduardo: *Historicismo ,. exil·tencittlimw.*
París. Carlos: *Hombre v 11atu;ale:a.*
Popper. Karl R.: *Búsqitetla sin térmi11o.* Una autobiografía intelectual.
Prior. A. N.: *Historia de la ló}lica.*
Quine. W. Y.: *La relatividad ontoló}lica y otros t'nsayos.*
Quintanilla, Miguel A.: *Idealismo .. fi/os¡fia de la cit'llcia.* Introducción a la Epistemología de Karl R. Popper.
Rama, Carlos M.: *Teoría de la historia.* Introducción a los estudios históricos (3• ed.).
Rescher, Nicholas: *La prinwcía de la práctica.*
Rodríguez Paniagua, Jose M : *Hacia u11a co/lcepción amplia del Derecho 1111tural.*
Rodríguez Paniagua. José M': *Marx y el pmblema de la ideolo¡:ítt.*
Sotelo, Ignacio: *Sartr<' y la razón dialéctica.*
Tierno Galván, Enrique: *Ra:ún mectínim y ra ú11 tlialéctica.*
Yeldman, D. J.: *Pro}lrtmwción de computadore.1 <'11 ciencias de la co!lduua.*

JAVIER DE LORENZO

EL METODO AXIOMATICO y sus CREENCIAS

EDITORIAL TECNOS
MADRID

EDITORIAL TECNOS, S.A.
O'Donnell, 27. Madrid-9
ISBN 84-309-0844-7
Depósito Legal: M. 25.033- 1980

Prinled in Spain. Impreso en España por Gráficas Lormo. e/ Isabel Méndez. 15. Madrid. J9fM},

INDICE

PREFACIO

I. Cuando en 1637 publica *El Discurso del Método,* Descartes canaliza una elección, ya sin retorno, en el pensamiento occidental. Elección que asume como criterio de racionalidad el análisis mecanicista de los fenómenos. Expresa una actitud que se quiere contrapuesta, de modo radical, con el principio de concordancia, base de la actitud mítico simbólica que todavia f!n los entornos de 1637 mostraba un predominio aparente. Predominio manifestado en la multitud de publicaciones metódicas como la que cinco años antes, 1632, recoge las deliberaciones de los miembros de una de las muchas pequeñas academias privadas de París, *De la méthode*, en la que se discuten los métodos de los cabalistas, los de Ramón Lull, los de la filosofía ordinaria..., y que mantienen la correspondencia esencial micro-macrocosmos. En la elección que va a canalizar Descartes, es el método del análisis, de la disección de los fenómenos, la clave que posibilita, por un lado, la justificación de los experimentos de la mecánica y, por otro, la elaboración teórica de la Mecánica experimental, la que aparentemente realizaba Galileo o Pascal, con sus «experimentos» referidos a la caída de graves, al vacío, a la hidráulica... Método que en el enfoque teórico se va a plasmar en el llamado «principio de corte de Euler», enfoque fundamental de toda la mecánica y que se centra en aislar el sistema material, de modo imaginario, y pensar que, sobre la frontera, actúan fuerzas unas interiores, otras exteriores, que hay que determinar matemáticamente. En la experimentación se acota previamente el sistema material a estudiar, se separan las variables 'que no influyen', se eligen las que sr influyen... y se continúa analizando el sistema. Se admite, implícitamente, la localización del mismo en un espacio y tiempo, y se admiten muchas más cosas, que no se explicitan. Pero lo que me interesa destacar es la elección básica: analizar, diseccionar; tanto en el razonamiento como en el experimento. Con esta elección, la estructura, el sistema del que ese fenómeno o ese razonamiento forman parte, queda eliminado como si fuera propio del enfoque

globalizador. orgánico de los místicos contra los que se alza la racionalidad cartesiana, que se pretende estrictamente mecanicista y sin creación de hipótesis ·ocultas· como las acciones a distancia o en vacíos inexistentes, aunque tengan que crearse hipótesis especiales para la explicación de cada uno de los fenómenos a considerar. Método cartesiano contra método mítico-simbólico.

Desde esta elección reafirmada por el positivismo y mecanicismo posteriores, las teorías científicas van a enfocarse como agrupaciones proposicionales que se visten, organizativamente, con un ropaje hipotético-deductivo. Organización no intrínseca porque la disciplina vendrá dada, realmente, por el contenido de lo que en ella se trabaja y no por su estructura, en el sentido de que las causas o suposiciones que se toman como punto de partida quedan probadas por los efectos, que son ciertos según la experiencia, mientras que las cadenas deductivas que conducen de e as causas a los efectos sirven más que para probarlos para explicarlos. Incluso llegan a manifestarse dos tendencias expositivas según el predominio de la componente racional organizativa o de la componente experimental.

La actitud analizadora se verá reforzada por las justificaciones en teoría del conocimiento como la dada por la teoría del reflejo que, en sus tres fases, impone partir de los datos desnudos, de los «hechos positivoS>> para alcanzar la abstracción conceptual sobre los mismos y, finalmente, poder realizar la praxis conveniente plasmada en la transformación correspondiente de la naturaleza. Sin embargo, esta misma teoría vulgarizada, y el desarrollo de la Lógica formal conducen a una cierta inflexión en cuanto a la ciencia: la separación entre el científico y el filósofo. El científico se cree objetivo en el hacer científico, alejado de cÜalquiei' tipo de Ídeología y apoyado en lo que estima método propio científico, versión pálida de la teoría del reflejo o filosofía del sentido común, la cosa mejor repartida del mundo... y por ello mismo la más peligrosa y perjudicial por su radical acriticismo. El filósofo se convierte no ya en el Clásico filósofo de la naturaleza, sino en el especialista de la teoría de la ciencia cuyo objetivo es especular acerca de la expresión de la misma sin pretender, en un primer momento, dirigirla o hacerla directamente -como puede verse en las especulaciones acerca de la inferencia probabilística inductiva, que nada tiene que ver con lo que el científico denomina probabilidad-. Coronando este enfoque, el filósofo de la Teoría de la ciencia, en su vertiente metodológica y epistemológica, termina por atribuirse el derecho de establecer las condiciones y normas de la teoría científica. Así, una de las versiones, de los últimos criterios que se adoptan en este cuadro normativo, se centra en el de falsabilidad de las teorías y no ya sólo de las proposiciones aisladas. Criterio de falsabilidad que, simplificado, no es otro que el del *modus tollendo tolles:* Sea P el conjunto de las premisas de la teoría T y H la proposición que refleja un hecho experimental. Si P — H y resulta –H, entonces lo que debe afirmarse es –T. Un experimento negativo vale para invalidar una teoría, como en el caso del cuantificador universal, eliminable en cuanto un objeto no satisfaga la propiedad dada en el alcance de ese cuantificador. Todavía en 1972 un cosmólogo como Bondi, por ejemplo, señala como misión del científico la de crear teorías que tengan en cuenta lo conocido y permitan predecir lo que muestren futuros experimentos y observaciones. A lo que agrega que esa teoría sólo recibirá el nombre de científica si se somete a experimentos de fonna tal que si una prueba experimental contradice la teoría se habrá mostrado la falsedad de ésta. Consecuentemente habría que agregar, entonces, que el científico tiene como misión no la de establecer teorías científicas sino la de suprimir dichas teorías, porque su labor ha de centrarse no en lograr un aumento cognoscitivo o estructural, sino en ir haciendo cada vez más previsiones para falsar las teorías y llegar a suprimirlas.

Criterios máximos de este enfoque de la ciencia moderna se muestran el experimento, por un lado; por otro, la racionalidad, entendiendo por racionalidad no la moral sino la aportada por la lógica formal, la racionalidad logicista. Criterios centrales para la constitución, desarrollo y aplicación de la ciencia. Criterios avalados por sus.logros prácticos, triunfo de la racionalidad mecanicista unido a la Lógica formal.

De estos dogmas lógico-experimentales se iban a obtener, como sustrato de la ciencia, o marco en el cual se actúa y piensa, todo un haz de adjetivaciones y contraposiciones: rigor, universalidad, imparcialidad..., como atributos de lo que calificar de científico. Bastaría observar el origen polémico del método cartesiano y su elección contra la elección metódica simbólico-mítica y los horrores de un Descartes a la acción a distancia, al magnetismo, al vacío... por estimarlos elementos representativos de lo irracional, todavía. De aquí que lo científico se contraponga a lo que califica, desde su criterio de racionalidad lógico positivista, como dogmas oscurantistas, manifestación de creencias acríticas y entorpecedoras.

La propia Historia de la ciencia se verá mediatizada por la pretendida campana de racionalidad empírica. Y no hablo de un historiador de la ciencia como Farrington, con sus 'interpretaciones' de Platón, sino de historiadores que toman a Galileo, a Anaxágoras como figuras de héroes o mártires en la lucha por la razón revolucionaria y progresiva de la historia, para lo cual, y supongamos que de buena fe, traducen erróneamente haciendo que Galileo descubriera las propiedades de la caída por *experimentos* cuando Galileo no utiliza este término y se tergiversa, «irremediablemente, su pensamiento», en palabras de Koyré, haciéndonos ver a un Galileo empirista y experimentador, opuesto al platonismo que constituye la bestia negra para la ciencia experimental y el progreso... Ciencia *versus* religión o mito, tema de ensayos, libros, capítulo especial en obras que tratan de los métodos científicos o de la filosofía en general.

En el fondo, lo que se discutiría, desde este plano, sería el papel de la racionalidad entendida como criterio lógico-experimental positivo, frente a la racionalidad plasmada en criterios de concordancia míticos o de actitud normativa. Ciencia o razón y logos frente a Mito o concordancia y analogía. Pero al no haber planteado de manera clara y en su terreno conceptual propio lo que en el fondo cabría debatir, ello ha supuesto la salida del campo estrictamente conceptual para penetrar en el terreno ideológico.

La Matemática juega su papel en estas confrontaciones. Por un lado, como instrumento al servicio del mecanicismo, para el cual el hacer matemático euclídeo se mostraba insuficiente. Insuficiencia que obligaba a la creación de un nuevo tipo de instrumento matemático que pudiera dar cuenta del movimiento, es decir, creación de un instrumento que va a ser de carácter funcional y que permite un cálculo por aproximaciones sucesivas. Es el que se plasmará en el Cálculo matemático. Bien entendido que como mera instrumentalización, por lo cual se va creando y van surgiendo sus teoremas no en cuanto a campo estructurado, orgánico, lo cual no parece interesar a nadie, sino en cuanto al contenido y a su función instrumentalizadora, hasta el extremo de manejar el cuerpo de los reales, que no será definido con rigor hasta el último tercio del siglo XIX. Por otro lado, y ya en el marco ideológico, por la aparente imposibilidad de que en la matemática puedan influir cualesquiera creencias y contenidos, por lo cual se la toma como el lenguaje base de las teoóas científicas. Incluso se la va a adoptar como criterio para decidir si una teoóa, si una disciplina puede estimarse, o no, científica según el papel que la Matemática juega en la misma.

Y la historia, nuevamente, y en este marco, se convierte en leyenda. Leyenda que hará ver que, en la cárcel ateniense, Anaxágoras entretendrá sus ocios de condenado intentando cuadrar el círculo; la Matemática será denostada por algunos sectarios que persiguen a Galileo y antes a Bruno... Y si se quiere que la ciencia se constituya con los jonios, se quiere que la Matemática lo haga con los pitagóricos. Frente al hacer astronómico-religioso babilónico, frente al hacer ritual geométrico-egipcio, frente a las primeras cosmogonías helenas, frente al mito en resum:!n, se quiere que jonios y pitagóricos antepongan la razón y, provocando una revolución, creen la Matemática racional; simplemente, la Matemática. Se quiere que jonios y pitagóricos despojaran de cualquier tipo de creencias el hacer matemático y lo convirtieran en algo objetivo, riguroso, válido para todo tiempo y lugar. Y ello en base al método racional deductivo, ejemplo de procedimiento objetivo, independiente a cualquier opinión subjetiva, credo religioso o dogma de quien ejerce el oficio de matemático.

2. Si éstas, o análogas consideraciones más o menos matizadas o radicalizadas, han predominado en el panorama del pensamiento occidental, se ha producido una revuelta contra las mismas en los últimos años. La relación entre teoóa y hecho experimental es mucho más conflictiva de lo que el empirismo sostenía. Ni los hechos ni los datos son hechos o datos científicos aisladamente sino en el interior de la teoóa que los convierte en tales; ni hay criterios objetivos que permitan asegurar cuándo, dada una proposición, la misma es fáctica y, de serlo, si lo es en cualquier contexto o sólo en aquellos en los que tenga sentido; ni la experimentación «desnuda» enseña qué es lo que hay que rechazar de una teoóa... Debeóa disponerse de teoóas alternativas que permitieran resultados diferentes de tal manera que un experimento pudiera contradecir al menos a una de las teoóas. En otras palabras, el experimento crucial o decisorio sólo podóa serlo respecto a dos teoóas alternativas. Sin embargo, tal tipo de experimento

sólo será decisivo en el marco de una teoría previa que le haga tomar dicho papel. En otras palabras, es la teoría quien determina qué tipo de objetos son sus observables y qué tipo de experimentos pueden realizarse en el contexto que ella caracteriza. De esta forma, la teoría no es una mera agrupación de proposiciones con una estructuración más o menos deductiva, sino que es, a la vez, la que va a determinar su propio espacio verificador.

Por su lado, algunos historiadores, siguiendo el precepto de Abel de leer a los maestros, han puesto de manifiesto algunas inexactitudes de las leyendas históricas –y he mencionado el caso de Galileo, y podrían ir agregándose ejemplos y ejemplos- que llevan a la afirmación de que si se hubieran seguido los preceptos del empirismo y su teoría del reflejo, hoy no se tendría ciencia alguna.

Ello ha conducido a controversias, no sólo en el ámbito de la ruptura, sino entre quienes la han realizado. Controversias que conducen a admitir o bien relajamientos en cuanto a las exigencias de carácter metodológico o bien a admitir precisamente lo que desde la posición empirista se negaba, el papel de elementos 'irracionales' en la ciencia, pero llevando esta admisión hasta extremos que sólo los movimientos pendulares permiten explicar.

Lo que me interesa destacar, realmente, es el hecho de que, independientemente de estas controversias y las admisiones de pérdida de rigor metódico o irracionalidad intracientífica, la revuelta supone no una mera revuelta, sino una auténtica inversión conceptual. Inversión no crítica, sino ontológica. En la concepción que he esquematizado en I. el objeto se veía dado y había que captarlo mediante la acumulación de datos y la 'observación', pero objeto siempre diseccionado respecto al entorno del cual formaba parte. Suponía, por ejemplo, que en Mecánica se dieran, como elementos no explicitados, una serie de propiedades de un espacio en el cual pudieran acotarse los sistemas materiales; propiedades como las de uniformidad, isotropía, homogeneidad... Estudiar el movimiento de los cuerpos o sistemas materiales, con el principio del corte euleriano, era el objetivo de este tipo de ciencia. Sin embargo, el enfoque ontológico se ha invertido y no se parte de un espacio dado con unas propiedades admitidas de modo implícito, sino que la propia teoría es quien determina ese espacio y, consecuentemente, quien permite establecer las propiedades, ahora explícitas, del mismo. Consecuentemente, es plausible seguir el camino emprendido por los matemáticos y poder crear, en paralelo a nuevas geometrías, nuevas leyes ·mecánicas, por ejemplo, o nuevas leyes de la naturaleza que pierden, así, su estatuto de dictaduras dogmáticas de aquello a lo que realmente representan en la pequeña rebanada de materia que hasta ahora ha obtenido la especie humana. Nuevas leyes no ya en el marco de un mecanicismo diseccionador, sino en un marco globalizador en el cual se tenga en cuenta la estructura o el sistema total en el cual se trabaja.

Que no se haya visto el alcance de esta inversión, con sus consecuencias epistemológicas, quizá sea debido a encontrarse en un marco ideológico de crisis que, consecuentemente, implica un descenso del nivel especulativo, al cual también han contribuido algunos de los protagonistas de la revuelta con la admisión de esos descensos del rigor metódico y, por ello, conceptual. De aquí el enfoque de mera revuelta de carácter más o menos anarquizante y el mantenimiento de las ideologías propias del punto l.

Y como el marco ideológico es condicionador básico se han producido revueltas no estrictamente internas al campo conceptual como he indicado en las líneas anteriores, sino revueltas más propias de ese marco ideológico. Y bastan unos ejemplos: en Literatura, obras de vanguardia pretenden reivindicar hasta el uso del magnetofón y el dictado semipsicoanalítico para después dislocar aún más, si cabe, la estructura narrativa obtenida; en Música, las pugnas tanto contra la estructura 'tradicional' como contra el serialismo -basta recordar el <<Schonberg ha muertO>> de Pierre Boulez, en paralelo a tantos muertos como el <<Dios ha muertO>>, << Marx ha muertO>>, <<Freud ha muerto>>... -contra las normas estrictas del dodecafonismo, llegan a la búsqueda de lo que puede calificarse de 'racimos sonoros' frente a la composición y entonación clásicas, frente a la presentación, elaboración y desarrollo de temas bien estructurados, acudiendo a algunas técnicas electrónicas o al cluster o a los glisando para la consecución del nuevo concepto de 'objeto sonoro', contrapuesto al clásico de 'nota musical', pero a la vez con el deseo de improvisación y obra abierta para cada intérprete, con la consiguiente ruptura de la estructura de la composición musical, ideas que se pretenden justificar, en algunos casos, con unos barnices pseudocientíficos calificados con términos como los de composición aleatoria, procesos estocásticos, música electrónica...; en Política, la descomposición de los partidos políticos, supervivencias del siglo pasado, y su disfunción en el panorama actual frente a las utópicas ideas de las radicales autogestiones societarias, marginadas también a los sindicatos de partido, así como la crítica a cualquier tipo de institución existente; en Sociología, los cambios estructurales de población y tipos de producción, con su secuela de transformación de instituciones como la familiar y, con ella, de transformación de las restantes... Y, en todos los casos, se justifican con unos barnices de pretendido intento liberalizador del individuo, aunque no hagan otra cosa que convertirlo, tanto a ese individuo como al producto que le ofrecen, en mera mercancía; así, en Música, se habla de la libertad del compositor pero también del intérprete y de los oyentes..., pero no de la marca comercial que posibilita tales habladurías y en cuyo nombre se piden ayudas para aumentar el consumo musical...

En el hacer matemático se retoman posiciones como la de Mannoury, quien en 1947 exclamaba: «Pero todo aquello con lo que aún se viste a las matemáticas, su carácter absoluto y su perfecta exactitud, su generalidad y su autonomía, en una palabra, su verdad y eternidad, todo ello –y perdón por la expresión–, *todo ello no es más que pura superstición*». Algún autor se atreve a cometer «Crimen bourbakista» en la redacción de su obra y matemáticos como Grothendieck, Samuel, Chevalley, o como Lawvere y Schwartz exigen la libertad del matemático, incluso el abandono de la matemática, frente a la opresión tanto del método que ellos han contribuido a que alcance cotas de «insufrible» formalismo, como de la sociedad que, apropiándose de su producto, aherroja al individuo...; abandono de la matemática en beneficio de la lucha por la etología y la supervivencia del hombre sobre la tierra; abandono que llega a exigir la desaparición de la enseñanza de dicha matemática por estimarla dogmática en beneficio del planteamiento de cuestiones totalmente marginadas a la misma...

Desde esta visión, todo es anécdota más que categoría de pensamiento. Y así la ciencia racionalizadora se ve como constituyendo una de las formas de opresión que ha encontrado la sociedad, creadora de la utopía de los beneficios de la ciencia, de la utopía de la racionalidad deductiva; ciencia que, por el contrario, y según este enfoque 'desmitificador', se constituye al azar, sin plan racionalizador alguno.

3. Es claro que tanto la posición moderna esbozada en 1. como la revuelta actual esbozada en 2. suponen la admisión, implícita, de unas creencias previas tanto en el plano interno conceptual

como en el externo ideológico. Fa'Ctores internos del cuadro moderno son, por ejemplo, la admisión implícita de una uniformidad absoluta de la naturaleza que permite la reproducción de los experimentos con idénticos resultados, así como la de su homogeneidad o la creencia de que al seccionar un sistema material el mismo no queda alterado en cuanto al funcionamiento en el interior de la misma estructura en la que se realiza la escisión... Factores externos lo constituyen un positivismo mecanicista y la idea de desarrollo racional y progreso continuado. Ideas últimas no siempre precisadas, explicitadas y definidas con el mínimo rigor porque para ellas no parece exigirse el mismo criterio de racionalidad lógico que para las componentes internas. Ideologías convertidas en dogmas desde los cuales criticar otros dogmas en pugna por la captación y construcción de las correspondientes realidades ideológicas y, consecuentemente, sociológicas. Pugnas por el poder aquí y ahora, por el poder en el futuro.

En la pretendida actitud racionalizadora deductiva, objetivadora, si hay pugna contra los marcos míticos, la hay en nombre, realmente, de otras creencias que no son las del poder de la pura y exclusiva razón y lagos; así, en la Matemática, al retomar como origen a los pitagóricos, cabría observar que si, realmente, supone una cierta desacralización, la matemática resultante va a depender de las creencias en un mundo de formas puras, independientes al individuo que ha de captarlas por un esfuerzo de intuición eidética, pero dada su impotencia originada por la caída de dicho mundo esa intuición se hace imposible y de aquí la necesidad de rodeos, de métodos para la captación. La axiomática va a ser un método, pero enmarcado en unas creencias que condicionarán el uso que del mismo se haga, uso centrado en la mera organización ordenadora de lo que cabe 'descubrir', necesario por la limitación del hombre en su caída, reminiscencia del 'paraíso perdido'. La física jonia, por su lado, no es más que la traslación de los mitos cosmológicos con su pretendida idea de principio generador, no de explicación causal del mismo. En cualquier caso, la ideología de la racionalidad se manifiesta en el objetivo de captar la 'esencia' de la naturaleza, bien directamente, bien mediante la creación de una imagen del mundo, de una teoría del universo con la cual llegar a dominarlo y, si no plenamente ahora, sí en un futuro, mediante aproximaciones cada vez mayores a esa esencia, porque lo que la ciencia ha logrado una vez mediante su proceso deductivo-experimental es válido para siempre -como si la ciencia no fuera una creación del hombre y no viniera condicionada por la campana biológica de éste que, en su intento de aprehensión, transforma simultáneamente lo que intenta aprehender, y como si no se viera la escisión que se oculta en esta ideología de la racionalidad y que no es otra que la escisión razón-naturaleza y la consiguiente carga emocional si no a favor de la razón, al menos en contra de la naturaleza-. Ideología de la racionalidad que se manifiesta en las palabras, muy matizadas y moderadas, de Einstein, donde el subrayado es mío: «las leyes generales en las que se basa la estructura de la física teórica pretenden ser válidas para todos los fenómenos naturales. Por mediación de ellas se debería poder llegar a la descripción -o sea, a la teoría- de cualquier proceso natural, comprendido el de la vida, *gracias a un trabajo de pura deducción,* si tal operación no superara ampliamente las capacidades de nuestro intelecto».

En cuanto al marco ideológico en el que se inscribe la revuelta, se me muestra como un debilitamiento de la razón especulativa y ello por no diferenciar claramente los marcos perceptivo, mítico-simbólico, conceptual, tecnológico... Debilitamiento en beneficio de éste último. Y así, la revuelta actual se me presenta, en casi todos los casos, como una revuelta en nombre del individuo frente a la sociedad y frente a los grupos que lo dominan, y que se han apropiado de mitos como el de la razón y empleado como sustitutivo de los míticos, pretendidamente superados; mitos de la razón que, sin embargo, no logran satisfacer los anhelos de trascendencia del individuo que busca su salida en la superstición, la magia, la religión, la palabra y la acción de grupúsculos, la palabra de solidaridad.y autogestión... Revueltas de carácter anarquizante en muchos casos por las que se quiere recuperar al individuo frente a la masa, por las que se pretende mantener más bien conquistar- la libertad del individuo frente a los cantos de sirena, frente a las demagogias de su incorporación al mito de la 'libertad social' que no encierra, para muchos, otra perspectiva que la pérdida de su auténtica libertad interior. Revueltas que cabe interpretar como uno de los últimos gritos -y ello en los casos, mínimos, de honestidad de quienes propugnan la revuelta porque los restantes, en mayoría, no hacen otra cosa que seguir el consumismo societario que aparentemente combaten, con lo cual consiguen reforzarlo-, antes que, de modo ya efectivo y final, esa entidad calificada de individuo, creada en siglos anteriores, vuelva a desaparecer. Y de modo quizá definitivo, en aras del mito del comunitarismo que presupone no ya la igualdad de la razón -como pretendiera Platón- sino la igualdad socioeconómica socialista y, más aún, la igualdad en la posesión, que no en la propiedad, de los bienes societarios con su pretendida corresponsabilidad y colaboración en una tarea común. Corresponsabilidad y colaboración igualitarias imposibles por el gregarismo de la masa que requiere, en todos los casos, de un amo, sea en la forma de 'figura·, sea en la forma de colectivo; imposibles por la imposible igualdad de capacidades individuales -física, intelectual, astral...- y que, por imposible en cualquier sociedad, parece provocar en algunos miembros de la actual un deseo transformador implícito que estriba en crear otro tipo de comunidad a partir precisamente de esa desigualdad de capacidades, pero igualando a todos sus miembros como se igualan las alturas en los vasos comunicantes, siempre por abajo para que no haya picos que sobresalgan...

Estos marcos impiden que se vea la trascendencia que supone la inversión conceptual respecto a las teorías científicas plasmadas en el enfoque que he calificado de moderno. Inversión en la cual es la teoría quien impone lo que hay que diseccionar y, con ello, observar, experimentar e interpretar. En la cual lo que importa es el sistema o estructura de la que no pueden separarse, sin más, los sistemas materiales para su análisis y, al importar la estructura primariamente, permite la comparación y estudio de las mismas mediante la idea clave del morfismo. Dificultad de percepción motivada quizá porque en el marco ideológico político se viene haciendo un proceso que podría estimarse, por analogía, del mismo tipo aunque ahora se trate de no explicitarlo e incluso de oponerse 'públicamente' al mismo mediante calificativos cargados de aparentes notas despectivas: la manipulación se realiza ahora desde el poder hacia la base haciendo creer a los miembros de ésta que son sus deseos los que se intentan llevar a cabo en el poder; manipulación no ya del hombre como individuo fisiológico, en el sentido de objeto vendible o canjeable -esclavitud física- sino de su 'conciencia' -esclavitud mental-.

4. Intromisión radical la del marco ideológico sobre el aspecto especulativo que impide distinguir, precisamente, los dos planos: conceptual y de creencias; que impide admitir que junto al criterio

de racionalidad imprescindible para la burbuja conceptual pero en su sentido de racionalidad logicista, existen otros criterios de racionalidad para otras burbujas -como la normativa, la mítica, la perceptiva, la tecnológica-que pueden no ser subsumidos por él, sino que, precisamente, es el criterio de racionalidad lógica, cuando pierde su objeto propio, el que queda radicalmente suprimido bajo la presión de otros marcos. Supresión que conlleva la de las propias ciencias racionales, que van siendo abandonadas y olvidadas. Intromisión del cuadro ideológico en el conceptual que se revela en las llamadas a la libertad incluso de la razón en el sentido de que ésta rompa con las leyes que ella misma debe imponerse. El resultado, el que ya Kant señalara en su opúsculo *Qué significa orientarse en el pensamiento.* En él indica cómo si cada uno se abandona a su propia inspiración y no a las leyes de la razón, debe buscar el testimonio en la tradición, en la historia como leyenda, en los hechos exteriores, así como en sus 'intuiciones'. Pero entonces resulta que la razón quedará sometida a corto o largo plazo a la superstición. Y el final de la querida libertad del pensar, sin sus leyes, reglas, normas correspondientes, es su propia supresión, su autoaniquilación.: «Es así como la libertad de pensar, cuando llega hasta querer emanciparse de las leyes mismas de la razón, termina por aniquilarse con sus propias manos».

Buscando la no aniquilación de la libertad de la razón, parece que sólo mediante una vuelta a la actitud de crítica racional, que siempre es difícil porque entraña un trabajo, muy duro trabajo del pensar, se pueden intentar superar los desenfoques mencionados, mantener la auténtica libertad del pensamiento puro, pero en su plano correspondiente. Crítica que, para poder realizarse, y realizándose ya de camino, debe imponerse una previa labor de clarificación y precisiones.

Ejemplifico desenfoques, pérdida de la razón en los terrenos del hacer matemático. En ellos la revuelta ha encontrado, incluso, un slogan: «Contra el método». Y si bien es título de ensayo y posterior libro de Feyerabend en los terrenos de la filosofía de la ciencia, se encuentra ya en los matemáticos que antes he mencionado, porque el grupo al que pertenecían, Nicolás Bourbaki, adoptó como título de colección para la edición de alguna de sus obras el de *Métodos* con lema el de Rivarol: «Les méthodes sont les habitudes de l'esprit et les économies de la mémoire». Frente al espíritu de cartesianismo que ello parecía suponer -y ya he indicado contra qué método iba el método cartesiano-, se pretende la recuperación no del pensamiento objetivador, sino de la imaginación simbólica.

En el hacer matemático el método por excelencia es el axiomático. Método indiscutido por ser la expresión máxima de la potencia de la razón deductiva. Y, desde la Matemática, método indiscutido, paradigmático, para el resto de las ciencias en su plano teórico, condicionador de su plano empírico. Incluso al constituirse la «Ciencia experimental», que en su versión escolar baconiana lo hace en pretendida contraposición a la deductiva, originando el método inductivo, resulta que éste debe ser justificado racional, deductivamente, con lo que no se hace otra cosa que una búsqueda de imitación, un adquirir la 'seguridad' que la deducción racional, frente a la que aparentemente se crea, conlleva. Justificación de la inducción, problemas de las interrelaciones teoría-práctica, constituyen el centro de la filosofía de la ciencia durante largo tiempo, centro de problemas irresueltos por la debilidad justificacionista de partida.

Sin embargo, la revuelta ha alcanzado a dicho método que ha sido criticado no sólo en cuanto a la posible utilidad para la ciencia -insistiendo, para la crítica, en una vuelta histórica en la que destacan componentes como las del azar en el descubrimiento, y que no hacen otra cosa que confundir el plano genético con el epistémico y el fundacional- sino en la propia matemática 'pura', convirtiéndose en lugar común afirmaciones acerca de la esterilidad del método para la creación matemática o el anquilosamiento que produce en la misma. Críticas, polémicas que han protagonizado, entre otros, matemáticos como René Thom o Dieudonné, y cuyos ecos han alcanzado a todos los que 'sienten' el hacer matemático, aunque en ningún momento hayan alcanzado o afectado al método axiomático...

En este punto, y en inciso, se hace necesario señalar lo que desde mi punto de vista constituye un hecho: la situación actual impide la precisión en los datos de las propias polémicas porque los medios de comunicación, más atentos al ruido, olvidan los datos primarios y sólo eligen los ruidos del mensaje, pero no éste. Problema propio no sólo del hacer matemático sino de la problemática actual, con la tendencia al comentario de quien es insipiente para hacerlo pero cree que, con ello, forma al lector-espectador, cuando lo que hace es transmitirle su propio entontecimiento y, así, entontecerle aún más -si es que ello es ya posible-, logrando la igualdad antes apuntada en toda la comunidad: se ha construido una red de polución informativa y de pseudoimágenes -que no de pensamiento, conocimiento e imaginación- que cubre el planeta, en nombre de una libertad de información que sólo tiene, de la misma, el nombre, ausente todo tipo de responsabilidad tanto individual como colectiva. Red de polución más grave que la atmosférica y que debía ser uno de los objetivos primarios de supresión y limpieza para quienes pretenden sobrevivir como individuos sobre la tierra.

Polución informativa que impide observar que los ataques al método no lo son contra dicho método, sino contra alguna de las creencias que sostienen quienes manejan dicho método. Creencias subyacentes de quienes manejan el método axiomático, para seguir con el caso apuntado en este parágrafo, pero que también se encuentran en quienes la polución informativa señala como contradictores del método. Y así cabría mostrar la existencia de una aparente contradicción entre lo que dicen y lo que hacen, porque en su labor de matemáticos continúan utilizando el método que se dice atacan porque, si son matemáticos, no tienen otro remedio cuando actúan en el campo conceptual matemático.

Y en cuanto a la contraposición de método y búsqueda de ideas renovadoras, método axiomático como contrapuesto a la intuición creadora matemática, se produce una confusión más, al identificar un instrumento con aquél que lo utiliza -que será quien carezca de ideas o de intuición matemática-, y con aquello que se produce en dicho uso...; equívocos que se producen en el atributo de «formalismo», en el de tantos otros que entran en juego.

5. Y es la búsqueda de unas mínimas clarificaciones críticas, de precisiones en cuanto al método axiomático, lo que me ha conducido a las páginas que siguen. Que no suponen una defensa indiscriminada del método, porque no creo que lo precise, y sí tanto de la potencia que el uso del mismo encierra, como de los principios de imaginación y fantasía para saber utilizarlo, imaginación y fantasía unidos a los principios de racionalidad allí donde esos principios tienen su lugar propio, en el pensamiento puro. Y ello porque, como ya decía un adepto chino del Elixir de Vida de Oro, en *El secreto de la Flor de oro:* «Cuando un hombre correcto se sirve de los medios erróneos, los medios erróneos operan correctamen-

te, pero cuando un hombre erróneo usa de los medios correctos, el medio correcto opera erróneamente».

Imaginación y fantasía, racionalidad en los terrenos del hacer matemático porque la Matemática ha jugado su papel tanto en la transformación, en la cristalización de la burbuja conceptual, del pensamiento puro, como de la ciencia 'moderna' y el mecanicismo positivista-experimental correspondiente, como lo juega en la inversión ontológica actual. Porque la Matemática no es un mero lenguaje formal carente de referencial, sino que se me presenta como un hacer de conocimiento objetivo, real, pero íntimamente ligado al método que posibilita dicho hacer. Conocimiento que pertenece a la esfera del pensamiento puro y que, gracias al método axiomático, muestra su propio desenvolvimiento como un conocimiento interior a él mismo; desenvolvimiento que afecta a su esencia conceptual no permaneciendo exterior a la misma, como equivocadamente apuntó Hegel en *Fenomenología del Espíritu*. sino que la intelección en el conocimiento es interior a ése conocimiento. Y es lo que trataré de mostrar en la primera parte, porque es tesis que supone desterrar del ámbito nociones que pueden conducir al error -como desorientaron a Hegel nociones como 'magnitud' y 'espacio' que estimó propias del conocimiento matemático- y sólo una clarificación crítica del método axiomático permitirá lograrlo. Simultáneamente, y al paso, cabria precisar nociones como las de demostración, que el matemático maneja acríticamente y, por ello, sitúa en lugar de privilegio nocional, como nota característica del hacer matemático, cuando dicha demostración depende sólo de un acto social de aceptación de la comunidad matemática.

Sin embargo, el ámbito del pensamiento puro también depende de las creencias que lo entornan porque su propia construcción se ha realizado en pugna y lucha. nunca terminada, en el ámbito de su génesis: la burbuja mítico-simbólica. Delimitación de creencias que permitirá observar que no hay un único método axiomático, sino tantos como creencias fundamentales determinen el ámbito conceptual en el que muestre el desenvolvimiento del concepto matemático. Creencias de base, con sus estatutos ontológicos correspondientes, y que mostrarán las inversiones o saltos cualitativos de unos a otros, y que obligarían a la aceptación de cierto grado de historicismo en el propio desarrollo conceptual. Historicismo, por supuesto, no lineal, como ya he discutido en otras ocasiones. Y al papel que juegan las creencias en el desenvolvimiento y uso del método axiomático se dedica la segunda parte.

6. Podría encumbrarse este trabajo, si es que ello fuera encumbramiento, por constantes y reiteradas notas a pie de página, a final del escrito, con referencias a otros haceres distintos al matemático del que aquí me ocupo, con citas no sé si de autoridad, de snobismo o de auténtica o falsa erudición, porque todo pensamiento depende en parte fundamental de sus lecturas, criticas o no. Notas que dieran fe de que lo dicho para el hacer matemático es válido, igualmente, en cuanto al ámbito interno, para otros haceres científicos, y en cuanto al ámbito externo o marco ideológico, para haceres tan distintos como los antes apuntados -arte, música, literatura, sociología, política ...-. Prefiero no agregarlas para no quitar al lector el placer de ser él quien las añada, si no materialmente, mediante pluma o bolígrafo, sí mentalmente, si es que el juego al que se le invita le place auténticamente. Placer de lector al que no todo se le debe dar hecho -o deshecho mediante continuas referencias a autores, revistas, libros-, sino más bien sugerido, iniciado, como la obra matemática que exige de la colaboración relectora, del trabajo que indican palabras como «es fácil ver», «Se puede demostrar que...». Intento de placer de lectura crítica, no meramente pasional, alienante.

1

EL METODO

I. Caracterización

Las componentes que estimo fundamentales del método axto-mático, en el hacer matemático, son:

Componente A:

1. Se admite un conjunto X de objetos cualesquiera, objetos que se representan por signos arbitrarios, letras en general.
2. Se admite que entre los objetos de X se dan relaciones y operaciones que, como en el caso anterior, se representan por signos. Tanto las relaciones como las operaciones constituyen dos conjuntos R y F. Se establecen las definiciones de dichas relaciones y operaciones.
3. Se establece una serie de proposiciones que satisfacen ya las relaciones. ya las operaciones. Estas proposiciones reciben el nombre de *axiomas*, *proposiciones primitivas* o *primeras proposiciones*.

Las primeras proposiciones o axiomas caracterizan, o definen, la *estructura base*, de aquí que a esta Componente A pueda designársela como Componente definicional. A su vez, los objetos de X y las relaciones y operaciones entre ellos reciben el nombre de *elementos primitivos* de la estructura.

Componente B:

1. Se definen nuevos objetos, relaciones y operaciones en función de los primitivos.
2. Se obtienen unas series *de* proposiciones o teoremas.

En general, las proposiciones o teoremas, obtenidos genéticamente por el procedimiento que a cada matemático se le ocurra, no adoptarán el papel de proposición hasta que no se haya realizado una demostración de los mismos a partir, precisamente, de las proposiciones primitivas o axiomas, convertidos en punto inicial de la teoría, mediante la

Componente C:

I. Se establecen las reglas de derivación, o demostración. que actúan como operadores no sobre los elementos primitivos, sino sobre los enunciados lingüísticos que expresan propiedades de dichos elementos.

Componente D:

l. Se establecen reglas semánticas de interpretación, por las cuales los objetos de X adquieren un determinado referencial en un modelo.

Estas reglas semánticas han de ser compatibles con la interpretación que se haga respecto a las relaciones y operaciones. Es componente que, en ocasiones, se oculta bajo el paso que cabe calificar de ejemplificación; quiero decir, definida una estructura, como una definición no entraña la existencia de lo definido, entonces un ejemplo, una interpretación -enfocada como una particularización- asegura la existencia de dicha estructura. En el fondo, no se trata de otra cosa que del establecimiento de un modelo de la estructura en el que las reglas semánticas se dan por establecidas, y en el ejemplo lo están, pero de modo implícito.

Componente E:

l. Se establecen nuevos axiomas que hagan referencia tanto a X como a R o a F y, con ello, se obtienen subestructuras y teorías «particulares». Es decir, la estructura construida mediante la Componente A y la teoría a ella referida mediante las Componentes B y C, son generales, pero, por lo indicado en D, pueden comprender una serie de sistemas particulares cuyo estudio queda incluido, por supuesto, en la teoría anterior, pero que son particularidades que deben ser estudiadas como teorías en sí. Con una salvedad, la subestructura obliga a que la teoría de la misma sea más amplia, una extensión, de la teoría asociada a la estructura de partida.

El método axiomático, así caracterizado, se refleja, al menos, en tres aspectos: En primer lugar, construcción de una estructura como objeto conceptual, del ámbito del pensamiento puro; en segundo lugar, elaboración de una teoría acerca de esa estructura, es decir, de un conjunto con el mayor número posible de proposiciones que expresan propiedades que satisfacen los elementos de dicha estructura, para lo cual se requiere el establecimiento de unas reglas de derivación o demostración referidas a la teoría y que permita el paso de la conjetura a la proposición o teorema, y según cómo sean esas reglas la teoría será, o no, deductiva; en tercer lugar, la construcción de realizaciones o modelos de este objeto conceptual, modelos que también tendrán su ámbito en el pensamiento puro, en la burbuja conceptual.

En otras palabras, el método axiomático comporta el establecimiento de una terna ordenada (E, T. M) donde E es la estructura, T su teoría y M la clase de todos los modelos o realizaciones de E. Y de esta forma entraña el trabajo tanto de la caracterización de E y la elaboración de T, como de los diversos modelos de E, donde se tendría, ahora, la relación t E M con t como modelo o interpretación de E; relación que, para ser comprobada, no exige otra cosa que la verificación de la Componente A, ahora referida al sistema particular t, cuyos elementos poseerán una denotación semántica determinada. Siguiendo camino, el método axiomático permite el trabajo de las representaciones de una estructura, de una terna ordenada, en otra. Incluso posibilita el trabajo histórico de analizar qué modelos han sido los primeros en incorporarse a la terna o en cuáles se ha plasmado dicha estructura.

Un inmediato ejemplo clarificador sería: E retículo booleano, T conjunto de proposiciones acerca del mismo, M clase de modelos del retículo como pueden ser Algebra elemental de las partes de un conjunto, Cálculo proposicional, Algebra de sucesos y su espacio probabilístico asociado, Algebra de circuitos de conmutación... Y en cuanto a ejemplo de representación no ya entre estructuras sino entre interpretaciones de la misma, aquí se tendría el teorema de Stone por el cual toda álgebra booleana es isomorfa a un campo de conjuntos; teorema clave para la constitución, precisamente, de la clase M y sólo planteable desde la perspectiva de la constitución de la terna y el establecimiento de los modelos de E.

2. Aquí se originan dos cuestiones -muchas más, pero a las que volveré en la segunda parte-: a) De modo clásico, el método axiomático se ha visto como comportando, únicamente, el aspecto demostrativo, aunque dando por sobreentendida la especificación de las reglas de derivación que, en todo caso, se han querido siempre deductivas. Y de tal manera que el hacer matemático se identifica con el hacer deductivo: es *el* hacer deductivo. En este punto, surgen las dificultades de compaginar ese criterio de deducción con el hecho de que el matemático no trabaja linealmente, ni de que la teoría siga, históricamente, un proceso unitario, lineal sino que muestre rupturas y cambios epistemológicos, cambio de teorías. En cualquier caso, tanto el primero como el tercer aspecto quedan marginados, admitido qué sea una regla de derivación y, consecuentemente, una demostración.

b) También de modo clásico, se ha visto que el método axiomáticp sólo es aplicable a teorías ya elaboradas a las que dota de una organización expositiva. Desde esta visión, las teorías que puedan construirse de otra manera no son más que juegos formales sin interés alguno. Es visión próxima al empirismo ingenuo en el que se estima que una disciplina se constituye por el mero agregado de proposiciones que se establecen aisladamente, como si un montón de ladrillos constituyera la casa o ésta se edificara sin más que amontonar tales ladrillos sin plan preconcebido alguno.

Ambas cuestiones se me presentan como dos desenfoques de qué sea el método axiomático. El objetivo en la instrumentalización de éste no estriba en la mera elaboración de teorías particulares -elaboración que es cuestión de la imaginación creadora del materpático, así como la demostración de las conjeturas e hipótesis porq e el propio concepto de 'demostración' es, como se sabe, indec1dible- o la mera organización expositiva más o menos arbitrariamente elegida por uno u otro autor -en cuya organización, por otro lado, se exige un auténtico dominio porque la elección de una u otra axiomática estructurante puede cambiar el propio marco científico-. Uno de los objetivos del método axiomático es el de caracterizar o construir una estructura conceptual, del pensamiento puro así como el marco teórico de la misma, a la que hará referencia esa organización, o desorganización, expositiva. Con ello permite delimitar el campo donde el matemático, por el procedimiento que sea, pueda elaborar conjeturas e hipótesis e intentar su posterior demostración. Alguna de las infinitas que pueden construirse referidas a dicha estructura, o todo un haz de ellas como subteorías. Por ejemplo, establecida la Aritmética de los números naturales, bien por la caracterización Dedekind-Peano, bien por la algebraica que los define como un semianillo abeliano bien ordenado euclídeo, el matemático podrá construir la teoría acerca de tal Aritmética. En esta teoría aparecerán proposiciones mediante un trabajo que, en ocasiones, será de pura y exclpsiva inducción normal, analogía, ensayo y error...; proposiciones que sólo se admitirán como elementos firmes de la teoría una vez que se hayan podido demostrar a partir bien de la inducción completa, bien a partir de las reglas de derivación que se hayan establecido en la Componente C. Así, las fórmulas de Bernoulli aparecen como conjeturas en un primer momento hasta que se logra su demostración; pero también pueden establecerse proposiciones que no han sido demostradas hasta el momento -teorema de Fermat- o que ni siquiera podrán demostrarse en el futuro, por la incompletitud de la teoría para dar cuenta de todas las propiedades de la estructura a la que recubre. En cualquier caso, son las Componentes A y B las que posibilitan el establecimiento de dichas conjeturas y proposiciones al establecer el marco en el que las mismas alcanzan su sentido.

De esta manera, el papel del método axiomático se centra, más que en el descubrimiento y posterior demostración de proposiciones más o menos aisladas, en la creación y caracterización tanto de estructuras como en la delimitación del terreno en el que la teoóa correspondiente muestra su validez.

Sin embargo, y de hecho, el método axiomático va más allá, no agota su papel en el objetivo señalado antes; en salto de nivel respecto al objeto -aunque no en cuanto al método, que se vuelve a repetir-:

a) permite que se adopte esa estructura como nuevo objeto y, mediante la elaboración de sus subestructuras correspondientes, constituir como nuevo conjunto X' de objetos una clase de estructuras que podrán tener entre sí unas relaciones y entre las cuales podrán establecerse unas operaciones que, definidas, admitirán el establecimiento de unas propiedades -quizá en paralelo a las que satisfacen los objetos de X- o proposiciones primitivas, ahora de una nueva estructura. Es salto que conduce a la elaboración de una nueva teoría, pero referida no a objetos, sino a estructuras;

b) utilizando la Componente D, crear nuevos modelos o interpretaciones de una misma estructura, que dan origen a nuevas teorías, casos especiales de la temía central -como en los espacios vectoriales funcionales donde como nuevos objetos se admiten no ya vectores sino funciones-;

e) se pueden adoptar como nuevos objetos no ya las estructuras, sino las propias teorías de dichas estructuras y realizar una nueva teoría acerca de dichas teorías que abarque desde la descripción sintáctica de su lenguaje hasta las propiedades y condiciones epistemológicas a que dichas teorías pueden someterse.

El método axiomático supera la concreción a una estructura determinada y a su teoría asociada -como puede ser la teoría de funciones de variable real, la geometría euclídea, el cálculo de predicados de primer orden con igualdad...-para permitir la caracterización de nuevas entidades conceptualt;s en las que la noción de objeto es ya la propia estructura, su teoría, modelos especiales o teorías particulares de una dada...

De esta forma, con el método axiomático se logra el establecimiento, por un lado, de proposiciones que pueden calificarse de 'intrínsecas' a una teoría determinada, como «la expresión 'px' es teorema de la teoría T», pero también de enunciados como «todo teorema de T tiene la propiedad 'p'>>, o «el producto cartesiano de dos estructuras determinadas es una estructura del mismo tipO>>, o «Sea f el morfismo entre dos estructuras»...

3. *Logros y problemas*

El método axiomático se convierte en una de las herramientas creadoras del trabajo matemático ya que, junto al proceso anterior, entraña, por un lado, un criticismo racional respecto a las hipótesis que se realizan en el trabajo, al tener que enumerar todas y cada una de las proposiciones que se adoptan como primitivas. Criticismo que va más allá al exigir no sólo la clarificación y enumeración de tales proposiciones primeras de la estructura, sino también la precisión de aquellas suposiciones que se aceptan, en general, sin previa crítica y que pertenecen a lo que califico de 'creencias' que entornan el hacer matemático; creencias de las que el matemático no está ausente, sería imposible, pero que debería tener la honestidad racional de especificarlas. Con ello aclararía, en muchos momentos, las acepciones con las que adopta unos u otros términos, acepciones cargadas de referenciales no intrínsecos a la estructura general y, a veces, ni siquiera a una de sus particularizaciones. Y en este puntcr las ejemplificaciones posibles son muchas, como en el caso de los términos del *Análisis situs* y el teorema de Euler-Poincaré, que ha sufrido variaciones realmente no constitutivas o estructurales, sino marginadas a las mismas, por ausencia de clarificación de las creencias previas que condicionaban el espacio geométrico a manejar, y con él, los términos que entraban en el teorema. Al cambiar de hipótesis previas, el referencial de los conceptos, y consecuentemente la denotación de los mismos, era el elemento cambiante.

Por otro lado, y quizá fundamental, permite partir de la estructura y su teoría asociada como dados de antemano, para ir obteniendo las consecuencias y las particularizaciones de la misma. Naturalmente, tales teorías, como conjuntos de proposiciones generadas por los primeros principios, están cerradas respecto al operador derivación por el dato de dichos principios, lo cual no significa que todas las proposiciones estén dadas en acto, porque dicho número es infinito. Es lo que permite la afirmación de que las primeras proposiciones se estimen como los generadores de la teoría mediante el operador derivación –o el operador consecuencia- .

En su uso el método axiomático hace que se adopte, desde el punto de partida, una actitud global, unificadora, respecto a la teoría para, haciendo camino, obtener tanto las consecuencias internas de la estructura, como de las realizaciones o modelos de la misma, pero también de las teorías particulares -más ricas en extensión proposicional, insisto- de las subestructuras asociadas. Y ello porque las proposiciones primitivas caracterizan las propiedades comunes, el núcleo constitutivo de toda una red de teorías que se originan al agregar nuevos axiomas para determinar sistemas particulares; en otras palabras, los nuevos axiomas establecen las diversidades entre sistemas particulares cuyas teorías contienen el núcleo dado y lo amplían en conjuntos que pueden tener en común únicamente tal núcleo. Teorías que abarcan los distintos modelos o interpretaciones que se muestran dotados de cargas semánticas o connotaciones referenciales que pueden ser diferentes entre sí.

En este punto debo indicar que el método axiomático, al crear como ámbito básico del trabajo la estructuración u organización de aquello a lo cual se aplica, pennite dar cuenta del propio trabajo de investigación, y no sólo en el hacer matemático sino en el científico en general. Y ello en el sentido de que al tratar con hechos o datos, la convicción propia de quien trabaja con los mismos es la de que tales hechos lo son como manifestación de una estructura u orden que los posibilita y refleja. Estructura que es la que hay que obtener mediante la creación de modelos que los conviertan en tales hechos y datos; modelos, por supuesto, variables, en sus hipótesis, para la conformación con los hechos originarios y con los originados por el propio modelo. Modelos, por supuesto, en el interior de un contexto previo, aunque el mismo se encuentre implícito y sea este modo de trabajo, globalizador, quien lo explicite. Sólo la condición que implica captar la estructura completa en la que un hecho está inmerso –y en el hacer matemático el hecho no es, únicamente, una proposición a demostrar, o la demostración de la misma, sino que puede ser un problema a resolver, una aplicación a otras teorías, o establecer una conjetura o un contraejemplo ...–, pennite la captación precisamente de tal hecho. Y este es punto que no se ha tenido presente nunca, que yo sepa, en cuanto referido a este método; por el contrario, se supone que el mismo es impotente para dar cuenta de los papeles que juegan el fenómeno y la hipótesis, en paralelo a la inducción y la deducción, cuando según sostengo es el condicionador de la captación de la estructura a la que esos hechos hacen referencia. Y si la estructura no llega a ser captada, el propio hecho o fenómeno tampoco lo será. Es un dar cuenta del desarrollo de una disciplina en cuanto a la cantidad de representaciones o modelos pertenecientes a la clase M, a la tercera componente del hacer axiomático, así como al aumento del cardinal de T, o al aumento en cuanto a las representaciones de una tema en otra. Y no hago referencia, aquí, a los equívocos provocados en el empleo del ténnino 'fundamento', identificado dicho ténnino con el de 'axiomática'.

Igualmente, al poner de relieve los elementos centrales a que hace referencia una teoría, su esquema intrínseco, permite relacionar distintas teorías no por su contenido semántico -por el que a veces se muestran dispares y heterogéneas- sino por su esquema o estructura más profunda mediante bien el morfismo, bien lo que algunos matemáticos han calificado como 'analogía'. Y ésta sólo es factible cuando se pone de relieve que dichas teorías son versiones lingüísticas de un mismo esquema intrínseco. Por poner un ejemplo, es lo que Maxwell realiza en su trabajo al identificar los campos magnético y eléctrico en una teoría unificadora que muestre que la estructura es la misma y sólo varía la asignación de las reglas semánticas, por lo que las teorías eléctrica y magnética se convierten en modelos de un mismo esquema estructural. En este aspecto, el método axiomático, por supuesto, no actúa como un mero algoritmo, sino que es el que permite el ejercicio de la imaginación creadora, que es la que llega a establecer las analogías, pero siempre entre teorías acerca de estructuras ya establecidas: si no existe un miembro de los dos exigidos para dicha analogía, ésta se viene abajo.

También es claro que los generadores de una teo.-ía no tienen por qué ser únicos. Quiero decir, una estructura puede ser caracterizada de maneras muy distintas –y he hecho referencia a ello, de modo implícito, al hablar de la caracterización de la Aritmética de los números naturales-. Las teorías que se originan de axiomas y elementos primitivos diferentes, parecerían ser, en principio, diferentes. Sin embargo, todas las teorías acerca de una misma estructura deberán ser equivalentes entre sí, equivalencia que deberá asegurarse mostrando la equivalencia entre los sistemas de generadores si es que los mismos pueden expresarse en el mismo tipo de lenguaje, y si el tipo es distinto, mostrar cómo reducir uno a otro. Con lo cual indico cómo el empleo del método axiomático no solamente permite el planteamiento de nuevas cuestiones, sino que él mismo encierra sus problemas. Así, y para seguir el caso de los generadores y con una indicación previa, cabe preguntarse si el sistema de generadores de una teoría determinada acerca de una estructura, permite desarrollar todas las propiedades de la misma o si, en dicha teoría, puede existir alguna proposición que, sin embargo, sea indemostrable en su interior o si, al particularizar una estructura admite su teoría la predicación de indecidibilidad o cambia tal predicación al considerar subteorías de una teoría dada.

Cuestiones como las anteriores versan, realmente, no sobre la estructura en sí, sino sobre las teorías construibles acerca de dicha estructura. Plantear la adecuación o no de una teoría sobre una estructura o la equivalencia de dos teorías, ciertamente supone el dato previo de la estructura que se considere y éste ha sido establecido por el método axiomático únicamente. En cuanto a las teorías sobre dicha estructura, el mero planteamiento de esta cuestión suscita que el método axiomático sea utilizado nuevamente, pero ahora en nivel diferente: el de las teorías y, como éstas han de ser formuladas de alguna manera, por escrito u oralmente, pero formuladas, tal formulación exige el estudio de algún lenguaje previamente elaborado. Elaboración de un lenguaje formal donde debe intervenir, y otra vez, el mismo instrumento. Lenguaje formal en el que lo que importa no es su construcción para una mera aplicación en análisis lingüísticos, sintácticos, sino su estructura. De aquí que, elaborado un lenguaje formal apropiado en el que expresar las distintas teorías, puedan construirse sobre dicho lenguaje los sistemas formales -con núcleo, entonces, los sistemas lógicos-. Pero el propio establecimiento de dicho sistema formal ha de tener en cuenta el método axiomático para ése establecimiento. Reiteración del proceso que conduce, por ejemplo, a construir un morfismo entre el sistema formal o su teoría y otra estructura o su teoría correspondiente; y no hago otra cosa que mencionar la aritmetización godeliana -y resolución de problemas como los de completitud o no de las teorías respecto a las estructuras y su posible decidibilidad-, o bien relaciones con estructuras topológicas o geométricas o algebraicas -y constituiría el caso del retículo booleano, o las álgebras cilíndricas-.

En todo caso, desde este terreno, se tiene como labor la de un previo análisis y construcción de los lenguajes, ahora estrictamente formales, en los cuales se pueden expresar las teorías y ello implica, por supuesto, todo un haz de cuestiones en torno a la formalización, niveles de lenguaje, potencia expresiva, relaciones y discrepancias entre los mismos... Análisis que parte, insisto, de la existencia de varios planos o niveles: 1. Estructura como objeto conceptual; 2. Teoría acerca de esa estructura; 3. Estudio de dicha teoría bien en sí, bien tras la elaboración de un lenguaje, o condiciones que de esta teoría pueden predicarse; 4. Conjunto de modelos o interpretaciones de la estructura o de la teoría -si ésta es radicalmente formal- con sus representaciones pictóricas en algunos casos, y que siendo reflejo de una misma estructura, poseen referenciales semánticos diferentes, y componen todo un haz o clase de aplicaciones; clase abierta de realizaciones particulares, que poseen su historia, desarrollo, evolución.... Niveles o planos sólo posibilitados, en su existencia, por el método axiomático.

4. *Dos enfoques y un mismo método*

Puede realizarse una bifurcación según cuál sea el papel que se haga jugar a la Componente E en la caracterización del método, papel que dependerá, precisamente, de condiciones epistemológicas previas:

a) Si el conjunto X de partida se adopta como de objetos cualesquiera que cabe representar por signos arbitrarios, por letras, estaremos imponiendo una condición de marcado carácter formal y será preciso, entonces, establecer para ulteriores aplicaciones, si es que se hacen, las reglas semánticas indicadas en la componente E y ello de manera explícita para cada .una de tales aplicaciones;

b) Si partimos de que los objetos de X tengan una denotación determinada, es decir, si las reglas semánticas están incorporadas desde el comienzo, aunque de manera implícita, entonces el trabajo se efectuará en una teoría no formal, sino postulacional.

Por ejemplo, si admitimos que el conjunto X sea un «Conjunto de vectores», y las operaciones sean «Suma de vectores» y «producto de escalar por vector», el método axiomático caracteriza entonces un Espacio vectorial del cual podrán determinarse espacios, estructuras particulares -rotaciones de un cuadrado que lo dejen invariante, espacios afines, espacios métricos euclídeos, espacios métricos semieuclídeos, espacio de Hilbert, espacios de Banach ...–. En éste segundo caso, que es el que el matemático realiza en su hacer pragmático, el método axiomático será un instrumento para un hacer «COncreto» y cabe designarlo como un hacer postulacional mediante un Enfoque postulacional. En el primer caso, dado que los objetos son de naturaleza no especificada, el empleo del método axiomático cabe calificarlo como de formal, siendo el estudio de las estructuras correspondientes un hacer «abstracto», dado que no se dota de referencial alguno a los signos que se utilizan. Por este motivo se exige la previa elaboración de un lenguaje formal totalmente estricto, con su sintaxis desarrollada con todo rigor. Es el enfoque formal en el empleo del método axiomático.

La bifurcación señalada, en cuanto al hacer matemático, no implica respecto a la pragmática del método axiomático, diferencia alguna. La diferencia se centra, básicamente, en la condición epistemológica previa de una mayor o menor formalización del contexto científico que se maneje. Y, en este sentido, el enfoque postulacional se muestra como un hacer concreto de estructuras determinadas —de modelos— si se le mira desde el punto de vista del estadio formal; enfocado desde un estadio del hacer preaxiomático puede estimarse como un hacer abstracto altamente formalizado. Quiero decir, aquí, que si se estudia la estructura de espacio vectorial sin más especificación, este enfoque aparecerá como de un nivel mucho más formal y abstracto que si se estudia la teoría de los espacios funcionales, que no es más que una concreción o modelo de la estructura que subtiende a ambos modelos, aunque por ser una concreción la subteoría a la que da paso es mucho más extensa que la primera. A su vez, el hacer matemático formal, desde el enfoque postulacional, parece mostrarse como un hacer abstracto que toma como objeto la propia estructura y el lenguaje en el que la teoría de la misma se formula, despojado de toda concreción. Sin embargo, también pueden considerarse estos sistemas formales como nuevo objeto de estudio, al estilo rle la teoría de categorías o el álgebra universal —y la clasificación ele lógicas es un primer paso en este campo— y entonces se tiene una nueva fase postulacional en la cual los sistemas formales, antes grado supremo de abstracción, se convierten en realizaciones o modelos, concreciones de una estructura que puede decirse de segundo orden, concreciones de la categoría o de la lógica que se estudie. Igualmente el estudio en sí de una teoría como la de grupos puede hacerse en ambos niveles -postulacional, formal- pero también puede adoptarse como apoyatura 'concreta' para el estudio de otras estructuras y sus teorías asociadas, como en el caso de las representaciones lineales de grupos y sus extensiones a grupos compactos, etc., con lo que tal teoría se convierte en el dato concreto para la elaboración de otra.

El concepto de formalización, y los consiguientes tipos de estadios o niveles, de los términos 'concreto'-'abstracto', aparecen así totalmente relativizados. Y más si se tiene presente que, para la construcción del nivel formal se requiere, a la vez, el estudio y desarrollo de estructuras 'concretas', dado que la propia teoría de modelos exige, para el concepto de interpretación y satisfacción, el dato de dicha estructura en la cual se hagan válidas, se satisfagan las proposiciones correspondientes del sistema formal, de la teoría deductiva que se maneje.

Uno y otro estadio, uno y otro enfoque, coexistentes e interrelacionados, dependen del objetivo perseguido en el trabajo. Sin embargo, insisto, en tales estadios, el método axiomático, como herramienta, es el mismo. Y ello hasta el extremo de que la axiomática formal enlaza íntimamente, a través de la teoría de modelos, con el álgebra universal y, en cuanto a las condiciones epistemológicas de recursividad y decidibilidad, con la disciplina de la computación, campos ambos de puro hacer matemático.

Las condiciones epistemológicas previas que se imponen en el estadio formalizado obligan a la creación de métodos que van en estrecho paralelismo a los métodos del trabajo matemático en su estadio postulacional o pragmático, en el estudio y desarrollo de otros haceres, y ello porque también él es un hacer pragmático más, un trabajo conceptual del mismo tipo que cuando se estudian los sistemas formales como objetos en sí. De *aquí* que pueden ponerse en paralelismo métodos como

ampliación y restricción de estructuras	ampliación y restricción de lenguajes; expansión de teorías
estructuras producto	ultraproducto de modelos
extensión por adjunción de 'imaginarios'	enriquecimiento de lenguajes por adjunción de constantes, de cuantificadores
equivalencia de expresiones y transformaciones adecuadas	equivalencia a formas normales, eliminación de cuantificadores
analogías e isomorfismos entre estructuras; clases de equivalencia	equivalencias e isomorfismos entre lenguajes y sistemas formales; clases elementales, lógica general.

En uno y otro caso, las demostraciones interiores de los teoremas se hacen conforme a la experiencia previa, a la «madurez» de quien trabaja en estos haceres; en el fondo, se demuestra como se puede haciendo uso del 'sentido común', de la experiencia y ejercitación previas del matemático...

Las demostraciones de las propiedades de los sistemas formales, en el interior de la práctica aquí calificada de enfoque formal no aparecen formalizadas. Cierto que suele hacerse el expediente de indicar que las mismas se plasman en el metalenguaje del lenguaje que se maneja y que este metalenguaje podría, a su vez, formalizarse. Pero también se indica que ello conduciría a un regreso sin fin de niveles metalingüísticos, imposibles de manejar, quedando como mera posibilidad lógica ..., y que el buen sentido de quien trabaja subsanará estas posibles distinciones, a veces no muy útiles.

El objeto y los fines perseguidos son los que permiten distinguir el enfoque postulacional del formal puro. Y únicamente cuando el empleo del método axiomático se autolimita al desarrollo interno de una teoría acerca de una estructura determinada, es decir, se autolimita a obtener como consecuencias algunas de las propiedades internas de la misma es factible un cierto grado de formalización en el desarrollo de tales teoremas y sus demostraciones, siempre relativo.

En su pragmática, el matemático trata de desarrollar teorías acerca de estructuras, ampliar todo lo posible dichas teorías, relacionarlas entre sí, estudiar las nuevas teorías que surgen de dichas relaciones. En general, no se preocupa por la Componente C ni por la E ya que parte de lo que he calificado de 'estructuras concretas'. Cuando en su hacer adopta el segundo enfoque, entonces desarrolla teorías acerca de los sistemas formales, donde la Componente C tiene un papel preponderante, pero nulo la O. Sin embargo, aún en este hacer, trata de traducir alguno de los sistemas formales construidos y aplicar a ellos las condiciones epistemológicas estudiadas –si completas, decidibles...–. Ahora bien, y es punto que deseo resaltar, tanto en uno como en otro enfoque, el matemático debe hacer uso de una teoría intuitiva de conjuntos como apoyatura. En el fondo, el propio hecho de afirmar que una interpretación o modelo t lo es de una estructura E no es otra cosa que una expresión de carácter conjuntista, porque equivale a decir que t es un elemento de la clase M de todos los modelos de E, aparte de que esa misma estructura se describe como terna ordenada de conjuntos o clases... Y lo mismo podría indicarse respecto a la descripción de la otra componente de la terna, de la teoría T y de los restantes elementos constitutivos incluso en la elaboración del lenguaje formal en el que expresar dicha teoría. En un principio, podría parecer que esta admisión presentaría un carácter contradictorio, dado que la Teoría de conjuntos es un sistema formal, pero ello no sería otra cosa que confundir la teoría intuitiva con la Teoría formal, plenamente axiomatizada, de conjuntos. Tal contradicción se vería desde el enfoque pretendidamente sintáctico que se le confirió a la elaboración de los sistemas formales en su origen y en la cual la clave se centraba en enfocar una teoría desde el plano estrictamente lingüístico, sin observar que dicha teoría lo es de una estructura y, a su vez, ella misma queda englobada en una red de teorías con su estructuración propia. Enfoque estrictamente sintáctico que, por otro lado, y a partir de los teoremas de incompletitud, sabemos que es insuficiente. Ello no es obstáculo para que desde la visión sintáctica, no se hayan obtenido resultados importantes, fundamentalmente referidos a un análisis y crítica de los términos que entran en juego. Por ello, aunque deba hacerse uso de este enfoque, no debe autolimitarse al mismo, sino que debe quedar englobado en lo que podría estimarse, dada la terminología aquí empleada, como enfoque semántico del hacer matemático. Creo que aparece claro, por todo lo dicho, que el método axiomático es, como tal método, independiente respecto a uno u otro enfoque.

Debo precisar dos puntos: *1.* Ambos enfoques -predominio de lo sintáctico, predominio de lo semántico- tienen su lugar en el hacer matemático, aunque se haya discutido y admitido, en general, que el sintáctico es el propio de la Lógica matemática, considerada como un hacer independiente del estrictamente matemático. Y si bien la Lógica formal tiene su propio contenido que no se limita, por supuesto, y como algunos han estimado, al mero análisis lingüístico, la Lógica formal, si se estima como el estudio de los sistemas formales, queda incluida en el hacer matemático; y por lo dicho antes, en íntima conexión tanto con la Teoría de modelos como con la Teoría de la computación.

2. El método axiomático no se limita al hacer intrínseco matemático sino que es una de las herramientas clave para cualquier tipo de trabajo conceptual. De aquí que no sólo en ciencias como la Física se haya adoptado este instrumento, sino en la Filosofía de las ciencias, para sus propios intentos clarificadores, especialmente en el terreno de las Teorías científicas. Sin embargo, el propósito indicado en el Prefacio, me lleva a centrarme aquí en el hacer matemático, dejando para otro lugar el papel instrumental del método axiomático en las llamadas teorías científicas.

5. Me parece conveniente dar un panorama de los dos aspectos que surgen en el hacer matemático, en la bifurcación que el método axiomático ha entrañado y entraña. Es lo que intento, aunque con brevedad, en los dos apartados que siguen: enfoque postulacional, enfoque formal. A los que debe agregarse un tercero, con las consecuencias de otro enfoque, el de las consideraciones epistemológicas que pueden establecerse sobre la teoría asociada a una estructura, consideraciones sólo posibilitadas desde que tales teorías se enfocan como unidades en sí, como nuevos objetos de estudio.

I.I. *ENFOQUE POSTULACIONAL*

En su hacer, el matemático da por admitidos una serie de conceptos, como por ejemplo 'demostración', 'definición', incluso el propio sistema lógico subyacente -si es que el mismo puede separarse radicalmente- y se autolimita a la búsqueda y desarrollo de otra serie de conceptos y proposiciones que los enlacen, y que entran en las restantes componentes del método axiomático, tanto en las definicionales como en las de la disciplina que maneja. Deja de lado, por sobreentendida, la componente inferencia(. El método axiomático presenta para el matemático, y por modo casi exclusivo, un aspecto estrictamente operacional.

En concreto, y a base del enfoqu postulacional, el matemático pretende: obtener nuevos teoremas, 'crear nuevas teorías, comparar las ya existentes, simplificar y difundir las que ya conoce. En estas dos últimas, ello implica la necesidad de búsqueda de nuevos axiomas, incluso de algunas condiciones de carácter más bien estético 1 a que pueden someterse los conocidos, como las de independencia y simplicidad. En cualquier caso, es tópico recurrir en el prefacio del tratado a la 'madurez' del lector, a su previo conocimiento de la 'práctica' matemática.

En líneas esenciales acepta la pragmática del enfoque postulacional, pragmática que se centra en caracterizar una estructura S mediante una definición axiomática y obtener la teoría de dicha estructura, siempre con una denotación aceptada previamente. Instrumentación que, básicamente, compor-ta el dato explícito de los puntos l., 2. y 3. de la Componente A y de los l. y 2. de la

Componente B. Inmediatamente, el método se despliega en los puntos como los siguientes:

6. Definir lo que se entiende por subestructura S' de S y establecer las posibles relaciones entre S y S', así como estudiar las propiedades de S que se mantienen en S', y aquellas que le son propias. Igualmente, pueden considerarse distintas subestructuras de S, con lo cual se posibilita el estudio de las relaciones que las mismas poseen entre sí, es decir, el estudio de la estructura que posee la clase de las subestructuras de una estructura dada.

7. Caracterizar la estructura S/S' respecto a alguna subestructura o respecto a alguna relación notable en S. Por supuesto, ello permite establecer nuevas relaciones entre S y S/S'. Y este punto enlaza con el llamado método de definición por abstracción ya que, gracias a la relación considerada -de equivalencia, más, de congruencia- se puede pasar a un nuevo conjunto base, el dado ahora por S/S', para el cual cabe estudiar si las propiedades que caracterizan las relaciones y operaciones primarias definidas en S son también válidas para S/S'. En otras palabras, si S y S/S' poseen la misma estructura o en qué propiedades se ha enriquecido y completado esta última.

8. Bien tras la definición de S, bien tras el punto 1., se habrán dado ejemplos de realizaciones particulares de S. En algunos casos, tales ejemplos o realizaciones, tales concretizaciones de la estructura, presentan particular interés, que las hace objeto de estudio en sí. En todo caso, permiten asegurar que la definición de S es no vacía porque, al menos, la estructura concreta, el ejemplo particular, muestra la existencia de lo definido. Además, al dar dos realizaciones o concreciones de una misma estructura, se plantea el problema de la existencia o no de morfismos entre ellas así como, de existir, el tipo de dichos morfismos. Por otro lado, el conjunto de todos los morfismos entre dos modelos de una misma estructura constituye, a su vez, otra estructura en cuyo estudio se reitera el proceso hasta ahora señalado.

9. A partir de S o de varias realizaciones de S pueden crearse nuevas estructuras que, en general, mantendrán la de S. Un procedimiento tradicional estriba, junto a los apuntados antes, en crear

el producto cartesiano de dos o más estructuras. Por supuesto ello entraña manejar, a continuación, las proyecciones del producto sobre sus componentes e, igualmente, surge como tema el hecho de que uno de los conjuntos factores se tome como conjunto de operadores sobre el otro conjunto factor en una aplicación del conjunto producto de ambos sobre éste último... Cuando la estructura producto obtenida no mantiene todas las propiedades de los factores puede pasarse a la construcción del producto cartesiano sobre las estructuras S/S' de los conjuntos cociente...

10. Finalmente pueden estudiarse, paso a paso, tipos particulares de la estructura dada, particularizaciones obtenidas agregando al sistema de postulados inicial algún otro postulado que produzca una restricción en la estructura considerada y que satisfagan únicamente algunas realizaciones. Y puede reiterarse el procedimiento con ellas.

Una vez lograda una teoría, la misma puede tomarse como base o instrumento para desarrollar otra teoría «paralela» y es lo que permite establecer teorías con nombre doble, como las de 'geometría algebraica', 'topología combinatoria o algebraica', 'álgebra homológica'...

Las componentes del método postulacional son las cinco de las Componentes A y B y las cinco antes señaladas. Puntos que suponen, por supuesto, un muy breve esqueleto no del proceso creador del matemático, sí del aspecto metodológico, del plano lógico-expositivo donde el método es clave; clave, pero enfocado desde una vertiente pragmática en la cual lo importante queda concretado, respecto al método, en estos diez puntos. Además, el enlace del método axiomático con el enfoque algebraico en la pragmática matemática es patente, aunque pueda aplicarse a teorías aparentemente muy alejadas, como la de espacios topológicos, variedades diferenciables, teoría de la medida y probabilidad, teoría de matroides..., y por lo mismo dicha aplicación conlleva, de modo más o menos inmediato, una posterior algebrización del terreno de estudio en el cual se aplique. Con estas palabras, lo que pretendo es indicar que el método axiomático no es el único instrumento usado por el matemático, sino uno de sus métodos, de sus rodeos y que, en general, no suele utilizarse en estado puro; ni tienen que ir en el orden indicado todas sus componentes, ni todas ellas se presentan siempre, ni solo se presentan ellas.

Para mayor claridad estimo conveniente poner unos ejemplos que muestren la pragmática del método axiomático. Ejemplo modelo lo constituiría el Algebra lineal, con la construcción final asociada de las distintas geometrías, ejemplo más representativo que el de la geometría clásica o el de la teoría de números elemental. Sin embargo, aquí no voy a desarrollar teoría alguna, sino sólo a ejemplificar un esqueleto, un boceto que permita observar las líneas centrales del método axiomático en su enfoque postulacional, tal como se plantea en la práctica matemática primaria o elemental. Esbozo que intenta ser, fundamentalmente, clarificador de los términos que se utilizan en el método axiomático tanto en su versión postulacional –y ya he ido manejando alguno de dichos términos- como en la versión formalista constructiva. Por ello, y en primer lugar, dado el uso que se ha hecho y se hará del término «estructura>> conviene dar la definición de la misma, como precisión de término a utilizar, así como de alguna de las nociones ligadas con el mismo, para poder establecer un paralelismo entre la construcción axiomática desde la vertiente de teoría de modelos, semántica, y el hacer propio del matemático y mostrar que ambos, en el fondo, son idénticos.

Debo indicar que en la descripción aquí apuntada hago uso de la teoría elemental de conjuntos, de la teoría intuitiva, como ya he advertido previamente. No se exige un dominio de la misma, menos aún de la teoría formal de conjuntos. Sí un conocimiento mínimo del vocabulario conjuntista. Exigencia parecida a la implicada en la lectura: todo lector debe saber un mínimo de español para leer, aunque no se le exige dominio alguno de la gramática de ese español -bien clásica, bien generativo-transformacional, si es que ésta la sabe alguien.–. Así, se habla de 'conjunto' y de 'clase', se habla simplemente de relación m-aria dando por sobreentendido que el lector sabe que es un conjunto formado por m-tuplas del conjunto base que se esté manejando, o de operación n-aria en A suponiendo que el lector puede interpretarlo como el conjunto de n+1-tuplas del conjunto base A con la condición de que la relación sea funcional, es decir, con la condición de que dos n+1-tuplas que tienen las n primeras componentes iguales han de tener la última igual, o bien puede interpretar dicha operación como una aplicación de An en A... Son interpretaciones que, cuando se llevan al plano del lenguaje formal, obligan a la elaboración de distintos tipos de lenguaje formal, con el problema de sus interrelaciones. Precisamente los ejemplos elegidos lo son en función de una posterior traducción a lenguajes formales, cada uno de un tipo.

I.I.I. *Estructura*

1. *Dejinición y notaciones*

Una estructura es una terna ordenada .?1= (A, F, R) donde A es un conjunto no vacío llamado conjunto base o universo de.?'/; Fes una familia deoperacionesfinitassobr eA, F =(F_0, F_1, F_2,•..,Fn,..), siendo Fn el conjunto de operaciones n-arias sobre A; R una familia de relaciones en A, R = (Ro, R_1, ..., Rm,...), siendo Rm el conjunto de relaciones m-arias en A. Se impone la condición de que n < *v* y m < ¡..t con *v* y ¡..t como números ordinales, caracterizando ambos números ordinales el *tipo de semejanza* de la estructura, tipo de semejanza que se representa, en general, por *r* = (v, ¡..t).

La clase de todas las estructuras del mismo tipo de semejanza puede ser representada por K(r), y se denomina *clase de semejanza.*

Cuando **R** = O, entonces *.A*= (A, F, 0) = (A, F) se llamará *álgebra* abstracta de tipo *r* = (v). Si F = 0, entonces la estructura *A* = (A, O, R) = (A, R) se denomina *estructura relacional o simplemente estructura de tipo r* = (¡..t).

Como notaciones pueden adoptarse las siguientes: Cuando el tipo sea finito, los índices son finitos y entonces puede escribirse la estructura de la forma

(A, Fo, F¡, ..., Fn-1• Ro, R1, ..., Rm-1)

y si cada conjunto de relaciones y operaciones es, a su vez, finito, los mismos pueden especificarse atendiendo a sus elementos

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{F}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1', \ldots, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2', \ldots, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1', \ldots, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_2', \ldots \rangle$$

En cualquier caso, la estructura cabe representarla, abreviadamente, en la forma

(A, F¡, **R¡**) **i** ∈ *v*, **j** ∈ ¡..t

En general, la cardinalidad, para n > O, de la familia Fn, se supone como mucho numerable, pero a veces el conjunto F_0 puede admitirse que posee cardinalidad cualquiera, identificándose sus elementos con los de un conjunto C de constantes de la estructura. Y -ello porque si una operación f_1 es de aridad O, o de rango O –es decir, pertenece a la clase F_O–, entonces su dominio es un único miembro, la sucesión nula O, y la operación queda perfectamente determinada por el elemento correspondiente, e = f0(0). Se acostumbra a identificar esta operación con su elemento imagen, que recibe el nombre de *elemento distinguido* o también constante de la estructura. De modo análogo, una relación de m-aridad cero indica una propiedad constante de la estructura y puede identificarse con la afirmación «Ser verdadera» o «Ser falsa», atribuidos a elementos o a fórmulas de la estructura que satisfagan dicha relación. Cuando se quiere evitar la aparición de este tipo de predicados relacionales, suele adoptarse el criterio de que $m \in w - 1$. Si la aridad de la operación es 1, entonces el álgebra correspondiente recibe el nombre de álgebra unitaria, siendo su tipo de semejanza (1, 1,...) y, aunque desde un punto de vista matemático puro presente en principio escaso interés, suele ser útil como fuente de contraejemplos.

Igualmente una relación de aridad o rango 1 es un subconjunto de A^1 y puede identificarse con un subconjunto de A, que por analogía al caso de las operaciones se denomina *subconjunto distinguido*.

En todo lo dicho, y en la propia definición, se supone que el conjunto base o universo de la estructura, el conjunto A, es no vacío. Cuando A es un conjunto unitario, el álgebra que lo tiene como conjunto base recibe el nombre de *álgebra degenerada*. Pero hay que observar que los elementos de A no tienen por qué ser objetos unitarios, dado que A puede tomarse, en ocasiones, como la suma directa de dos o más conjuntos, o bien como el producto cartesiano de dos o más conjuntos, en cuyo caso los elementos de A pasarían a ser pares o ternas... ordenados, o bien clases de elementos de un conjunto previamente dado...

2. *E.jemplos*

Como ejemplo de estructura relacional puede indicarse una estructura cuyo tipo de semejanza sea (2), *Ji* = (A, :s:), donde :s: es una relación binaria en A caracterizada por satisfacer las condiciones, los postulados de reflexividad, antisimetría y transitividad; si además satisface la condición de conexión, la relación de orden se diría de orden total. En el primer caso, la estructura $\mathcal{A}$ recibe el nombre de *ordenación ;* en el segundo, la estructura correspondiente recibe el nombre de *cadena* o, también, ordenación total.

De estructura algebraica o álgebras puede indicarse la dada por $(A, *)$ de tipo $\tau = (2)$, y si $*$, como operación binaria, es asociativa, la estructura recibe el nombre de *semigrupo;* si satisface, además de la asociativa, la condición de conmutatividad, semigrupo abeliano.

Algebra de tipo $(2, 2, 1, 1, 0, 0)$ es la dada por $(A, +, \cdot, -, {}^{-1}, 0, 1)$ que constituye un cuerpo si las álgebras $(A, +, -, 0)$ y $(A, \cdot, {}^{-1}, 1)$ son grupos y existe la distributividad de $\cdot$ respecto a $+$. Por supuesto que la estructura de grupo puede caracterizarse en la forma $G = (A, \cdot, {}^{-1}, e)$ con $\cdot$ como operación binaria asociativa en A, ${}^{-1}$ como operación unitaria involutiva —la que aplica cada elemento en su simétrico o inverso— y e como elemento distinguido. Su tipo, desde esta perspectiva, sería $(2, 1, 0)$. Es claro que la operación unitaria ${}^{-1}$ de simetrización puede suprimirse en beneficio de la proposición que establece que cada elemento de A posee un simétrico o inverso respecto a la operación binaria $\cdot$, aunque tal proposición hace intervenir también el elemento distinguido de la estructura de grupo, el elemento unidad o neutro.

Un anillo parcialmente ordenado estaría caracterizado como una estructura $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, 0, -, \leq)$ tal que la estructura $(A, +, \cdot, -, 0)$ sea un anillo, $(A, +, -, 0, \leq)$ sea un grupo ordenado y, para todo $(a, b, e) \in A^3$, las condiciones $a \leq b$ y $0 \leq e$ impliquen $a \cdot e \leq b \cdot e$ y $e \cdot a \leq e \cdot b$. Un anillo ordenado, o un grupo ordenado, constituyen ejemplos de estructuras generales, ya que combinan tanto la vertiente algebraica como la relacional.

Se destaca que el tipo de semejanza no caracteriza unívocamente la estructura que describe. Así, álgebras de tipo $(2, 2)$ pueden ser los anillos $(R, +, \cdot)$ y los retículos $(R, \wedge, \vee)$. Incluso en el caso de los retículos no distinguirían entre uno y su dual. Recíprocamente ocurre lo mismo. Así, en el ejemplo antes mencionado, el grupo ha venido caracterizado por la estructura $G = (A, \cdot, {}^{-1}, e)$ que es del tipo $(2, 1, 0)$, que puede identificarse con el tipo $(2, 1)$. Pero también puede caracterizarse la estructura de grupo por $G = (A, \cdot)$ mediante los postulados apropiados y esta estructura es del tipo (2). Desde un enfoque puramente inscripcionista, formalista puro, ambas estructuras son diferentes. Pero desde un enfoque pragmático, desde el álgebra, se sabe que ambas son equivalentes. Y esta equivalencia viene asegurada por la equivalencia definicional. Aunque sea anticipar, la misma sólo puede venir asegurada cuando se den las condiciones necesarias y suficientes para el establecimiento de la noción de definición. Establecimiento propio del método axiomático. Aquí baste indicar que la misma es interior a un lenguaje formal en el que pueden expresarse las proposiciones correspondientes a las estructuras que se manejen. En este caso, puede demostrarse que ambas estructuras de grupo, que desde el enfoque algebraico se considerarían como pertenecientes a la misma clase de semejanza, por equivalencia, son definicionalmente equivalentes en un lenguaje formal de primer orden. Equivalencia definicional que constituye un problema porque, como demostró Presburger, las estructuras (w, +) y (w, ·) no son equivalentes definicionalmente en lenguaje de primer orden, aunque sí lo son en lenguaje formal de segundo...

3. *Nociones fundamentales*

El propósito de la teoría de las álgebras universales se centra en hallar y estudiar todas las propiedades de las estructuras que permanecen invariantes por isomorfismo. Conceptos clave o básicos se manifiestan las nociones de subestructura, morfismo, congruencias... Me limito, aquí, a dar un esquema de tales nociones.

a. *Subestructuras*

Sea $\mathcal{A}$ una estructura de clase de semejanza K(-r) y conjunto base A; sea B un subconjunto de A, no vacío. Se dice que B es *cerrado* bajo la operación n-aria f_0 si para toda n-tupla $(b_1, b:l, \ldots, b_0)$ E B", se verifica $f_0(b_1, \ldots, b_0)$ E B. En particular, B es cerrado bajo las operaciones de cero argumentos cuando las constantes de $\mathcal{A}$ pertenezcan precisamente al conjunto B.

Se dira que $\mathcal{S}$ = (B, F_8, R_8) es una *subestructura* de A –o bien que $\mathcal{A}$ es una *extensión* de $\mathcal{S}$– cuando y sólo cuando B sea cerrado bajo las operaciones de $\mathcal{A}$ y pueda considerarse como una estructura respecto a las restricciones a B de las operaciones y relaciones sobre A. Por la unicidad de las restricciones, dado un conjunto B, O =/: B C A, existe una única subestructura deAsobre el conjunto base B. He escrito F_8 y R_8 para indicar que las operaciones de F han de realizarse sobre los elementos de B y que las relaciones R hay que tomarlas en B igualmente, aunque por abuso de lenguaje no se mantenga dicha notación en el futuro, si es que hay que manejarlas, siendo el contexto el que indica a qué conjunto hacen referencia.

Puede comprobarse que si (B¡, F. R), para i E 1, son subestructuras de *A* y B = ∩ B; =/: O, entonces (B, F, R) es una subestructura de *A*. Se dice *subestructura engendrada* o *enerada* por un conjunto A_0, A_0 C A, la menor subestructura que contiene a A_0. El conjunto Ao se dice, en general, *conjunto enerador* de la subestructura B y a sus elementos, generadores de dicha estructura.

Si dos estructuras tienen el mismo conjunto base y las mismas operaciones, pero las relaciones de una contienen a las de la otra, se dirá que la primera es una *expansión* de la segunda.

b. *Morjismos*

Sean *A* y *f!iJ* dos estructuras de la misma clase de semejanza *K(-r); ./1* =(A, F, R) y *::iJ* = (B, F', R'). Una aplicación <p:A — B se dirá *morjismo* entre ambas estructuras si es una aplicación entre los conjuntos base tal que para toda sucesión (a) = (ao, ..., an) E *Aw* se verifican las dos condiciones siguientes, tanto para cada operación fn de Fn y toda relación rm de Rm, como para cualesquiera n y m de *v* y *p.* respectivamente

1. 'P(fn(<l(¡, ..., an-J)) = J'(<p(il¡_J), ..., <p(an-1))
2. <p(rm(il¡_h ..., am-I)) = r'(<p(a¡¡), ..., <p(am-1))

que pueden escribirse abreviadamente como

1'. <p(fn (a)) = **f** (<p(a))
2'. <p(rm (a)) = r:n (<p(a))

En particular, si *<p* es una aplicación suprayectiva de A en B, entonces el morfismo recibe el nombre de *epimorjismo*, mientras que si es inyectiva, el de *monomorjismo*. Finalmente, si la aplicación es biyectiva, entonces *'P* recibe el nombre de *isomorfismo* y las estructuras se dirán isomorfas, representándose gráficamente en la forma *A* = *$*.

Cuando existe un epimorfismo, el conjunto <p(A) puede tomar-

se como base de una estructura de [iJ que recibe el nombre de *imagen* homomorfa de .*A*.

Pueden demostrarse una serie de propiedades respecto a los morfismos entre estructuras de la misma clase de semejanza, como por ejemplo, que la composición de morfismos también es morfismo -respectivamente epimorfismo, monomorfismo, isomorfismo-; que la recíproca de un isomorfismo es también isomorfismo o que la identidad es un isomorfismo. Lo cual indica que la relación '=· entre estructuras de la misma clase de semejanza es una relación de equivalencia, por lo que puede asociarse con cada estructura *A* su tipo de isomorfismo, su clase de equivalencia asociada.

También puede demostrarse una proposición aparentemente trivial, pero de gran importancia como la siguiente:

> Si *A* es una estructura de la clase K(r) y existe una biyección f de A en un conjunto B, entonces existe una única estructura fiJde clase K(*T*) tal que f: .?'/ =.JJJ.

Igualmente puede demostrarse que si ¡p es una aplicación del conjunto de generadores de una estructura .?/ en una $, de la misma clase de semejanza, que puede ser extendida a un morfismo f de ,}'/ en dJ, esta extensión es única.

c. *Congruencias*

Ligado con la noción de epimorfismo se tiene la de congruencia en un álgebra, noción que viene dada por la relación de equivalencia {) definida sobre A, que para cada operación fn viene dada por

a; = b;(8) entonces ¡p(a;) "':¡p(b;) (8) para i ∈ (1, n]

siendo n el número de argumentos de fn y a¡ E A, b; E A. Para cada clase de congruencia puede definirse, de modo natural, la operación correspondiente en el conjunto cociente *A/8*, por lo que *A/8* puede tomarse como conjunto base de una nueva álgebra con las operaciones sobre clases de equivalencia, y del mismo tipo de semejanza que *A*. Nueva álgebra que puede simbolizarse por .*YI/8* = (A/0, F). Y con ello se tiene el epimorfismo natural de *A* sobre .*A/0* de cada elemento en su clase correspondiente.

d. *Productos directos y ultrapruductos*

Si ,,.;,, para i E 1, es una familia de estructuras de la misma clase de semejanza, el *producto cartesiano* o *directo .J'l,* que puede escribirse como *JI* = 11 A;. se define como aquella estructura cuyo
oEI
conjunto base es el producto cartesiano de los conjuntos base de las estructuras, es decir, A = n A¡, mientras que las operaciones y
oEI
las relaciones se definen componente a componente; en otras palabras. si a = (a.,...., an) E n A¡, para todo 'Y < *T,* entonces,
-I oEI
para f, y ry operaciones y relaciones, respectivamente,

I. f,(ao•..., an 1) (i) = f,(ao(i)...., an 1(i))
2. rv(ao•..., an -1) si y sólo si rv(ao(i), - , an -1(i)) para todo i

Al igual que en las álgebras, se define la *proyección* como la aplicación del producto directo *A* sobre cada una de las componentes A;, es decir, a a(i). Cada proyección es un epimorfismo de *A* sobre A;, que por supuesto engendra la correspondiente relación de congruencia en *A*. Y puede reiterarse la marcha esbozada en los puntos anteriores respecto a las subestructuras de esta nueva estructura, morfismos...

Hay que observar, sin embargo, que como las operaciones y relaciones se definen componente a componente, resulta que la estructura producto puede no conservar la estructura de cada una de las componentes. Si éstas son, por ejemplo, grupos, entonces también lo es *A,* pero si las .A¡ son cuerpos, entonces *.J* no tiene por qué ser cuerpo sino que, como mucho, será anillo conmutativo -y ello porque cada elemento del cuerpo ha de tener inverso, pero si se elige un elemento cualquiera *a* de *A* entonces *a* será inversible si y sólo si cada una de sus componentes lo es, lo cual no tiene por qué ocurrir-. Para evitar este hecho, la construcción debe modificarse convenientemente. Y la modificación se centra en manejar no los objetos y sus componentes sino las clases de equivalencia -mediante una relación adecuada- a la que eso. elementos y componentes pertenezcan, lo cual permitirá la uniformidad pedida, es decir, permitirá que lo que se verifique de cada una de las estructuras A; de la familia, también se verifique en la estructura *.7/* producto. Esta construcción es la de ultraproducto apoyada en el concepto de ultrafiltro -que será la clave para obtener la relación de equivalencia adecuada, y cuyo concepto supongo conocido por parte del lector-, construcción que esbozo a continuación:

Sea $\mathcal{A}_i$, $i \in I$, una familia de estructuras de la misma clase de semejanza y F un ultrafiltro en el álgebra booleana . (1). Sea $A = \prod_{i \in I} A_i$. Se define una congruencia módulo F de la manera siguiente, donde f y g son elementos cualesquiera de A:

$$f \equiv g(F) \text{ si y sólo si } \{i \mid f(i) = g(i)\} \in F$$

Que es de congruencia, es de demostración inmediata. Representaré por [f] la clase de equivalencia a la que f pertenece.

Ultraproducto de $\mathcal{A}_i$ con respecto a F –y que simbolizo por $\prod_F \mathcal{A}_i$– es la estructura cuyo conjunto base es el conjunto de todas las clases de equivalencia [f] que represento por $O_F A_i$, con $f \in \prod_{i \in I} A_i$, y donde las operaciones y relaciones se definen por

1. $f_\gamma([f_0], \ldots, [f_{n-1}]) = [f]$ si y sólo si $\{i \mid f_\gamma(f_0(i), \ldots, f_{n-1}(i)) = f(i)\} \in F$
2. $r_\gamma([f_0], \ldots, [f_{n-1}])$ se satisface si y sólo si $\{i \mid r_\gamma(f_0(i), \ldots, f_{n-1}(i))\} \in F$

Por supuesto hay que comprobar que ambas definiciones son uniformes o, en otras palabras, que están bien definidas. Pero lo que importa destacar es que la noción de ultraproducto no es otra que la estructura cociente módulo un ultrafiltro sobre el producto cartesiano de los conjuntos base de cada estructura componente y es tal que si se predica alguna propiedad de cada estructura entonces lo mismo se predica del ultraproducto –y enuncio una versión informal del teorema de Lós, fundamental en la teoría de modelos-.

Tanto en el concepto de producto directo como en el de ultraproducto las estructuras $\mathcal{A}_i$ de la familia no tienen por qué ser, todas, distintas entre sí. Cuando son todas iguales se tendría la potencia directa o la ultrapotencia , respectivamente ...

1.1.2. *Planos proyectivos*

1. *Definición y primeras propiedades*

Un plano proyectivo Π es un conjunto de puntos con ciertos subconjuntos notables o distinguidos -llamados rectas- que satisfacen los postulados:

A.l. Dos puntos distintos están contenidos en una y sólo una recta.

A.2. Dos rectas distintas contienen un punto y sólo uno en común.

A.J. Existen cuatro puntos tales que no hay tres de ellos en la misma recta.

Si el número de puntos del plano es finito, la geometría se dirá finita. En particular, se llamará geometría de Galois si el cuerpo base sobre el cual pueda construirse es un cuerpo finito o de Galois.

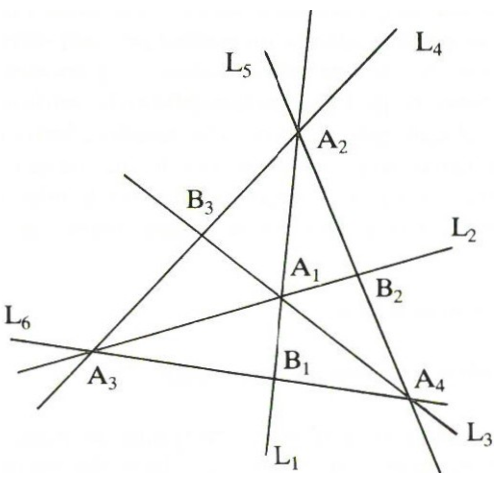
Definición:

l. La recta L que contiene dos puntos distintos A, B, se dirá «recta que une A y B».

2. El único punto P que tienen en común dos rectas L_1 y distintas, se llamará «intersección de L_1 y >>.

3. Se llamará «Orden>> de un plano proyectivo al número de puntos de cada recta menos uno.

Ejemplo. El plano proyectivo de orden 2 que posee 7 puntos y 7 rectas puede representarse esquemáticamente en la forma indicada en el diagrama adjunto.



Si en lugar de utilizar las letras A;, B¡, i E (1, 4), j E [1, 3), para representar los puntos se adoptan los elementos de X = {0, lP – {(O, O, 0)}, las ecuaciones homogéneas de las rectas representadas tendrán por coeficientes los elementos de X, con (0, O, 1) como recta del infinito, que no es otra que la representada -la no representada- por $B_1B_1B_3$ en la figura adjunta.

Proposición l. Toda recta contiene al menos tres puntos.

Demostración. Sean los puntos A_1, A_1, A_3, A4 tales que ninguna de sus ternas pertenezca a una recta. El axioma A.3. asegura su existencia. Por A.l. se tendrán las Iectas L; dadas por las columnas del cuadro siguiente:

L¡		y	L4	Ls	L6	L.¡
A¡	A¡	A¡	*Al*	*Al*	A3	B¡
A2	A3	A4	A3	A4	A4	B2
8¡	81	B3	83	82	8¡	83

donde B_1, B_2, B_3 son los puntos de intersección de las rectas — asegurada su existencia por A.2.-; estos puntos son distintos entre sí y diferentes de los A_1 como puede mostrarse fácilmente. Además, si existe otra rectaL que no pase por A_1 cortará a L_1, y L_3 en tres puntos distintos. De esta forma se han construido rectas con tres puntos, al menos.

Proposición 2. Existen cuatro rectas tales que cada tres de ellas no contienen el mismo punto.

Dem. En la construcción realizada en la *Dem*. de la Proposición l., basta comprobar que cuatro rectas -por ejemplo, L_1, - L_5, L_6-, tomadas de tres en tres carecen de intersección común.

Cabe observar que si se mantienen los axiomas A.l. y A.2., pero intercambiando entre sí 'punto' por 'recta' y 'contener' por 'estar contenido', se obtendrán otras dos proposiciones, A'.1. y A'2. que pueden tomarse como nuevos axiomas a los que agregar la Proposición 2, enfocada ahora como axioma, obteniéndose un conjunto de proposiciones {A'l., A'2., P.2} que caracterizará un sistema dual de plano proyectivo, sistema dual que recibe el nombre de plano dual. Este *principio de dualidad* permite establecer de momento, una nueva proposición:

Proposición 3. Todo punto está contenido, al menos, en tres rectas.

La demostración será la misma que la de P.l. mediante el cambio adecuado de los términos duales. De aquí que no se lleve a efecto.

Manteniendo el principio de dualidad, el Axioma 3 aparecería ahora como una proposición a demostrar en el plano dual. Demostración que no se hace por los mismos motivos que en el caso anterior, indicándose, meramente, que dicha proposición se obtiene por dualidad.

El número de puntos contenido en una recta o el de rectas que pasan por un punto ha sido acotado inferiormente por estas proposiciones. Como pregunta cabe plantearse si también existe cota superior y, aún más, si se puede determinar el número exacto de puntos que contiene una recta y el número de rectas que pasan por un punto determinado. Es a lo que responde la proposición siguiente, cuya demostración ni siquiera esbozo y donde supongo que una recta L de n contiene n + 1 puntos, por lo que n 2, según establece la Proposición 1.

Proposición 4. En un plano proyectivo de orden n las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) Una recta contiene exactamente n + 1 puntos
b) Toda recta contiene exactamente n + 1 puntos
e) El número de rectas en el plano es $n^2 + n + 1$
a') Un punto está contenido en exactamente n + 1 rectas
b') Todo punto está contenido en exactamente n + 1 rectas.
e') Hay exactamente $n^2 + n + 1$ puntos en el plano.

Esta Proposición 4 es la que justifica el ejemplo antes mencionado del plano proyectivo de orden 2, que exige que cada recta contenga 2 + 1 puntos, cada punto esté contenido en 2 + 1 rectas, que existan 4 + 2 + 1 = 7 puntos y 7 rectas en dicho plano, donde la recta que contiene a B_1, B_2 y B_3 es la recta del infinito de coordenadas homogéneas (0, O, 1).

Definición 4. Dos planos proyectivos 7T¡ y 71'2 se dicen isomorfos cuando y sólo cuando existe una aplicación biyectiva f entre los puntos de 7T¡ y *7Tz* y una aplicación g biyectiva entre las rectas de 7T¡ y $7T_2$ tal que si P E L entonces f(P) E g(L).

Es claro que f y g se determinan una a otra y, además, cualquier biyección puntual determina un isomorfismo entre los dos planos siempre que satisfaga la condición de que si dados tres puntos de 7T¡ los mismos están alineados, entonces sus imágenes son tres puntos de *1r2* que también están alineados. Por dualidad, la biyección, en lugar de ser puntual y conservar la alineación, puede ser de rectas y entonces debe cumplir la condición de mantener la incidencia de tres rectas en un punto, y sus imágenes incidir en un punto, el punto imagen.

Si en la última definición en lugar de manejar planos proyectivos distintos se maneja un único plano, entonces las aplicaciones isomorfas reciben el nombre de *colineaciones.* Se comprueba, por ejemplo, que la identidad de 7T es una colineación. Problema interesante es el de averiguar la estructura del conjunto de todas las colineaciones de un plano proyectivo, estructura que puede comprobarse es la de grupo, admitiendo siempre que la composición, la operación binaria entre colineaciones, venga dada por la composición clásica de aplicaciones.

Por otro lado, puede plantearse la cuestión de si el plano proyectivo es, o no, arguesiano. Se sabe que si en lugar de considerar el plano proyectivo se trabajara en el espacio proyectivo, el postulado de Desargues sería una consecuencia lógica de los axiomas A.1., A.2. y A.3., pero esto no ocurre en el plano proyectivo, por lo que pueden existir planos arguesianos y planos no arguesianos. Y se tiene un posible campo de trabajo para la caracterización de las propiedades específicas de cada uno de ellos.

2. *El álgebra como instrumento*

Si hasta aquí se han intentado señalar algunas consecuencias de los axiomas y la posibilidad de estudiar los isomorfismos y algunos tipos especiales de planos, puede estudiarse el enlace geométrico con el álgebra, es decir, la posibilidad de introducir o no coordenadas -aunque en el ejemplo que he puesto he admitido, de forma implícita, no sólo tal posibilidad, sino que he dado las coordenadas correspondientes de los puntos-. Es cuestión que depende en cierta medida de la respuesta a la cuestión apuntada en el último párrafo porque si el plano es arguesiano entonces puede tomarse cualquier cuerpo como cuerpo base, pero si el plano es no-arguesiano, entonces la estructura de cuerpo no es válida para que las posibles coordenadas se tomen sobre el mismo. Cuál sea la estructura algebraica conveniente es problema resuelto en los entornos de 1943 por Hall creando los anillos ternarios o de Hall como estructura base adecuada para dotar de coordenadas a los planos proyectivos no-arguesianos.

Por supuesto este enlace con el álgebra -además de haber posibilitado la creación de Hall- permite el estudio de las propiedades de los planos sometidos a ciertas condiciones. Así, por ejemplo, puede establecerse:

Proposición 5. Dada una colineación f de un plano proyectivo que deja invariante una recta L y todos los puntos sobre L, existe un punto P tal que f deja invariante P y toda recta que pase por P. Si f no es la colineación identidad, entonces f no fija ningún otro punto ni recta del plano.

Definición.

5. Se denomina *centro* de la colineación f al punto P que permanece invariante por f.

6. Se denomina *eje* de la colineación f a la recta L que permanece invariante por f.

7. Se denomina *colineación central* a la que satisface la condición expresada en la Proposición 5. Si P no está en L la colineación se denominará *hom gía* y si P está en L, *elación.*

Como Proposición cabe demostrar que las elaciones constituyen un grupo G(L), que es el de las traslaciones de eje L. Y, con el enlace algebraico, puede interrogarse por las condiciones que harán abeliano a G(L), así como por el orden de cada elemento del grupo...

3. *Tipos de planos*

Si la construcción algebraica puede continuar en la línea esbozada en 2., es factible volver a la Proposición 4. y observar que las condiciones *a), b)* y *e)* bastan para caracterizar un plano proyectivo –y, por dualidad, lo mismo podría afirmarse respecto a *a'), b')* y *e')*– de orden n. Una pregunta natural es la de si existen planos proyectivos finitos para todo número natural n. Pregunta que puede prolongarse para saber si existen, para todo n, planos arguesianos o, si no pueden serlo, sistemas de Hall. Es pregunta para cuya respuesta habrá que acudirse no ya al álgebra -mediante la teoría de grupos, la de cuerpos y la de anillos ternarios-sino a la teoría de números.

Una respuesta, en este tipo de cuestiones, es la dada en 1949 por Bruck-Ryser, que establece que no puede existir plano proyectivo de orden n cuando $n = 1, 2\ (4)$, salvo que n pueda expresarse como suma de dos cuadrados enteros, es decir, salvo en el caso en que $n = a^2 + b^2$. Con esta condición se sabe que no pueden existir planos de órdenes 6, 14, 21, 22... Por otro lado, es demostrable que si $n = pk$ con p primo y k natural, entonces existen planos proyectivos sobre el cuerpo finito de pk elementos. Con esta condición puede afirmarse la existencia de planos proyectivos de órdenes 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 13...

Queda, como problema, determinar si hay planos proyectivos de órdenes 10, 12, 15, 18... Y, quizá más importante, si existe o no algún proceso o algoritmo global que unifique los criterios parciales hasta ahora conocidos.

Igualmente, si los planos de distintas órdenes son o no isomorfos entre sí. Para los planos de órdenes 2 a 8 se demuestra que todos ellos son isomorfos entre sí o, en otras palabras, que sólo hay un plano proyectivo para cada uno de dichos órdenes. Para $n = 9$, Veblen-Wedderburn demostraron en 1907 la existencia de un plano no arguesiano y, de momento, se conocen 4 planos de orden 9 no isomorfos entre sí. Como problema abierto queda el de averiguar para qué valores de n, $n > 9$, y $n = pk$, existe más de una geometría, más de un plano.

Junto a problemas abiertos como los anteriores y los enlaces con la teoría de grupos, cuerpos, con la teoría de números, los planos proyectivos que enlazan con los cuadrados latinos. Y ello porque siempre que existe una geometría finita de orden n, puede obtenerse un sistema de $n-1$ cuadrados latinos de orden n, ortogonales dos a dos. Y, recíprocamente, si se tiene un sistema de $n-1$ cuadrados latinos mutuamente ortogonales se puede construir una geometría de orden n.

Finalmente debo indicar, en este breve esquema, que los planos proyectivos pueden estimarse como casos particulares de los sistemas de Steiner, caso particular de parámetros $(2, n+1, n^2+n+1)$.

4. *Otros puntos*

En la marcha metodológica seguida no se han indicado algunos puntos, como por ejemplo la existencia de subplanos con las posibles relaciones entre los órdenes de los mismos y el orden del plano -relaciones entre las que menciono el resultado de Bruck que establece que si un plano de orden n posee un subplano de orden m entonces $n = m^2$ o bien $n \geq m^2 + m$- y que permitiría una clasificación de los posibles subplanos de un plano dado...

Sin embargo, lo que me interesaba era, básicamente, indicar dicha marcha metodológica, con sus saltos, sus enlaces con otras materias, el permanente planteamiento de cuestiones -algunas sin respuesta global hasta ahora- y no, precisamente, en marcha lineal, dada de una vez para siempre. El método postulacional, pragmático como una red, ciertamente, pero no como molde rígido, invariable y esterilizador.

1.1.3. *Lenguaje de categorías*

Definición 1. Una *categoría* C consiste en

a) Una clase X de objetos;

b) Para todo par ordenado (x, y) de objetos de X, existe un conjunto $Hom(x, y)$ de morfismos f de dominio x y contradominio y;

c) Para toda terna ordenada (x, y, z) de objetos de X y todo par de morfismos f y g, $f \in Hom(x, y)$, $g \in Hom(y, z)$, existe un morfismo h asociado que se denomina el compuesto de f y g, $h = g \circ f \in Hom(x, z)$;

d) La composición de morfismos definida en c) ha de satisfacer los postulados

A.1. Asociatividad: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

A.2. Identidad: Para todo objeto x de X existe un morfismo

1_x, $1_x \in \mathrm{Hom}(x, x)$, tal que si $f \in \mathrm{Hom}(x, y)$, entonces $f \circ 1_x = f$, y tal que si $g \in \mathrm{Hom}(y, x)$, entonces $1_x \circ g = g$.

Convenios de escritura

Dados dos objetos x, y de X, en lugar de indicar que f es uno de sus morfismos asociados mediante la notación $f \in \mathrm{Hom}(x, y)$, se representará por $f : x \to y$ o bien por $x \xrightarrow{f} y$. De esta forma, la composición se indica mediante un triángulo de flechas con el adjetivo de conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & y \arrow[d, "g"] \\
 & z
\end{tikzcd}
$$

Que las identidades a izquierda y derecha son únicas y coinciden cuando x = y, se obtiene como proposición, consecuencia inmediata de los postulados.

Ejemplos

1. La clase X de los conjuntos y de las funciones entre dichos conjuntos.

2. La clase de los conjuntos finitos y las aplicaciones entre conjuntos finitos.

3. Cuando los objetos x de X poseen una estructura, como la de grupo, entonces la clase X de objetos lo es de los grupos mientras que los morfismos lo son de morfismos entre grupos.

4. . Como en el caso anterior, pero ahora se toman como objetos x de X los espacios topológicos y como morfismos f las aplicaciones continuas entre dichos espacios topológicos.

5. Los objetos de la clase X son los intervalos de R y los morfismos las aplicaciones de variable real derivables.

Definición 2. Una *subcategoría* C' de C es una categoría tal que

a) Los objetos de C' son objetos de C;

h) Para objetos cualesquiera x', y' de C' se tiene $Hom_{C'}(x', y')$ e $Hom_C(x', y')$;

e) Si f' y g' son morfismos de C' entonces su composición en C' es igual a su composición en C.

Ejemplos. La categoría del ejemplo 2 anterior es subcategoría de la indicada en el ejemplo l. Sin embargo las categorías indicadas en 3. y 4. no son subcategorías de l., porque sus objetos poseen estructura determinada que condicionará las propiedades que han de cumplir los morfismos entre las mismas.

Si asociada a una categoría pueden mencionarse subcategorías, también puede considerarse como categoría asociada la de los morfismos: categoría en la cual los objetos son, ahora, los morfismos f, $f: x \to y$, mientras que los morfismos de dominio f, $f: x \to y$, y contradominio f', $f': x' \to y'$, serán los pares de morfismos g y ·, $g: x \to x'$, $g': y \to y'$, tales que el diagrama siguiente sea conmutativo

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & y \arrow[d, "g'"] \\ x' \arrow[r, "f'"] & y' \end{tikzcd}$$

Igualmente pueden construirse nuevas categorías mediante el producto cartesiano de categorías dadas, así como mediante la suma directa de las mismas. Y es en términos de productos como pueden interpretarse otra serie de nociones del lenguaje categórico. Sin entrar en detalles me limito a señalar algún concepto más. Así, el de objeto inicial de una categoría:

Definición 3. Un objeto x de $\mathcal{C}$ se dice *objeto inicial* si para cada objeto y de $\mathcal{C}$, el conjunto $Hom(x, y)$ consta de sólo un elemento.

Por dualidad puede establecerse el concepto de objeto terminal:

Definición 4. Un objeto y de $\mathcal{C}$ se dice *objeto terminal de* $\mathcal{C}$ si para todo x de $\mathcal{C}$ el conjunto $Hom(x, y)$ consta de sólo un elemento.

En el ejemplo 1 y en el 4, el objeto inicial es el conjunto vacío; en el ejemplo 3, el objeto inicial y el terminal es, a la vez, el grupo trivial.

En este esquema del lenguaje categórico podían estimarse tipos particulares de morfismos como los monomorfismos o los epimorfismos caracterizándolos no ya en términos de inyectividad o suprayectividad como se realizó al hablar de estructura en general en 1.1.1, sino en términos de composición a izquierda y derecha, respectivamente. Igualmente, cabe considerar el dato de dos categorías y la posibilidad de establecer entre ellas alguna aplicación natural; es decir, alguna aplicación que, al igual que los morfismos, conserve las estructuras -en este caso, la de categoría, es decir, deben conservar las composiciones y las identidades-. Este tipo de aplicación, ya entre categorías, recibe el nombre de *juntor*, del que pueden distinguirse dos tipos: el covariante y el contravariante, que son duales entre sí porque si un funtor es covariante puede encontrarse una categoría dual en la que aparezca como contravariante, y recíprocamente. Por supuesto puede establecerse alguna relación entre funtores de la misma varianza, como la transformación natural entre ellos, así como plantear las cuestiones ligadas con la extensión de aplicaciones, etc.

A partir del lenguaje de categorías pueden definirse, por ejemplo, y reiterando el método postulacional, nuevos conceptos. Como mera indicación señalo el de topo, que permite introducir algunas nociones más, aquí, fundamentales en el lenguaje esbozado de categorías:

Definición 5. Un *topo* es una categoría T que satisface los axiomas.

T.1. Existen límites finitos en T.

Intentando aclarar los términos, esta proposición quiere decir que, para cada par de morfismos $x_1 \xrightarrow{f} y \xleftarrow{f} x_2$ existe un diagrama conmutativo como el siguiente

$$\begin{tikzcd} \arrow[r, dash] & x_2 \arrow[dd, "f_2"] \\ z & \\ x_i \arrow[r, dash] & y \end{tikzcd}$$

T.2. La categoría T es cartesiana cerrada.

En otras palabras, los morfismos entre dos objetos x, y forman un nuevo objeto yx de la categoría.

T.J. Existe un clasificador de objetos.

Quiero decir, un objeto n de la categoría y un morfismo v,

D. tal que para cada monomorfismo x' — x existe un único morfismo x — fl -llamado característico- tal que eJ siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} x' \arrow[r, no head] & x\ v \arrow[d] \\ {} \arrow[r, no head] & \Omega \end{tikzcd}$$

Por supuesto que el conjunto de axiomas para definir un topo puede ser simplificado. Pero no entro en ello. Como ejemplo de topo, inmediato, puede indicarse el de la categoría de conjuntos dada en el ejemplo I. Y meramente indico que la teoría de topos constituye el enlace con la geometría algebraica y la diferencial ·mediante el estudio de haces, a la vez que puede constituir el marco algebraico de la lógica intuicionista, con la justificación, y ejemplificación, del rechazo de la reducción al absurdo.

1.1.4. *Teoría elemental de grupos*

Definición 1. Un *grupo* es un conjunto G dotado de una ley de composición interna u operación binaria en G que satisface los postulados
1

G.'f. Asociatividad: (x o y) a z = x o (y o z)
G.2. Existe un elemento *e* en G tal que para cualquier elemento x de G, se verifica e o x = x o e = x;
G.J. Todo elemento x de G posee, respecto a e, un elemento inverso o simétrico x', también en G; es decir, x o x' = x' o x = e.

Si a la definición de grupo se agrega un cuarto axioma,

G.4. Conmutatividad: $x \circ y = y \circ x$

el grupo (G, o) se dirá abeliano. En general, y por mera convención de escritura, cuando el grupo que se está manejando es abeliana la operación suele representarse de modo aditivo, es decir, (G, +). También por convención, o abuso de lenguaje, siempre que se habla de grupo (G, o) como estructura se identifica con el conjunto base G.

Consecuencias inmediatas

G.5. Ley de cancelación o simplificación: $a \circ x = a \circ y \Rightarrow x = y$.

Dem. Basta componer la igualdad de la hipótesis con a' y aplicar G.J. y G.2.

G.6. En G existe solución única de la ecuación $a \circ x = y$

Don. Componer con a' los dos miembros de la ecuación y aplicar G.3. y G.2. La unicidad resulta de G.5.

G.7. Los elementos neutro y simétrico de cada elemento de G son únicos.

Dem. Por reducción al absurdo.

Otros sistemas de axiomas

En lugar de utilizar el conjunto formado por las proposiciones {G.J., G.2., G.3.} pueden emplearse otras proposiciones como base axiomática para definir la estructura de grupo. Así, puede obtenerse otro sistema si en G.2. y G.3. se suprime la condición de conmutatividad para el neutro y los simétricos, quedando entonces las proposiciones correspondientes como las que aseguran la existencia de elemento neutro a la izquierda (o derecha) y de elemento simétrico a la izquierda (o derecha), únicamente. También puede reemplazarse el sistema por {G.l., G.6.} con la condición de ser G conjunto no vacío, condición que afirma de modo implícito el axioma G.2.

Cuando el cardinal de G es finito, el grupo se dirá de orden finito. En este caso un sistema de axiomas equivalente puede ser el dado por G.1. y G.5., con la condición de que G sea no vacío. Cuando el orden de un grupo es finito, el mismo puede venir caracterizado por la tabla de Cayley correspondiente.

Ejemplos

1. Las biyecciones de un conjunto sobre sí mismo, respecto a la composición de aplicaciones, constituye un grupo. Se denomina *grupo simétrico* de X, S(X), y su orden no depende más que del cardinal de X y, además, para $n \geq 3$, no es abeliano.

2. Ejemplos también clásicos son los procedentes de Geometría, como el conjunto de rotaciones de un cuadrado que lo dejan invariante o el de los movimientos de un rectángulo que lo dejan invariante, o el de las raíces cuartas de la unidad con su representación geométrica asociada... Las tablas de Cayley que caracterizan a estos últimos grupos son las dos siguientes:

	a_0	a_1	a_2	a_3
a_0	a_0	a_1	a_2	a_3
a_1	a_1	a_0	a_3	a_2
a_2	a_2	a_3	a_0	a_1
a_3	a_3	a_2	a_1	a_0

	a_0	a_1	a_2	a_3
a_0	a_0	a_1	a_2	a_3
a_1	a_1	a_2	a_3	a_0
a_2	a_2	a_3	a_0	a_1
a_3	a_3	a_0	a_1	a_2

3. Los polinomios en una indeterminada de exponente menor o igual que n constituyen un grupo aditivo. Y, en los ejemplos que componen el tema 1.1.2., han aparecido reiterados grupos, como el de las colineaciones, las elaciones...

Un procedimiento inmediato para la obtención de nuevos grupos a partir de grupos ya dados consiste en aplicar la construcción del producto cartesiano, respecto a la cual la propiedad de grupo es hereditaria. Así, a partir de un grupo como Z_2 puede obtenerse el grupo $Z_2 \times Z_2$, cuya tabla de Cayley ha sido dada antes.

Definición 2. Un subconjunto H de G se dice *subgrupo* de (G, o) cuando la restricción de 'o' a H satisface los postulados G.1., G.2. y G.3.

G.8. La condición necesaria y suficiente para que (H, o) sea subgrupo de (G, o) es que contenga, a la vez que dos elementos x, y de G, la composición $x \circ y'$ o bien la composición $x' \circ y$.

No doy la demostración de esta propiedad ni de las siguientes, realmente triviales.

Consecuencias inmediatas. Si K es subgrupo de H y H lo es de G, entonces K es subgrupo de G.

2. Toda intersección conjuntista de subgrupos de G es subgrupo de G.

3. El elemento neutro de G pertenece a todos y cada uno de sus subgrupos.

Ejemplos. G y {e} constituyen dos subgrupos de G. Los subgrupos de G distintos de estos dos, a los que se califica de triviales, reciben el nombre de subgrupos propios de G.

Sea G un grupo y *a* uno de sus elementos. Se forma el conjunto $A = \{a^n \mid n \in Z\}$ de todas las potencias –en notación multiplicativa– del elemento *a*. El conjunto A constituye un subgrupo de G. Se denomina *mono¡.:éneo* engendrado por *a*. Si A posee únicamente un número finito de elementos, entonces recibe el nombre particular de subgrupo cíclico generado por *a*; en este caso el orden del grupo A se llama orden del elemento *a* y, claramente, es el menor natural n tal que $a^n = e$. Puede comprobarse que todo grupo cíclico es abeliano.

Definición 3. Si todo elemento de G es de orden infinito entonces el grupo G se dice que es un grupo *sin torsión*.

En la definición anterior ha de quedar marginado el elemento neutro e. Decir que un grupo es sin torsión viene a significar que el grupo no es periódico.

Cuando el grupo es finito puede establecerse una relación entre el orden del grupo y el orden de cualquiera de sus subgrupos. Relación que constituye el denominado teorema de Lagrange por el cual el orden de un subgrupo es divisor del orden del grupo correspondiente. Consecuencia inmediata es la proposición que establece que si un grupo G es de orden primo no posee subgrupos propios y, entonces, es cíclico y, por consiguiente, abeliano.

Dados dos grupos puede establecerse entre ellos alguna aplicación que conserve la estructura, es decir, un morfismo. Morfismo que puede ser tanto suprayectivo, como inyectivo, como biyectivo, en cuyo caso ambos grupos son isomorfos. El establecimiento de morfismos de grupos da paso a nuevos conceptos como los de núcleo de morfismo, conjunto que constituye un subgrupo del grupo inicial de la aplicación y, además, subgrupo normal; imagen del morfismo, que constituye un subgrupo del grupo imagen de la aplicación; grupo cociente de la relación de equivalencia canónicamente asociada a la aplicación... Aparición de subgrupos que permite establecer uno de los teoremas de isomorfía de grupos.

Naturalmente cabe considerar aquí la cuestión de si todos los grupos de orden dado son o no isomorfos entre sí; se obtiene, por ejemplo, que existen dos grupos de orden cuatro no isomorfos-no lo son las rotaciones del cuadrado y el grupo de Klein, cuyas tablas de Cayley he dado antes-o, en otras palabras, que hay dos grupos no isomorfos de orden cuatro, el cíclico y el producto de dos grupos cíclicos de orden 2. También puede indicarse en este campo que existen dos grupos de orden ocho no abelianos -uno de ellos el de los cuaterniones- y, en general. que existen 2IH grupos no isomorfos si el cardinal del grupo es el cardinal transfinito}H.

El estudio de subgrupos, con las clases de conjugación correspondientes, conduce a teoremas como el de Cayley -todo grupo de orden finito n es isomorfo a un subgrupo del grupo simétrico sn-, así como a los teoremas de Sylow, de Cauchy... En este orden también puede establecerse las descomposiciones de un grupo en producto de subgrupos normales que, como casos particulares, permiten estudiar tanto los grupos cíclicos como los grupos abelianos de orden finito. Igualmente, es factible el estudio de la estructura de los subgrupos de un grupo dado y, con ello, en particular, los grupos libres y el problema de la generación de grupos.

Continuando la cuestión de los morfismos, puede establecerse el llamado segundo teorema de isomorfía e, igualmente, las sucesiones normales y de composición que dan origen a teoremas como los de Schreier o de Jordan-Holder...

Por último, aquí, cabría realizar un estudio particular como el de los grupos asociados a los movimientos, a las congruencias de figuras geométricas, como el de las congruencias de cuerpos regulares, por ejemplo el icosaedro... O bien proseguir el estudio de carácter más algebraico a través de las representaciones lineales de los grupos finitos, o estudiar los grupos clásicos en su aplicación a la mecánica o a la física de partículas elementales...

1.1.5. *La práctica operacional*

Los ejemplos anteriores han pretendido mostrar, por modo exclusivo, la posible marcha metódica que puede seguir el trabajo en cada una de las teorías elementales mencionadas –y no vuelvo a insistir en que lo de menos, aquí, es el contenido de dichas teorías, aunque en la práctica matemática auténtica, en el trabajo, tal contenido influya sobre el propio método a emplear–. Teorías 'elementales' en sentido próximo al originario del término, es decir, enfocadas como conjuntos de proposiciones acerca de objetos matemáticos primarios porque dichas teorías pueden elaborarse a partir de un conjunto pequeño y elegante de axiomas, además de constituir las componentes para otras teorías más complejas. El hacer matemático actual exige el previo conocimiento de estructuras elementales y sus teorías correspondientes porque este hacer combina esas estructuras en otras más complejas y extiende la teoría asociada en realizaciones o modelos de amplitud cada vez mayor; por ejemplo, la Geometría algebraica exige un dominio de disciplinas diversas como la topología, topología algebraica, geometría diferencial, geometría analítica, álgebra conmutativa ... La formalización de cualquiera de estos haceres lo haría impracticable, de ahí el expediente de suponer, en el lector matemático que pretenda conocer algo de esta materia, el previo conocimiento de disciplinas como las apuntadas, el previo dominio de los elementos constitutivos de cualquier disciplina 'compuesta'.

Ejemplos propuestos en cuya marcha se pretende poner de relieve algunos puntos de una parte de la metodología del trabajador matemático. Por supuesto, exige esta marcha el previo dato de la teoría, del contexto que se maneje; el matemático investigador ha de conocerlo aunque en su trabajo de invención no tiene por qué ligarse a este proceso, o a cualquier otro. Más bien se ligará a temas concretos, problemas determinados a desarrollar, incluso la demostración de algún teorema aparentemente aislado o un aspecto de la teoría o bien al estudio de si al reemplazar los objetos de una estructura por otros -funciones por sucesiones de funciones analíticas, por ejemplo- la estructura varía o han de imponerse determinadas restricciones y qué tipo de restricciones deben ser en ese caso...

Esta práctica conlleva en el trabajo matemático un elemento esencial y es el de la realización o modelo de una estructura determinada. Proceso por el cual a partir de una estructura concreta —por ejemplo, el grupo de sustituciones o permutaciones de un conjunto, el grupo simétrico- con su teoría parcial cargada de semántica particular, se alcanza la estructura abstracta -la de grupo de objetos cualesquiera- mediante la caracterización axiomática, postulacional de la misma, para volver desde la estructura abstracta a la concreta tomada ahora como ejemplo, modelo o realización. Esta segunda fase, dar el modelo, no es simplemente una ejemplificación más o menos anecdótica: es la fase que asegura la existencia de la estructura abstracta, general. Fase de aseguramiento de la existencia, fundamental, porque se admite que una definición no da la existencia a aquello que define...

Fase que puede realizarse, igualmente, no mediante la ejemplificación concreta, la realización particular, sino por un modelo en el ámbito de otra estructura. En este caso no hay mera ejemplificación, sin embargo, de tipo existencial, sino que se tiene una etapa de auténtica creación en el ámbito de la estructura que se está manejando, porque entraña un paso de propiedades de una estructura --de su teoría correspondiente- a otra. Ejemplos de esta fase auténticamente creadora podrían multiplicarse. Me limito, sin embargo, a señalar, y por la mezcla implícita de los aspectos existencial y creador, cómo para Gauss la representación geométrica de los números complejos dio 'existencia' a dichos números manejados hasta entonces de manera puramente formal, sígnica. Esta representación geométrica hace que los números imaginarios, aparecidos en la resolución algebraica de ecuaciones, se conviertan en puntos, en 'afijos' en un plano, en entes geométricos y, si éstos son admitidos como objetos válidos por el matemático, el afijo y aquéllo que representa también deben ser admitidos con la misma validez. Las operaciones entre imaginarios obtienen igualmente su representación geométrica y, entonces, se convierten no ya en objetos con existencia garantizada, sino en instrumento poderoso para el propio estudio de transformaciones geométricas que se presentan de manera mucho más simplificada y elegante. Con lo cual la realización o modelo geométrico permite no sólo dar carta de ciudadanía ya efectiva a unos entes que, desde un punto de vista formal, se venían manejando con la intranquilidad de que tal manejo no fuera coherente aunque diera resultado pragmático, sino que revierte sobre aquella estructura en la cual se realiza dotándola de unos instrumentos de trabajo hasta ese momento insospechados, con los cuales obtener una serie de propiedades imposibles de obtener por los métodos clásicos.

En el mismo plano, el modelo de Beltrami para la geometría hiperbólica, o los de Klein y Poincaré, permitían elaborar una teoría geométrica más general de la cual la hiperbólica, elíptica y parabólica no iban a ser más que casos particulares. El modelo permitiría no sólo realizar un diccionario para el paso de una geometría a otra como el construido por Poincaré; diccionario que al establecer una correspondencia entre las distintas geometrías obligaba a aceptar, como mera consecuencia de la correspondencia, el hecho de que si una geometría era contradictoria también lo debían ser las demás, sino asegurar la existencia de cada una de tales geometrías. Por supuesto que existencia por modelo, no identificada ya a existencia por coherencia o no contradicción interna' de cada una de las estructuras, aunque el punto de partida de ambos criterios sea el mismo.

Y junto a la posibilidad de la demostración de existencia relativa, o de coherencia, la traducción o realización de la geometría en el cuerpo de los reales creada por Hilbert, ahora para demostrar ya la no-contradicción por el modelo como objetivo último, admitiendo que el cuerpo de los reales fuera consistente.

Objetivo que se une al antes señalado de creación en la estructura a la cual se traduce la teoría dada. Y basta el ejemplo, junto al de Gauss, de Poincaré al emplear la terminología de la geometría hiperbólica para la creación y desarrollo de una de sus grandes contribuciones, la teoría de las funciones modulares, llegando a señalar de modo explícito que, aunque utiliza el lenguaje funcional del análisis podría, igualmente, manejar el lenguaje geométrico sin que las propiedades de la teoría desarrollada varíen en nada. «Esta terminología me ha prestado grandes servicios en mis investigaciones, pero no la emplearé aquí (en la Teoría de los grupos fuchsianos) para evitar toda confusión», escribe en 1882. Pero, naturalmente, este hecho se debe a que la Geometría de Lobatchevsky, como las funciones fuchsianas que maneja no son más que realizaciones o modelos de una misma estructura subyacente, que permite la representación de una en otra o, más bien, en este caso de creación, se convierte en el hilo conductor de dicha creación. El mismo Poincaré, en otra de sus creaciones, aplica al estudio del análisis situs, de la topología, el instrumento algebraico, dando paso a una nueva teoría, la topología algebraica o combinatoria, considerada como el estudio de espacios topológicos y funciones continuas por medio de objetos algebraicos como, fundamentalmente, el objeto grupo y los morfismos entre tales objetos. Y siguiendo estos trabajos de Poincaré, en paralelo, De Rham, al estudiar su analogía con las formas diferenciales y los campos manejados por Poincaré llega a las nociones de 'corriente' cuyas propiedades demuestra -según confesión propia- siguiendo paso a paso los teoremas análogos de Poincaré. Pero resulta que tanto los campos como las formas diferenciales no son otra cosa que casos particulares, modelos, de los anillos graduados con operadores diferenciales. De ahí la posibilidad y el éxito de De Rham al construir una teoría apoyada en otra, porque no hace otra cosa que crear otro modelo de una misma estructura subyacente.

Este tipo de trabajo, apoyado en la idea de modelo, se posibilita precisamente porque las ideas que se relacionan -al menos en uno de los campos- están ya desarrolladas, estructuradas, por lo que las mismas reflejan perfectamente la estructura que las subtiende, revelada por el método postulacional. Lo cual no quiere decir que este método sea el único en el hacer matemático. Y ello porque en este trabajo también cuentan métodos como los de aproximación sucesiva, los problemas de maximalización, los de invariancia, los de recursividad o recursión finita o infinita... Procesos que no deben considerarse opuestos al axiomático, sino que alcanzan todo su sentido cuando dicho método ha permitido marcar el terreno de trabajo. Lo cual no quiere decir, tampoco, que el dominio de todos estos procesos lleve a la creación en el hacer matemático, aunque sin tal dominio y sin el conocimiento de las diversas teorías, dicha creación no parezca tener muchas posibilidades de existir...

De las componentes que he señalado como características del método postulacional se observa que en el trabajo matemático las que constituyen las reglas de demostración o de inferencia no suelen especificarse. Incluso algún matemático, cuando las especifica en el Prefacio de la obra que escribe, las deja en dicho Prefacio, porque no las utiliza a lo largo de la obra. Y si bien la clave del método axiomático se estime, para autores como los de este tipo, la deducción, resulta que en ninguna parte de la pragmática matemática se discute qué sea una demostración, ni se indican, con mayor motivo, los criterios a que ha de adaptarse la misma -aunque sí se discuta la elegancia de una demostración dada-. En el trabajo matemático, aunque se utilice el método axiomático, se supone que el matemático conoce qué sea una demostración, conocimiento claramente intuitivo y nada formalizado. Conocimiento supuesto que se enmascara con la afirmación tópica de exigir al lector únicamente «un cierto grado de madurez matemática». Y me estoy refiriendo, por modo exclusivo, al trabajo de carácter más bien didáctico, de divulgación o exposición o enseñanza, y no al de investigación o creación auténtica, en cuya interioridad no quiero entrar en momento alguno, dado que aquí admito que no existen métodos o reglas para la invención matemática, sean axiomáticos o de cualquier otro tipo –al menos de momento, porque quizá los psicólogos del futuro lleguen a la panacea inventiva...–.

Algo parecido ocurre en cuanto al establecimiento de los postulados que se admiten sin más para continuar el trabajo. Cuestiones que al matemático que se autocalifica de pragmático no parecen interesar; problemática perteneciente al terreno metodológico, en el cual se incluyen las tareas tanto de la Lógica como de los Fundamentos como de la Historia.

Y si bien existen muchos matemáticos pragmáticos –o, según ellos, simplemente matemáticos–, como matemáticos hay muchos en el mundo -como en todas las profesiones, aunque ya en ellas no existan 'genios', término residual de los fascismos según algunos insipientes neolicenciados de la comunicación españoles, según algunos de los responsables indirectos o directos del aumento de la polución desinformativa contemporánea-, algunos también se dedican a esta problemática y, en ella, han ido creando nuevas disciplinas, nuevos modos de pensamiento estrictamente matemáticos. Y tales nuevos campos, que se cuidan de cubrir las lagunas que el enfoque postulacional deja, es lo que he venido en calificar de enfoque formal. Y es aspecto al que conviene prestar atención ahora, aunque insistiendo en el hecho de que, en la práctica, el enfoque axiomático o el postulacional estriba en fases como las siguientes, que serán fundamentales también para la axiomática:

a) Establecer una lista de términos no definidos; *b)* Establecer una serie de postulados que indiquen el uso o manejo de tales términos; *e)* Indicar una serie de abreviaturas y otros signos que se van a utilizar posteriormente y de los que nada más se vuelve a señalar, aunque sean los que permiten no sólo un manejo más sencillo de los términos primitivos sino aclarar tanto l s términos incluidos en *a)* como las motivaciones en la elección de los postulados y el futuro uso de los mismos. Tras ejemplos más o menos adecuados, cuya función ya he indicado que no es la de mera ejemplificación sino la de mostración de existencia y origen de analogías. se intentan obtener las consecuencias, o teoremas posibles. utilizando como reglas de derivación las reglas de razonamiento ordinarias, ni siquiera mencionadas, al igual que algunas proposiciones o axiomas de la lógica subyacente, que en ningún caso llegan a especificarse -y, de hacerlo, quedan respecto al texto como los signos que indican las páginas de la obra en la cual se especifican-. Razonamiento y demostraciones que, claramente, se hacen como se puede.

De ahí que el método postulacional, en la práctica matemática, no sea el más adecuado para tomarlo como elemento formativo del individuo, la matemática como disciplina que enseña a razonar, cuando ningún matemático pragmático se ha preguntado qué es razonar, uno de los mitos que la red de polución desinformativa se encarga de mantener, incluso entre aquellos que, considerándose únicamente matemáticos pragmáticos, se dedican a la matemática, a su enseñanza...

1.2. *ENFOQUE FORMAL*

Si mediante el enfoque postulacional el matemático trabaja en el contexto de una teoría elemental dada, dotada de un determinado referencial, de una estructura particular -o en la interrelación de dos o más estructuras en el interior de una misma teoría- he insistido en el hecho de que el matemático 'pragmático' abandona como objeto no propio de su hacer la especificación y trabajo en conceptos tales como 'demostración', definición, delimitación y precisión del sistema lógico en el cual afirma que sustenta su trabajo. La componente semántica, la componente O, no la separa en su trabajo, en el que parte de la identificación de los objetos de X con un referencial dado. Poner de relieve tal separación, delimitar conceptos como los anteriores es objeto del trabajador de fundamentos y de la lógica -entre otros-. Y éste, al ocuparse de temas como los mencionados, que han de ser temas comunes a distintos haceres teóricos y a distintas estructuras, debe partir de una condición epistemológica previa: la de suprimir cualquier referencial a los símbolos con los que trabaje. De esta manera se limita, en principio, a los dos primeros elementos de la terna (E, T, M), con lo que puede aplicar el resultado de su hacer a todas aquellas teorías que lo requieran. Obligadamente ha de formalizar y enfocar el producto del trabajo matemático como un hacer concreto, de estructuras con un referencial determinado -aunque a su vez esta matemática, ahora concreta, puede considerarse como un hacer sin contenido frente a un hacer interpretado, frente a un hacer que se maneje en otros contextos cognoscitivos-.

Ahora bien, desde esta perspectiva, el trabajador de fundamentos y de lógica, que no es otro que el matemático, vuelve a invertir su perspectiva porque convierte en objeto de su trabajo no el manejo arbitrario de símbolos sin referencial -como querría una estricta condición epistemológica previa, la ligada al inscripcionismo formalista puro--, sino la estructura formal como unidad en sí, a la cual quepa caracterizar por alguna propiedad: básicamente la de ser sistemas formales cerrados, sistemas deductivos, clausurados respecto a la formalización de la noción intuitiva del «Se sigue de...». Y es de estos sistemas formales de los cuales puede tener sentido pleno el planteamiento de cuestiones de claro matiz epistemológico. Es de estos sistemas de los que puede realizarse el planteamiento coherente de cuestiones como las de consistencia, completitud o saturación, decidibilidad, categoricidad..., y no de proposiciones más o menos aisladas. Con ello realiza nueva inversión ontológica por no limitarse de modo exclusivo al aspecto de construcción sintáctica de un lenguaje y su posterior aplicación al análisis lingüístico.

En otras palabras, no sólo ha de preocuparle el desarrollo del mayor número de teoremas de un sistema formal determinado -fase interna a un contexto o teoría particular-, sino que ha de trabajar con dicho sistema como algo dado y ha de plantear y resolver, matemáticamente, un haz de cuestiones extrínsecas, en principio, al interior del sistema formal, pero que pueden traducirse a problemas internos de una teoría de tales sistemas -fase externa en la cual el sistema es objeto individual, receptor de predicaciones-. Y en esta segunda fase, con su interiorización correspondiente, va a mostrarse la dependencia respecto al lenguaje formal que se utiliza en la primera. Dependencia al lenguaje que, a su vez, va a condicionar incluso las estructuras del mismo -y recíprocamente, la estructura cuya teoría se formalice obligará a la elección de un lenguaje de nivel determinado, aunque en ningún caso la correspondencia sea unívoca-.

Ello implica que, en el enfoque formal, van a aparecer dos fases en paralelo a las dos fases que se distinguían en la pragmática matemática: por un lado la descripción de qué sea un sistema formal, mediante sus etapas correspondientes, bien sintáctica, bien semántica; por otro, el estudio de las condiciones a que han de someterse tales sistemas formales, o condiciones epistemológicas, y en la cual el sistema se considera dado o, en todo caso, se estudian las condiciones que ha de verificar para el cumplimiento de tales condiciones epistemológicas. Planos que, por lo último expuesto, se muestran radicalmente interrelacionados, condicionándose mutuamente en su elaboración cuando ésta se enfoca a posteiori y globalmente. Es la primera fase la que voy a desarrollar a continuación, dejando la segunda para el punto 1.3. Aunque sí quiero insistir que aquí se elabora una teoría no de una estructura conceptual que se supone dada o construible, sino que el sistema formal va a elaborarse íntimamente ligado al lenguaje formal que le da su apoyatura.

Desde el enfoque apuntado, un sistema formal se presenta como un par T = (L, F) donde L es un lenguaje formal y F un conjunto de expresiones construidas sobre dicho lenguaje formal. La primera fase del método constructivo axiomático es la caracterización de ambas componentes, para lo cual se tienen dos etapas fundamentales, descriptiva una y determinante de la formalización de la cláusula de cierre la otra.

1.2.1. *Fase descriptiva*

Caracterizar L mediante el dato de su alfabeto, por un lado; por otro, indicar cómo, a partir de éste alfabeto, se obtienen sucesiones de símbolos del mismo, sucesiones que se califican de expresiones o palabras. Del conjunto de expresiones se determinan cuáles van a ser admitidas como 'bien formadas' o fórmulas y, de entre éstas, las que van a considerarse como proposiciones -fórmulas que carecen de variables libres-.

Esta última etapa se lleva a cabo mediante procesos inductivos o recurrentes que permiten caracterizar, constructivamente, del conjunto de todas las expresiones, aquéllas que podrán adquirir un referencial en alguna posible interpretación posterior. Proceso o método inductivo, no axiomático ni axiomatizable, esencial en el trabajo matemático.

Toda esta fase -en la que aquí no entro- puede calificarse como descripción de la gramática del lenguaje formal L. Lenguaje formal que puede ser de muy diversos órdenes según cuáles sean los símbolos admitidos en el alfabeto y que, en primera instancia, pueden distinguirse por la cuantificación de algunos de tales símbolos en lenguajes de primer orden, de segundo... Tema al que volveré posteriormente, aunque suponga conocido por parte del lector al menos el lenguaje de primer orden, también denominado lenguaje de predicados con igualdad, y ello en función de las posteriores referencias y ejemplificaciones. En todo caso, indico que los símbolos propios del alfabeto pueden escindirse en tres grandes grupos junto a los símbolos constantes o lógicos: símbolos de variable, de relaciones y funcionales. En otras palabras, que el lenguaje formal L puede quedar caracterizado, en principio, por la terna L = (V, F, R), además de los símbolos lógicos o constantes, comunes para los distintos lenguajes del mismo orden. La cuantificación sólo afecta a los símbolos de V.

1.2.2. *Derivación–Consecuencia*

Admitida la gramática de L, el paso siguiente consiste en caracterizar la condición de cierre sobre las expresiones construidas sobre L. Y es la noción de consecuencia la encargada de cumplir este papel; consecuencia de un subconjunto X de fórmulas de F o, más generalmente, de expresiones de F. Noción de consecuencia que, para ser formalizada, admite dos enfoques, sintáctico y semántico.

1.2.2. 1. *Sintáctico*

Se definen las reglas de derivación o demostración formal como operadores de cierre sobre las expresiones de L de manera aproximada a la siguiente:

Una *regla de derivación* o demostración es una aplicación de

F" en F por la cual se asocia a una n-tupla ordenada de expresiones de F una expresión de F.

En términos conjuntistas ello equivale a decir que una regla de derivación viene dada por un subconjunto del producto cartesiano P x F, mientras que su dominio es parte de P y su recorrido está contenido en F. Los elementos de la n-tupla se denominan antecedentes de la regla de derivación y a la expresión imagen, consecuente de las mismas. En general, una de las reglas base que se admite como canónica para cualquier tipo de sistema formal es la de separación –la clásica estoica del *modus pon en.* – que adopta la forma, según las versiones anteriores:

como aplicación: (a, *a {3)* f3
como tema: *(a, a {3, {3)*

como regla: $\dfrac{\&\ /3}{/3}$

Establecidas las reglas de derivación o clausura del sistema formal o teoría deductiva, se admite un conjunto de fórmulas A como configuraciones de partida, escindiendo este conjunto A en dos subconjuntos, en general disjuntos: configuraciones, axiomas o postulados lógicos AL, y configuraciones, axiomas o postulados propios de la teoría o sistema formal a desarrollar, AT.

Y se está en condiciones, ahora, de dar una definición formal de lo que el matemático da por sabido, del concepto de demostración formal:

> Una derivación o *demostración formal* es una sucesión de fórmulas en la cual cada una es un elemento de A o se obtiene de las anteriores mediante la aplicación de las reglas de derivación formal.

A la fórmula que ocupa el último lugar en la sucesión se la denomina *teorema* o fórmula demostrada a partir de A. Este hecho se denota, en general, por A 1- *a.* El conjunto de todos los teoremas obtenidos a partir de A constituye el conjunto *consecuencia sintáctica de A*. Y ésta es, precisamente, la caracterización sintáctica del sistema formal, dado que el conjunto F ha de ser cerrado respecto a las reglas de derivación; es decir, F está constituido por todas las proposiciones demostrables, F = {a lA 1- a}.

Si el conjunto AT = 0, entonces la teoría formal T suele recibir el nombre de *lógica* y todos los sistemas que se apoyan en el mismo conjunto de axiomas lógicos se dice que poseen la misma lógica subyacente. Uno de los objetivos de los denominados lógicos consiste en obtener todas las posibles consecuencias de AL, en trabajo interno a dicho sistema formal -además de estudiar posibles aplicaciones del sistema formal, fundamentalmente a los razonamientos ordinarios del lenguaje, o a teorías científicas, aunque esta faceta haya sido preponderante en lógicos de formación 'filosófica' que llegan, incluso, a considerarla como objetivo central de la lógica, cuando tlo es más que un aspecto secundario y no formalmente lógico-. Es claro que si A = AL U AT, cualquier teoría formal T construida sobre A como conjunto de configuraciones de partida contiene todas las proposiciones de la lógica y es, en este sentido, en el que cabe afirmar que las teorías matemáticas formalizadas constituyen una extensión de la lógica -extensiones en el sentido conjuntista y en el manifestado en 1.1.1.- o que ésta es el fundamento de dichas teorías, porque la lógica así concebida no es más que el núcleo de la teoría que se maneje. Pero bien entendido que aquí el término lógica se toma como teoría o sistema formal cuyo operador básico es el de derivación, y no con cualquier otro haz de connotaciones que suelen ir ligados a dicho término.

Admitido un sistema lógico como base o parte, como sistema generador de las demás teorías formales -construidas sobre el mismo lenguaje formal L-, dos teorías se distinguirán, por modo exclusivo, tanto en los símbolos específicos que se utilicen del mismo alfabeto común, como en el conjunto AT de axiomas propios. Y ello conduce a la problemática de comparar, sintácticamente, dos lenguajes como ampliación o restricción uno del otro, según los axiomas o postulados empleados o según los símbolos aceptados -y entonces ello depende, estrictamente, de la comparación de los lenguajes formales que les sirven de apoyatura constructiva-.

1.2.2.2. *Semántico*

a) *Nociones fundamentales*

La elección de unas u otras configuraciones de partida, la elección de unos u otros símbolos como específicos de una teoría formal. el papel que juega la sustitución de unos símbolos por otros en una expresión determinada, no son cuestiones de naturaleza sintáctica pura, sino que vienen condicionados, en todos los casos, por la posibilidad de una posterior interpretación del sistema formal que se construya. Incluso la propia construcción sintáctica está apoyada, en cada uno de los pasos, por la ejemplificación concreta, particular que, sin embargo, no se explicita al menos aparentemente, a pesar de que es ella la que la posibilita. La elección de unos elementos u otros, el papel de unos u otros símbolos vienen condicionados, siempre, por un enfoque claramente semántico en el cual se dota de un referencial a los objetos o símbolos del alfabeto y de un contenido a las expresiones que pueden ser construidas sobre ese alfabeto.

El enfoque semántico va a apoyarse, básicamente, en la noción de interpretación, en la noción de satisfacción o validez creada por Tarski, que permite establecer cuándo una expresión es válida o satisfacible y universalmente válida o verdadera en una estructura determinada, estructura que se convierte en el modelo de la teoría a la cual pertenezca la fórmula o expresión que se esté considerando. La idea central consiste en poner en correspondencia un lenguaje formal, que viene caracterizado por la terna L = (V, F, R), con una estructura apropiada, correspondencia que sea, en el fondo, un morfismo. Es decir, una correspondencia o interpretación es una aplicación **1** tal que al conjunto V de símbolos de objeto de L asocia el conjunto base o universo A de la estructura *,J* de forma que cada símbolo de V sirva como nombre para cada objeto de A. A cada símbolo funcional y a cada símbolo de relación de L se les hace corresponder, mediante la misma interpretación l, un símbolo de operación y uno de relación de.?/, pero de tal manera que se conserve la aridad. Por ejemplo, si se tiene un predicado binario en L, el símbolo relacional asociado por **I** tendrá que ser binario.

Establecida esta correspondencia o interpretación **I** se dirá que *¡1/* es una L-estructura o posible modelo de L, o también que L es un lenguaje apropiado para *A* o el L-lenguaje de *A*.

Naturalmente esta correspondencia no ha terminado el proceso. Lo que se quiere es que se conserve en la construcción de las expresiones y fórmulas sobre L. Es decir, lo que se quiere es una ampliación del morfismo **1** de manera que si-se tiene una expresión construida sobre L con los símbolos del vocabulario base, la misma se refleje en la estructura A. Y esto se consigue mediante una nueva construcción inductiva en la cual se da la definición de validez de los términos y fórmulas bien construidos sobre L en la estructura asociada. Por ejemplo, si les la intrepretación entre L y *.r/,* entonces una fórmula en L como $rt_1 \cdots t_n$ es válida bajo I en *.J1* si y sólo si $It_1 \cdots It_n$ E Ir, es decir, si las imágenes It; de los términos t; están relacionados en la imagen correspondiente Ir de la relación r por I.

Por supuesto que una proposición, por carecer de variables libres, es siempre válida o no en una L-estructura *.A*. Pero cuando en una fórmula existen variables libres, la validez de la misma dependerá de los valores asociados, asignados a tales variables. Y una fórmula será valida en.*rl* cuando, dada una interpretación l, lo sea para toda asignación, para toda valoración de las variables que intervengan en dicha fórmula y que sean libres en la misma. Cuando una estructura es tal que todas las fórmulas de L son válidas en ella bajo una interpretación 1 se dirá que dicha estructura es un *modelo* de L.

Con la noción de validez -en la que no me he detenido salvo para indicar el método constructivo de la misma, en paralelo a la construcción de rnorfisrno algebraico y extensión de rnorfismo-- se posee la segunda posible caracterización de la idea .intuitiva de consecuencia, del ·se sigue de...':

> Una proposición es *consecuencia semántica* de un conjunto X de fórmulas si es válida en toda estructura en la cual sean válidas las fórmulas de X. Simbólicamente, X $\models$ *a*.

Naturalmente, el conjunto F de fórmulas será ahora el conjunto de todas las fórmulas válidas, F = {*a* | X $\models$ a}, y así se tiene la caracterización semántica de una teoría formal. En ella no intervienen, para nada, nociones corno las de demostración, teorema, regla de derivación..., sino la de estructura abstracta *A* como modelo de una teoría formal dada que, como modelo para una fórmula *a* se simboliza por *./1* $\models$ *a*. Al igual que en el enfoque sintáctico podían realizarse comparaciones entre los lenguajes, en el semántico la comparación puede hacerse, pero ahora a través de los modelos de una misma teoría. Igualmente, establecer nuevos modelos mediante procesos de carácter estrictamente matemático o algebraico corno el de producto cartesiano... Estudio que forma parte de lo que Tarski bautizó, a partir de 1950, como *teoría de modelos*.

Y es la noción de interpretación en una estructura la que permite justificar alguna de las condiciones que se imponen en la construcción sintáctica de las fórmulas, de los axiomas, de las reglas de derivación que en ella se adoptan. Así, por ejemplo, en la construcción de un sistema de primer orden hay que imponer restricciones no sólo a la forma de construir las expresiones o fórmulas sino a los propios axiomas que se adopten. Si *a* es una fórmula de la teoría, es lícito adoptar como axioma del sistema lógico formal de primer orden una expresión como la siguiente:

o: — Vx¡o:, siempre que X¡ no ocurra en o:.

Para justificar la restricción impuesta a la expresión, puede darse un contraejemplo apoyado en la noción de modelo y que es una de las motivaciones para la misma, imposible de establecer desde el enfoque sintáctico puro. Así, si i = 1, y *a* es la fórmula 'Xo = x1', puede tomarse una estructura *A* sobre el lenguaje L que posea, al menos, dos elementos en su conjunto base o universo A. Sea la sucesión x E *Aw* tal que Xo = x1. Es claro que la clausura de *a*, o:[x], es consecuencia semántica de *.;ti,* pero si v E A – {X(1}, entonces , a[x] es consecuencia de *Jti*, y por lo tanto se tiene que también es consecuencia la expresión , Vx;a[x]. Luego x no satisface la expresión o: — Vx;o: en la estructura A.

Nociones algebraicas como las de isomorfismo entre estructuras, que daban paso a la noción de equivalencia entre las mismas, pueden traducirse a la teoría de modelos indicando, por ejemplo, que dos L-estructuras *.;4* y */B,* o dos modelos de un mismo sistema formal construido sobre el mismo lenguaje formal L, son *equivalentes elementalmente* cuando y sólo cuando toda proposición que es válida en *Jl* es válida en *:11;* en símbolos,

Jl = *:11* si y sólo si *Jl* 1= *a* y *f1J* 1= *a*.

La relación entre las nociones algebraica y semántica viene dada por un enunciado como

Si *A* y *f1J* son estructuras isomorfas, entonces son equivalentes elementalmente.

Enunciado que puede escribirse como

Si .?/ = fiJ entonces .PI = dJ.

La recíproca sólo es válida cuando los cardinales de ambas estructuras son finitos.

Al igual que esta noción, pueden trasladarse las de subestructura y expansión a extensión de modelos... Ampliación de conceptos que conduciría, por ejemplo , a las demostraciones -calificadas por algunos de algebraicas- de teoremas como los de compacticidad, de Lówenheim-Skolem-Tarski tanto ascendente como descendente, etc., cuyos enunciados doy posteriormente, en 1.3.

b) *Formalización de algunas teorías como ejemplo*

En l. he indicado algunas estructuras definidas postulacionalmente que el matemático maneja desde una práctica que he calificado de operacional. Tales estructuras pueden formalizarse en lenguajes formales de primer orden. Como ejemplo del tipo de formalización que puede utilizarse voy a indicar las teorías formales de dichas estructuras. Es el paso calificado tradicionalmente como de fonnalización de una teoría dada, proceso inverso --como ya he indicado- al de construir formalmente una estructura y hallar posteriormente algún modelo, alguna realización de la misma. Por supuesto, y en gracia al lector, no daré una fonnalización estricta, radical, sino que, en los momentos oportunos, indicaré las abreviaturas correspondientes, tal y como se hace en la práctica, real, del matemático.

l. *Teoría elemental formal de los planos proyectivos*

En la formulación 'intuitiva' -1.1.2.- se hace uso de dos relaciones de aridad 1: los objetos del plano o son líneas o son puntos; igualmente, se hace uso de la relación 'estar contenido', que es de aridad 2. No se tienen operl\ciones ni constantes. De aquí que, junto a los símbolos de variable individual se tengan, como propios de la teoría, como símbolos constantes de la misma, los tres siguientes: {1, p, E}. Es decir, r_1 = {1, p}, r_2 = {E}, R = r_1 U r_2 = {1, p, E}, donde 'l(x)' puede leerse «x es una línea», 'p(x)' como «x es un puntO» y 'E (x, y)' como «x está contenido en y». El lenguaje propio de la teoría elemental de los planos proyectivos vendrá caracterizado, por consiguiente, por L = {1, p. E}; y los axiomas pueden excribirse en la forma

A.l. \fx((p(x) v ·t(x)) A, (p(x) A l(x))

que expresa la condición de que todo objeto del plano es o punto o línea, pero ninguno de ellos puede ser a la vez punto y línea. Los dos postulados que siguen expresan las propiedades de la relación binaria 'estar contenido', la relación que liga puntos y líneas:

A.2. \fx(.(3y) (E(x, y)- p(x))
A.3. \fx((3y) (E(x, y)- I(x))

Los tres axiomas escritos se dan por sobreentendidos en el enfoque postulacional, expresándose sus enunciados correspondientes en la introducción al tema y, fundamentalmente, condicionados por la 'visión' de que se trata de 'puntos' y 'líneas' en un plano; y esto es lo que no puede admitirse en la correspondiente formalización. Con una advertencia, y es que mantengo en las explicaciones tales referenciales geométricos, lo que tampoco debería hacerse desde un enfoque más puramente inscripcionista del que aquí, mera ilustración, sostengo.

Los dos axiomas siguientes nos dan las propiedades de incidencia y son, precisamente, los dos primeros axiomas formulados en 1.1.2.:

A.4.\fx\fy(p(x)Ap(y)Ax =1= y-
— 3z (E(x, z)AE(y, z)A'v't(E(x, t)AE(y, t)- z = t))

A.5.\fx\fy(l(x)AI(y)Ax =1= y-
— 3z (E(z, x)AE(z, y)A\ft(E(t, x)AE(t, y)- z = t))

Finalmente, el tercer axioma de la teoría intuitiva adoptaría una expresión lo suficientemente larga como para que deba ser abreviada mediante unos convenios, al estilo de lo realizado de modo implícito anteriormente en la relación de igualdad, escrita de manera infija entre los símbolos que relaciona y no de manera prefija como en una formulación más formal de las expresiones debería haberse realizado -es decir, I(x, y) se ha escrito como x = y, mientras que su negación, , l(x, y), se abrevia por x =1= y-. Los convenios abreviadores que adopto son los siguientes:

a) $m(x_1, x_2, x_3)$ abreviatura de $\exists z(\in(x_1, z)\Lambda\in(x_2, z)\Lambda\in(x_3, z))$

Es convenio abreviador válido únicamente para el contexto de la teoría elemental formal que se está, ahora, tratando de describir, y que el lector habrá adivinado fácilmente en su posible interpretación geométrica.

b) 3!x(p(x)) abreviatura de 3x(p(x)\ Vy(p(y)---+ x = y))

válido para expresar formulaciones de unicidad de una condición para un objeto individual.

Con estas abreviaturas, el último axioma de la teoría de los planos proyectivos adoptaría la forma

A .6. $3x_1 3x_2 3x_3 3x_4$(p(x_1)Ap(x_2)Ap(x_3)Ap(x_4)Ax_1 =f *xz!\x₁* =f ;t:x3/\$x_1$:F$x_4$/\$x_2$;t:$x_3$/\x2;t:X4/\X3;t:x.¡¡\ m(x¡, x2, X3)/\ m (X¡, X2, X4)/\, m(X¡, X3. X4)Á m(x2, X), X4))

Los axiomas específicos de la teoría geométrica formal de los planos proyectivos, en un lenguaje formal de primer orden, constituye el conjunto AT = {A.l, A.2., A.3., A.4., A.5., A.6.}.

2. *Teoría elemental formal de grupos*

El lenguaje específico o propio estaría constituido por L_0 = {o, e}, donde 'o' es un símbolo funcional o de operación de aridad 2, y 'e' es un símbolo de constante o funcional de aridad cero; no hay símbolos de relación. Los axiomas propios de la teoría elemental de grupos serían las fórmulas cerradas siguientes que expresan, la primera, que la operación 'e' es cerrada en el conjunto base; la segunda, la asociatividad de esta operación; la tercera, el elemento distinguido o neutro, y la cuarta, la existencia de simétrico o inverso para cada elemento del conjunto base:

A. I. Vx_1V$x_2$3!x_3 o (x_1, x_2, x_3)

A.2. Vx_1Vx_2Vx_3Va'v'b'v'c'v'd(,(x_1,X2>a)Ao(a,x_3,b)Ao(x_2,x_3,e) Ao(X¡, e, d)---+ b = d)

A.3. Vx o (e, x, x)

A.4. Vx_1, 3x_2 o (x_2, X¡, e).

En la formulación de estos axiomas se ha tenido presente el convenio abreviador b) del punto anterior. Puede suprimirse la constante ·e', con lo cual el conjunto C de constantes de la teoría seria vacío, si las dos últimas fórmulas, A.3 y A.4, se reemplazan por el axioma

A.3'. 3e(A.3 A A.4)

El conjunto AG = {A.l, A.2, A.3, A.4}, o su equivalente {A.I, A.2, A.3'}, constituye el sistema de axiomas para la teoría elemental de grupos. Elemental, dado que al apoyarse en un lenguaje de primer orden, no pueden cuantificarse más que las variables de individuo, por lo que no pueden establecerse, en principio, las propiedades de los subgrupos, por ejemplo. En principio, porque esta dificultad puede salvarse mediante el empleo de una estratificación de variables.

Cuando se agrega al conjunto AG, como un elemento más del conjunto, la fórmula cerrada

A.5. Vx_1Vx2VaVb (o(x_1, x2> a)Ao(x2, xl> b)-+ a = b)

se dice que el grupo es abeliano. Igualmente, pueden irse agregando al conjunto otras fórmulas cerradas universalmente de forma que se obtenga retractos de la estructura de grupo, es decir, grupos con propiedades adicionales que restringen la generalidad de la teoría -y aumenta el número de propiedades de la misma-. Así, pueden agregarse las condiciones para considerar grupos cíclicos, o grupos sin torsión...

3. *Teoría elemental formal de categorías*

Al caracterizar la teoría elemental de categorías desde la vertiente pragmática del trabajador matemático en 1.1.3., se indicaba que eran dos los tipos de objeto a manejar: por un lado, objetos y, por otro, morfismos entre tales objetos. Y era entre los morfismos entre los cuales tenían que establecerse tanto la composición como las relaciones de identidad respecto a dicha composición, como la asociatividad de la misma. Ello exige, para su formalización, el dato de unas funciones de aridad 1 y aridad 2, que liguen los objetos con los morfismos y que nos den la composición. En otras palabras, como signos propios de la teoría se tendrán tres funcionales, $F_1 = \{!lo, !l_¡\}$, $F_2 = \{o\}$, por lo que F = F, U Fz = {!lo, !l,, o}. Estos símbolos pueden leerse -y hago la misma advertencia que en el ejemplo 1- de la manera siguiente: 'llo(f, x)' como «X es el dominio de f», '$!l_1$(f, y)' como «Y es el codominio de f», 'o (f, g, h)' como « h es la compuesta de f y g». Para abreviar la escritura, como $!l_0$(f, x) puede escribirse en la forma operacionallo(f) = x, y de modo análogo $!l_1$(f, y) puede escribirse como $!l_1$(f) = y, voy a utilizar como notación para $!l_0$(f, x) únicamente .:l¡¡(f), y análogamente, $!l_1$(f) por $!l_1$(f, y).

Los axiomas de la teoría elemental de categorías serán los siguientes:

A.l. !l¡(!lj (f), !lj(f)) para i E [0, 1], j E[O, 1)

que ha sido escrito más abreviadamente aún para condensar las cuatro fórmulas correspondientes, por lo que sería expresión mal formada, aunque abreviadora, desde un enfoque formal. Expresa las relaciones entre los objetos, pero siempre como dominios y contradominios de los morfismos correspondientes. El próximo axioma expresa la funcionalidad de la composición y hago uso de la abreviatura b) del ejemplo l. anterior:

A.2. VNg 3!h(o(f, g, h))

El dominio y el codominio de la composición, en relación con el dominio y el codominio de los morfismos que se componen, es lo que expresan

A.3. VfVg 3h(o(f, g, h) <l1(f) = !lo(g)
A.4. VfVg 3h(o(f, g, h) $!l_0$(h) = !lo(f)M¡(h) = !l¡(g))

Los dos axiomas que siguen indican la existencia de las identidades y de la asociatividad y representan los dos axiomas formulados en el ejemplo en su versión pragmática

A.S. Vf(o(!lo(f), f, f)Ao(f, <l1 (f), f))
A.6. VfVfVhVaVbVcVd(o(f, g, a)Ao(a, h, b)Ao(g, b, e)
Ao(f, e, d) b = d)

Si ya en el curso de la formalización he utilizado abreviaturas, éstas pueden aumentar una vez terminada la primera fase de tal formalización. Así, para indicar por $!l_0$(f, x) que x es el dominio de f y por <l, (f, y) que y es el codominio de f, se toma la flecha de partida x y llegada y, x y. De modo análogo, la composición se escribe en

la forma tradicional o pragmática, $\circ(f, g) = h$ y, mejor aún, $f \circ g = h$. De esta forma, si ó.o(f) = x, $_1$(f) = y, ¡(g) = y, $_1$(g) = z, la composición adopta la forma de diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "h"'] & y \arrow[d, "g"] \\ & z \end{tikzcd}$$

diagrama que no hay inconveniente en incorporar a las expresiones formales, puramente simbólicas, al igual que se incorporó al lenguaje postulacional.

En esta teoría elemental formal de categorías pueden darse las definiciones de monomorfismo, epimorfismo, generador, retracto... Así, por ejemplo,

x es un *retracto* de y cuando y sólo cuando 3Gg($x \xrightarrow{f} y$ /1. $f \circ g = x$)

De esta manera, las nociones categóricas pueden expresarse como fórmulas de la teoría elemental formal de categorías. Además de las citadas, y del diagrama conmutativo, pueden mencionarse las de producto, coproducto, objeto terminal e inicial...

Sin embargo, y de aquí el calificativo de 'elemental', no pueden formularse nociones como las de límite o límite infinito, o la de objeto generado finitamente. Nociones que, por supuesto, pueden formularse si se adopta, en lugar de un lenguaje de primer orden, uno de segundo en el cual, en lugar de manejar únicamente los morfismos como objetos individuales, se manejen también los funtores con su cuantificación correspondiente. Ello equivaldría a pasar a la teoría que Lawvere denomina con el calificativo de 'categoría básica', para lo cual se requiere tanto el aumento en el número de axiomas como la introducción de dos constantes individuales –las que denoten los dos endofuntores constantes del número ordinal 2– en el vocabulario del lenguaje formal.

e) *Otros temas*

En relación con la afirmación contenida en el último párrafo, o la contenida al hablar de la teoría 'elemental' de grupos, es posible afirmar que dicho calificativo puede ser formalizado, distinguiéndolo del calificativo 'elemental' usado en 1.1.5. para las teorías básicas o elementales, constitutivas de las disciplinas compuestas en la pragmática matemática. Así, dada una familia ,r/, de L-estructuras, una propiedad de las mismas se dice de primer orden si existe alguna proposición *a* de L tal que .r/ sea un modelo de *a*. Inmediatamente cabe afirmar que si una propiedad es de primer orden, la noción de tener tal propiedad es finitamente axiomatizable. Noción que puede generalizarse indicando que una propiedad es de primer orden general cuando existe un conjunto de proposiciones tal que una estructura posee la propiedad si y sólo si es modelo del conjunto de proposiciones. De esta manera, por ejemplo, la propiedad de ser conjunto finito no es general de primer orden, ni la de buena ordenación, ni la de cuerpo conmutativo de característica cero...

Sólo el plano semántico posibilita la interrelación Lenguaje formal-Estructura abstracta, interrelación que ponen de manifiesto los ejemplos antes mencionados. Si se formaliza una teoría postulacional dada, la misma requiere de un lenguaje formal determinado. Así, puede hablarse de lenguajes relacionales o de lenguajes operacionales, según aparezcan o no entre las constantes de dichos lenguajes sólo relaciones o sólo operaciones. Con el problema incorporado de si pueden traducirse entre sí. Y ello en el sentido de que si desde un aspecto pragmático una operación n-aria puede enfocarse como una relación n + 1-aria, es decir, que se admite

$$\langle x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\rangle \in r_{n+1} \text{ si y sólo si } f_n(x_1, \ldots, x_n) = x_{n+1}$$

Sin embargo, desde un enfoque axiomático resulta que un lenguaje de primer orden sin la relación de igualdad, pero con símbolos relacionales y funcionales de aridad 1 es decidible, pero el mismo cálculo con un símbolo relacional de aridad 2 es indecidible, por lo cual se harían necesarias unas precisiones mínimas en cuanto a la posibilidad traductora y las condiciones de la misma.

Los tres ejemplos que he dado creo que muestran lo que se entiende por lenguajes de los tipos citados e incluso en el tercero he dado por resuelta la posibilidad de traducción y la he aceptado para manejar las abreviaturas.

Precisamente los lenguajes ecuacionales pueden estimarse como los adecuados para las clases ecuacionales de álgebras, es decir, las caracterizadas por sistemas de postulados tales que cada uno de ellos se presente en la forma de ecuación, de identidad --como la teoria de grupos, cuerpos-. Esta forma simbólica permite justificar el hecho, por ejemplo, de que un cuerpo, para ser ordenado, necesite de inecuaciones y no sólo de ecuaciones ya que, de lo contrario, al tenerse la propiedad de que si un sistema de ecuaciones se satisface en una estructura se satisface en toda imagen homomorfa de una subestructura cualquiera de la estructura dada, se tendría la contradicción con el hecho de que el cuerpo de los racionales es ordenable, pero el cuerpo de los enteros módulo 2 no lo es. En otras palabras, las propiedades ecuacionales son hereditarias, pero las caracterizadas por inecuaciones no lo son. Este caso permite mostrar el interés que el método constructivo axiomático presenta para el postulacional. Interés que aumenta, por otro lado, si se tiene presente la posibilidad de construir modelos no canónicos para una estructura postulacional determinada. Así, la elaboración de modelos no canónicos para el Análisis, con reintroducción de infinitésimos, permite una reconstrucción paralela al análisis 'clásico', más aproximada a la intuición sensible...

De parecida forma, invirtiendo el proceso formalizador anterior, cabe tomar como tema de trabajo la búsqueda de estructuras que puedan corresponder a sistemas formales construidos previamente. En este punto, inverso al ejemplificado en los apartados anteriores, se sabe que el cálculo proposicional clásico tiene, como estructura algebraica asociada, las álgebras booleanas. Para los sistemas de orden uno la cuantificación presenta dificultades mayores. Hasta ahora, como estructuras algebraicas asociadas, se han creado las álgebras cilíndricas (Tarski) y las poliádicas (Halmos), permaneciendo abierto como tema de trabajo.

1.3. *CONDICIONES EPISTEMOLOGICAS*

Las dos fases descritas en la elaboración de los sistemas formales, de carácter descriptivo y elemental, pertenecen a lo que de modo tópico viene en calificarse de Lógica. Las condiciones epistemológicas, los problemas que plantean y los intentos de solucionarlos van a constituir el objeto de trabajo del matemático una vez elaboradas las dos fases anteriores -lo que no implica que ambas no estén condicionadas, en su creación y desarrollo, por una problemática epistemológica previa y no las efectúe, también, el matemático-. Y este es el objetivo de la axiomática en sentido estricto, al enfocar como objeto propio suyo la estructura, pero dada en su totalidad, y plantear las condiciones que dicha estructura y el lenguaje formal correspondiente han de verificar. Axiomática en sentido estricto, aun cuando como tal vaya asociado al enfoque aquí calificado de formal, pero con la advertencia realizada en la misma de su amplitud y de la vuelta a su sentido propio en esta sección. Breve, esquematicamente, estas condiciones, con sus intentos de solución, se pueden escindir, por razones expositivas, en los puntos siguientes que, como en toda problemática, muestran profundas interrelaciones.

1.3.1. *Consistencia y completitud*

Por lo pronto, un sistema formal en el que puede aparecer como una de sus proposiciones una contradicción -una proposición reducible a, por ejemplo, a.A.., *a*– conduce a su propia nulidad. De aquí que, primerísima condición, se presente la de demostrar la consistencia o no-contradicción del sistema formal que se construya. Debe advertirse que, desde el punto de vista postulacional este problema es totalmente secundario; aún más, inexistente, ya que se parte de una teoría 'concreta' en la cual los símbolos que se manejan aparecen dotados de referencial, son los representantes de unos objetos que, para el matemático, presentan una entidad real tan fuerte como la de los propios objetos materiales que le rodean –de dónde procede esta creencia del matemático, este convencimiento, es otra cuestión-. El problema surge en el segundo supuesto del método axiomático, en el inverso al postulacional pragmático o al formalizador de tal trabajo postulacional. Surge al haber aceptado como punto de partida no el sistema concreto, sino el sistema formal en el cual los símbolos poseen un significado –el dado fundamentalmente por el uso de los mismos que manifiestan los axiomas o postulados de los que se parte- pero no un referencial, al menos en principio y hasta que no se haga una posible aplicación en una estructura que sirva de modelo; y tampoco es problema en la fase de 'formalización', en la traducción de una teoría postulacional a una teoría formal, ya que se parte de tal teoría concreta, supuesta existente previamente. Al no tener más que el sistema formal, la solución parecería venir dada, únicamente, por la demostración directa, interna al sistema, lo que supondría una traducción del sistema formal en sí mismo, y enfocado sintácticamente. Ahora bien, los intentos de demostración interna, mediante los instrumentos de traducción relativa de un sistema en el interior del mismo, conducen al fracaso. A un fracaso en el sentido de poder demostrar que dicha traducción intrínseca es imposible. Una limitación intrínseca de los sistemas formales, que llega a ser demostrada mediante la propia construcción formal. Fracaso, por consiguiente, relativo en cuanto a la potencia del método axiomático.

Queda, como recurso, aceptar el método de trabajo, el enfoque pragmático del matemático. Aceptar que la consistencia de una teoría viene avalada por la existencia de un modelo de la misma, de una estructura en la cual se satisfagan las expresiones del sistema formal. Cierto que para algunos es método indirecto en el sentido de que la seguridad en la existencia del modelo rompe la linea intrínseca del trabajo sintáctico y obliga a admitir, además, que dicho modelo es no-contradictorio, lo cual deja en suspenso, automáticamente, la propia demostración relativa -por miedo al regreso al infinito en tales traducciones y consistencias relativas-. Pero esta consideración es, desde mi punto de vista, absolutamente restrictiva, porque enfoca el modelo como un modelo material, cuando de lo que se trata es de construcciones del conocimiento realizadas, ciertamente, por la materia, pero realizadas como superestructuras de la misma, con una realidad, pues, objetiva. Se trata, realmente, de confirmar la existencia de un conocimiento objetivo que, como tal, existe; se trata de poner en relación, en correspondencia, dos estructuras formales que, como tales, son existentes en la superestructura cognoscitiva, en el mundo del pensamiento puro, en la burbuja conceptual. Y, por consiguiente, e insisto, reales.

Además, este enfoque da origen -como en la práctica matemática de la cual es una parte- a un nuevo tipo de trabajo: construir, dado un lenguaje de primer orden, un modelo del mismo. Como problema, su solución exige la creación de nuevos instrumentos. Uno de ellos, por ejemplo, es el de ampliación de constantes en el vocabulario del lenguaje formal dado. Y puede demostrarse, mediante este método de ampliación de constantes, que todo lenguaje de primer orden posee efectivamente un modelo. Ampliación de constantes o extensión del lenguaje, que debe someterse a ciertas condiciones restrictivas para que pueda verificarse esta última afirmación. Y ello porque si X es un subconjunto consistente de proposiciones del lenguaje formal L, y si 3x *a(x)* es consecuencia de X, no se puede afirmar, en general, que exista un símbolo de constante *e* -que pertenezca a L o al conjunto obtenido agregando a L un conjunto de constantes C- tal que *a(c)* sea consecuencia de X. El mecanismo restrictivo consiste en establecer una aplicación inyectiva del conjunto de fórmulas de L que posean una variable independiente -es decir, no ligada- en el conjunto de las constantes C de manera que si *e* es la imagen de la fórmula *a(x)*, la fórmula 3xa(x) — a(c) pertenezca al conjunto X para cada una de las fórmulas *a(x)* del lenguaje L.

Método de ampliación de constantes o extensión del lenguaje que recuerda, por analogía, el proceso matemático de admitir, para una estructura dada, nuevos elementos -en general adjetivados en el momento histórico de su introducción de 'imaginarios' o 'ideales'- que permitan resolver en dicha ampliación, sometida también a ciertas restricciones, cuestiones que, de otra manera, se hacían imposibles en el contexto originario.

Ahora bien, al utilizar la consistencia semántica, se enlazan las dos versiones del término consecuencia, la sintáctica o de derivación y la semántica o de satisfacibilidad o validez. Y ello implica una nueva cuestión: si todas las fórmulas que son válidas son demostrables y recíprocamente. La respuesta afirmativa a esta cuestión para lenguajes de primer orden constituye el teorema de completitud de Godel, establecido en 1931. Cuestión que, en términos de consistencia semántica, más general que la formulación primitiva de Godel, puede formularse en los términos:

Una teoría es consistente si y sólo si posee un modelo.

El problema de completitud o de equivalencia de los enfoques sintáctico y semántico, y su enlace por la consistencia semántica, conlleva y pone en juego una serie de elementos tanto de contenido metodológico como epistemológico, entre los que simplemente menciono los siguientes:

i) La equiparación de las versiones sintáctica y semántica de una teoría formal de primer orden muestra un claro matiz metodológico ya que si puede evitarse el proceso demostrativo formal para averiguar si una fórmula es o no teorema, se habrá evitado la no efectividad de dicha noción en beneficio de una comprobación de la validez semántica de dicha fórmula en la estructura que sirva como modelo de la teoría formal. De esta manera, la elección de un método u otro para la elaboración de una teoría carecería, en última instancia, de cualquier trascendencia, quedando en juego electivo de autor o expositor con su matiz de proceso más o menos estético. Por otro lado, posibilita a quienes continúan dando connotaciones distintas al término 'lógica' -distintas al enfoque aquí considerado y que quiere que la lógica sea el estudio de los sistemas formales cuyo operador básico sea el de derivación, y sea ella misma un determinado tipo de sistema formal, mientras que enfoques opuestos la estiman todavía como el estudio de formas de pensamiento- la búsqueda de sistemas de carácter deductivo natural -como los originados tras Gentzen-, o de tablas semánticas de contraejemplos -como Beth-, o de tablas dialógicas -como Lorenzen-, aparentemente más naturales o intuitivas que impiden considerar a la lógica como un sistema formal más o como el estudio de cierto tipo de sistema formal.

Lo que asegura el teorema de completitud semántica para lenguajes formales de primer orden es que tal equiparación es factible, es decir, que el conjunto de todos los teoremas de una teoría formal es el de todas las fórmulas válidas de dicha teoría y recíproco -aunque en este punto se interponga el problema de indecidibilidad-. De aquí la posibilidad electiva antes mencionada, posibilidad que se concreta en la creación de la denominada teoría de modelos.

Esta equiparación, sin embargo, no se mantiene para teorías formales de orden superior al primero. La demostración de incompletitud de las teorías de segundo orden -dada también por Godel para sistemas lógicos con cuantificación de predicados- y orden superior, muestra que el conjunto de fórmulas válidas de una teoría no puede identificarse con el conjunto de teoremas de la misma, por lo cual la noción de demostración o derivación formal, o la noción de consecuencia sintáctica, no puede identificarse con la noción de consecuencia semántica: no todas las fórmulas válidas son teoremas. Pero ello implica la auténtica necesidad de partir de un conjunto de axiomas para obtener una teoría, y también indica la limitación del método axiomático ya que existirán fórmulas válidas que no podrán tener su correspondiente demostración formal. De aquí que no pueda identificarse hacer matemático con hacer demostrativo, por una parte y frente al sentir de algunos matemáticos pragmáticos; y por otra parte, la importancia del método axiomático al marcar, al delimitar zonas en las cuales tenga sentido o bien la demostración o bien la propia conjetura.

Dos consecuencias que, a su vez, conducen al problema de la adecuación de un sistema formal obtenido a partir de una teoría no formalizada. Y la afirmación de que dicha formalización no podrá agotar todas las consecuencias semánticas de la teoría que se formalice en el proceso inverso al que el método axiomático ha impuesto con su inversión de partir de la teoría formal previa para alcanzar alguna interpretación en una estructura determinada. La formalización encuentra, así, una cierta limitación en cuanto a su posible aplicabilidad a teorías construidas previamente, y que si son teorías lo son en cuanto al contenido. Limitación que no indica que no deba aplicarse, sino que debe realizarse tal aplicación para el desvelamiento de la estructura formal de dicha teoría y, con ello, de la multiplicidad de referenciales que encierra.

ii) Ligadas en general a las cuestiones de completitud semántica suelen establecerse unas propiedades cuya importancia es esencial en las teorías formales de primer orden -fundamentalmente en la versión semántica o teoría de modelos- y que se mostrarán centrales para una posible clasificación de los lenguajes formales. Una de las propiedades recibe el nombre de finitud y compacticidad. Para precisar las dos versiones de una misma propiedad, enuncio los teoremas correspondientes. El de finitud, de carácter sintáctico, establece:

> Si la fórmula a es demostrable a partir de X, entonces existe un subconjunto finito X_1 de X tal que a es demostrable a partir de X_1.

Por su parte, el teorema de compacticidad, de carácter puramente semántico, establece:

> Una teoría posee un modelo si y sólo si todo subconjunto finito suyo posee un modelo.

Ambas versiones pueden unificarse en una sola afirmación: Si una fórmula a de una teoría de primer orden se satisface en todas las estructuras en que se satisface una clase X de fórmulas de primer orden, entonces existe un subconjunto finito X_1 de X que implica la fórmula a.

La importancia pragmática del teorema de compacticidad estriba en que, en muchas ocasiones, permite establecer la existencia de un álgebra que satisface determinada condición, aun cuando no haya método efectivo para construirla.

Por otro lado, ambas condiciones permiten desvelar una de las características centrales de la demostración: la de ser finita. Finitud propia de los lenguajes de primer orden y de las teorías construidas sobre ellos, apoyadas, en primer lugar, en la condición básica que se impone en la fase constructiva de los lenguajes: la de ser las expresiones de longitud finita, así como las sucesiones constituidas por tales expresiones; en segundo lugar, en la condición de intersección finita o de conjunciones finitas para la formulación de las expresiones.

A su vez, el teorema de compacticidad puede interpretarse como un teorema de limitación de los sistemas formales –al igual que el segundo de Gódel–, en el sentido de prohibir la obtención de una fórmula válida para todo conjunto finito y falsa para los conjuntos infinitos. Además, en relación al problema de consistencia, permite afirmar que la misma puede lograrse demostrando, únicamente, la de cualquier subconjunto finito de fórmulas de la teoría.

El enlace de esta propiedad con la de espacios topológicos es la que ha conducido a nombrarla con el término de 'compacticidad': enlace apoyado en que se requiere la propiedad de intersección finita –que satisface toda teoría de primer orden– y, con ella, la del subrecubrimiento finito para cualquier recubrimiento de un conjunto dado. Condición de Heine-Borel que define, precisamente, los espacios topológicos compactos.

1.3.2. *Saturación o completitud sintáctica*

Si la consistencia exige que dada una fórmula de la teoría no pueda encontrarse en ésta su negación, se plantea como exigencia de carácter epistemológico el que dada una expresión en términos del lenguaje en el que se expresa la teoría, se tenga que la expresión o su negación pertenezcan a la misma. Es condición de completitud o saturación. Es condición que puede traducirse en la afirmación de que dada una teoría, si consistente, no pueda extenderse a otra que contenga más proposiciones que la teoría formal dada.

Y, nuevamente, el método del modelo viene en ayuda de la demostración de completitud o saturación. Para ello, puede demostrarse que una teoría consistente es completa cuando y sólo cuando toda proposición de la teoría que es válida en un modelo, es válida en todos los modelos.

Además, y en demostración no constructiva, puede establecerse el resultado de que si una teoría es consistente puede construirse otra teoría, que sea extensión suya, y siempre sobre el mismo lenguaje; que es consistente y completa.

1.3.3. *Categoricidad*

Al desarrollar la versión semántica de una teoría formal se hace en función de la existencia de una estructura que sea modelo de dicha teoría. Naturalmente, para una teoría formal puede elaborarse más de un modelo, es decir, pueden hallarse varias interpretaciones de la teoría en distintas estructuras. Este hecho conduce a la cuestión de si tales estructuras son o no isomorfas entre sí y, caso de que existan estructuras no isomorfas, cuál de ellas puede estimarse modelo natural o canónico de la teoría formal dada. Por supuesto, esta última noción de naturalidad es radicalmente extrínseca a la teoría en sí como a la noción de interpretación. Depende de consideraciones de hábito mental. Así, al hablar del conjunto de los números reales se le imagina identificado a una línea recta: se tiene el hábito de asociar con este conjunto la relación 'menor o igual que', relación que no es la única que permite establecer una ordenación en IR.

Siguiendo con las teorías formales de primer orden, puede establecerse la noción de categoricidad -término sugerido por Veblen a Dewey- y afirmar que una teoría se dice *categórica* cuando todos sus modelos son isomorfos entre sí. Consecuencia inmediata de esta definición se tiene el hecho de que si una teoría es categórica, la misma es completa.

Sin embargo, en el hacer postulacional matemático se sabe que hay estructuras que, respondiendo al mismo sistema de postulados, no son isomorfas. Por ejemplo, y como indiqué en I.I., no todos los grupos, no todos los planos proyectivos para todos los órdenes son isomorfos. Ello implica, de modo inmediato, que las teorías formales correspondientes no son categóricas y, por consiguiente, no son completas. Incompletitud sintáctica que puede comprobarse, igualmente, escribiendo una proposición en el lenguaje correspondiente a cada teoría de tal manera que no pueda demostrarse ni ella si su negación. Por ejemplo, en el lenguaje de la teoría elemental fonnal de grupos puede escribirse la fónnula 'a = Vx(x =e)'. Esta fórmula sólo se satisface en un grupo trivial, el de conjunto base {e}. No es válida en grupos de orden superior, luego no se satisface en todos los modelos de la teoría formal de grupos. De aquí que a no pueda ser teorema de dicha teoría fonnal de grupos. Pero tampoco lo es .., a, porque la fórmula sí es válida en uno de los modelos según acabo de indicar. De aquí que en el lenguaje formal de la teoría elemental de grupos existe una fórmula que ni es demostrable ni es demostrable su negación; por consiguiente, la teoría no es completa.

Sin embargo, la teoría elemental de grupos o la de planos proyectivos sí poseen modelos únicos para determinados ordenes -salvo isomorfismo-. Sólo existe un grupo cuando su orden es 2, 3, 5..., y un único plano proyectivo de cardinal 3, 4, 5... De aquí que pueda afirmarse que la teoría es categórica para cada uno de dichos órdenes. Categoricidad ya relativa a un determinado cardinal del conjunto universo de la estructura que sirva de modelo. Categoricidad de un cardinal cuando todos los modelos de ese cardinal sean isomorfos entre sí.

En relación con esta noción y con la de completitud sintáctica -estrechamente emparentada con ella- aparece un haz de propiedades de las que destaco:

i) Si una teoría posee modelos de cardinal finito pero arbitrariamente elevados, entonces posee un modelo infinito. Pero, a la inversa, si una teoría posee un modelo infinito, entonces la misma no es categórica.

ii) Los teoremas de Lówenheim-Skolem generalizados por Tarski y que expresan:

el *ascendente:* Si una teoría de un cardinal dado posee modelo infinito entonces, para cada cardinal infinito mayor que el cardinal de la teoría, ésta posee un modelo de dicho cardinal;

el *descendente:* Si una teoría formal es numerable y posee un modelo, entonces posee un modelo como máximo numerable.

Teoremas origen de la paradoja de Skolem y de la ambivalencia de ténninos como 'numerable' y 'continuo'...

iii) Finalmente, la proposición que se adopta como criterio para la completitud o test de Lós-Vaught:

> Si una teoría posee modelos infinitos y es categórica en algún cardinal infinito mayor o igual que el de la teoría, entonces es completa.

Criterio que constituye un instrumento para demostrar la completitud de algunas teorías matemáticas como la de grupos abelianos libres de torsión, la de cuerpos algebraicamente cerrados de característica p -con p primo o cero-, la de espacios vectoriales de dimensión infinita sobre un cuerpo K... No es el único criterio ni de aplicación universal. De ahí la necesidad de crear otros instrumentos entre los que menciono el de eliminación de cuantificadores -útil también para las nociones de decidibilidad- o el más algebraico de ultraproductos apoyado en una versión del producto cartesiano de los distintos modelos con la noción consiguiente de ultrafiltro, íntimamente ligado a la teoría de categorías y álgebra universal a la vez que a la de espacios topológicos...

1.3.4. *Independencia y axiomatizabilidad*

Tanto desde la versión sintáctica como desde la semántica, una teoría queda, finalmente, como un par (L, Teor). El conjunto *Teor* queda caracterizado, ciertamente, desde dos muy diferentes maneras en ambas versiones. Conjunto cerrado respecto a la derivación sintáctica -gracias a las reglas de derivación-, conjunto cerrado respecto a la validez o satisfacción en un modelo. El cierre en el enfoque sintáctico se hace a partir de unas configt¡_raciones de partida, de unas premisas que, junto a los axiomas ld'gicos, van a determinar la teoría. Por tal condición, el enfoque sintáctico es el que presenta el matiz verdaderamente axiomático. Desde él, cabP plantear el problema de si el conjunto de premisas adoptado como conjunto de partida es, o no, independiente. Es decir, si hay o no configuraciones redundantes en el sentido de que algunas puedan demostrarse a partir de las restantes. Condición de independencia de un conjunto de proposiciones que posee valor estético ya que, si para una descripción elegante conviene el menor número de postulados, todos ellos independientes entre sí, puede interesar desde un punto de vista más pragmático el manejo de mayor número de configuraciones de partida porque ello simplifica las demostraciones. De hecho, en la práctica, una vez obtenidos ciertos teoremas, éstos pasan a convertirse en configuraciones de partida para la demostración de nuevos teoremas, estimados como postulados de ·segunda'...

La noción de conjunto de fórmulas independientes puede establecerse en términos como:

> Un conjunto de proposiciones se dice *independiente* si ninguna de sus fórmulas es consecuencia de las restantes.

Es definición que conlleva un criterio para averiguar la independencia de cada proposición: existe un modelo de las restantes en el que esa proposición no es válida. Es criterio de aplicabilidad costosa porque hay que encontrar un modelo para cada conjunto complementario al formado por cada una de las proposiciones. Pero es el más antiguo conocido, ya que desde los tiempos de Proclo se ha venido manejando para demostrar la independencia de los axiomas establecidos en los *Elementos* por Euclides. Y con ello indico que, metodológicamente, es aplicable tanto al enfoque postulacional como al enfoque formal.

En relación con la independencia, un resultado fundamental estriba en la propiedad de que todo conjunto de proposiciones sobre un lenguaje de primer orden posee un conjunto de proposiciones equivalente que es, además, independiente. Ello conduce a plantear como cuestión la existencia o no de un subconjunto de axiomas, independientes, que generen toda la teoría. Naturalmente, el propio conjunto de proposiciones, en su totalidad, puede estimarse como conjunto que axiomatiza la teoría, pero ello es irrelevante; lo que se pretende es que el conjunto A sea un conjunto independiente que axiomatice la teoría. Una proposición demostrada por Reznikoff permite afirmar que toda teoría es independientemente axiomatizable siempre que la misma esté construida sobre un lenguaje de primer orden.

Por otro lado, el problema de hallar un conjunto que axiomatice una teoría se liga al problema de la computabilidad en el sentido de que se exige, en general, que para que un conjunto de proposiciones sea axiomatizable, el mismo debe ser recursivamente enumerable, lo cual no implica, sin embargo, que sea decidible.

1.3.5. *Dejinibilidad*

Una de las componentes del método axiomático –y que no se tiene presente en el enfoque postulacional- se centra en establecer las condiciones que posibiliten definir objetos -sean individuales o sean relacionales o funcionales- en función de los ya introducidos. Objetivo de la axiomática o enfoque formal será el especificar este proceso y estudiar las condiciones a que el mismo debe someterse –y este 'debe' implica ya la existencia de condiciones de carácter metodológico-. Desde cierto punto de vista ello entraña que, en cada ocasión en que el procedimiento definitorio se aplique, se pasa a una teoría nueva, extensión de la primitiva, porque el nuevo objeto definido se tomaría como un símbolo más del lenguaje propio de la primera, lo que es imposible, por venir dado de antemano el alfabeto. Es claro que tal ampliación, sin embargo, no debe ser sustancial en el sentido de que el nuevo símbolo no deba ser enfocado como tal, sino que pueda ser eliminado en toda ocasión en que se presente en beneficio de los símbolos anteriores. De lo contrario, además de aceptar que la definición sea creadora, se tendrían permanentes saltos en el vocabulario base y, con ellos, en los lenguajes formales en los cuales se expresan las proposiciones de la teoría; no se estaría manejando una teoría sino toda una familia de ella, arbitraria, según fueran introduciéndose nuevas definiciones. De aquí que, en el fondo, no se admita una definición en el interior de una teoría formal más que como abreviatura de expresiones complejas, o bien como términos del metalenguaje formalizables posiblemente en un lenguaje de orden superior a aquél en el cual estén escritas las expresiones de la teoría formal considerada.

Junto a la posibilidad de definición de nuevos símbolos en una teoría formal mediante la extensión de la misma a otra teoría con las condiciones de eliminabili ad y no creatividad, cabe preguntarse por si los símbolos ya dados en una teoría pueden expresarse unos en función de otros. Es cuestión semejante a la de independencia de un conjunto de proposiciones apuntada en el párrafo anterior. Es decir, la cuestión es la de si un símbolo de la teoría es eliminable en función de los restantes, si es definible explícitamente en función de los demás -y, por consiguiente, es redundante-.

Claramente se tiene que si un símbolo es definible en función de los demás, entonces la teoría que se maneje puede estimarse como una extensión de otra teoría, apoyada en una restricción del lenguaje propio de esta última. Y parece que un posible método para demostrar que un símbolo no es definible en función de los demás es dar dos modelos de la teoría pero de tal manera que sólo difieran en la interpretación del símbolo en cuestión. Si tales modelos son factibles se tendrían dos interpretaciones diferentes del mismo símbolo y sólo una de los restantes, por lo cual dicho símbolo no podría depender, o definirse, en función de los restantes. Es el método elaborado por el matemático italiano Padoa.

Y el problema de la posible eliminación de símbolos de una teoría formal puede seguir ampliándose mediante los teoremas de interpolación de Craig, Lyndon... con su paralelo en los de extensión de Robinson... Tema de viva actualidad en la teoría de modelos con sus repercusiones en la filosofía de la ciencia en cuanto al papel de los conceptos científicos en las diversas teorías.

1.3.6. *Decidibilidad*

En varias ocasiones he utilizado el término ·efectividad'. La formulación correcta del concepto que entraña, así como la de sus asociados -algoritmo, proceso computable, método de decisión ...–, exige nociones de la teoría de funciones recursivas y de computabilidad, nueva disciplina surgida en paralelo a la teoría de modelos en el ámbito de la Lógica formal. La base intuitiva de la aplicación de la teoría de funciones recursivas al enfoque formal se centra en la precisión y desarrollo de una idea ya antigua, la de asociar a cada fórmula de una demostración un número natural. Es decir, establecer una aplicación del conjunto de las expresiones del lenguaje formal L en N de manera que a conjuntos de expresiones puedan asociarse conjuntos de naturales y recíprocamente. De esta forma lo que pueda predicarse de las expresiones construidas sobre L puede predicarse de los conjuntos numéricos asociados a dichas expresiones. Con lo cual se pasaría al estudio tanto de las funciones llamadas recursivas como al de conjuntos recursivos y, por ampliación, a los conjuntos recursivamente numerables, creativos, productivos, simples... Recíprocamente, y esto es lo importante, lo que pueda predicarse de estos conjuntos podrá predicarse de los conjuntos de expresiones de L que les estén asociados.

El establecimiento de una aplicación de este tipo suele calificarse de *aritmetización de la sintaxis* de L y los diversos procedimientos para lograrlo, *numeraciones.* La más clásica de las mismas procede de Godel y, de aquí, también reciben el nombre de godelización del lenguaje formal correspondiente, aunque existen numeraciones como la de Post, la de Kleene...

La Godelización o codificación de la sintaxis de L se hace en tres fases fundamentales:

i) Mediante el establecimiento de una aplicación de los símbolos del alfabeto de L en los números naturales. Si s es uno de los símbolos del alfabeto, sea S el numeral correspondiente.

ii) Dada una expresión *ex,* como la misma no es otra cosa que una sucesión gráfica de elementos del alfabeto, estará compuesta -en el orden de escritura- por una ordenación de dichos elementos, y el número asociado a *ex* vendrá dado por el producto g(cx) = Op(n)Sn donde p(n) es el n-sima número primo y sn el numeral asociado al elemento n de la ordenación que compone la expresión *ex.*

iii) Dada una sucesión de expresiones (ex) = (cx_1, cx_2, ..•, cxn) el número asociado a la sucesión vendrá dado por el producto g((cx)) =flp(n)g(aJ.

Una aritmetización hace pasar del conjunto de expresiones construidas sobre L al conjunto natural correspondiente. Y cabe plantearse, del hecho de que toda proposición no sea más que la expresión o sucesión de símbolos y una teoría formal elemental no sea otra cosa que un conjunto de expresiones cerrado respecto a la derivación formal, si los subconjuntos de números naturales correspondientes son o no de naturaleza especial, con lo cual el conjunto de las proposiciones correspondientes poseerán también la misma naturaleza. En este sentido uno de los resultados fundamentales lo constituye el teorema de Godel de la completitud semántica ya mencionado y que indicaba que el conjunto de todas las fórmulas universalmente válidas de una lógica formal de primer orden coincide con el conjunto de todas las fórmulas derivables. En términos de teoría de funciones recursivas, el teorema adoptaría una expresión como:

> El conjunto de fórmulas universalmente válidas de una teoría de primer orden es recursivamente numerable.

Al mencionar el concepto de demostración formal indiqué que si bien la noción 'la sucesión (a) es una demostración de *a*' es un concepto efectivo, no lo es por el contrario un enunciado como 'existe una demostración (a) de *a*'. Este enunciado requiere la precisión de lo que pueda entenderse por efectivo, por decidible, y ello en el sentido de que pueden existir conjuntos recursivamente numerables que no sean recursivos, aunque sí se verifique que todo conjunto recursivo es recursivamente numerable. Y ello conduce a la definición:

> Una teoría es *decidible* cuando y sólo cuando el conjunto de sus teoremas es recursivo. Es *esencialmente indecidihle* cuando toda teoría consistente que la contiene es indecidible.

Por supuesto el conjunto de teoremas no, sino el conjunto de números naturales asociado a dicha teoría mediante la correspondiente aritmetización de la sintaxis del lenguaje formal en el que dichas expresiones estén construidas. Abuso de lenguaje que facilita, sin embargo, la expresión, sin dar lugar a equívocos.

Se observa que toda teoría inconsistente o contradictoria es decidible ya que todo teorema será consecuencia de una contradicción y todas las fórmulas serán teoremas, con lo cual el conjunto generado será recursivo.

Un resultado fundamental ligado a todo sistema formal de primer orden es el que da cuenta, precisamente, del hecho de que la relación 'existe una demostración formal de' no es efectiva, es decir, que no existe proceso finito alguno para decidir de una fórmula arbitrariamente dada si es o no válida, si es o no teorema y, por tanto, con mayor razón, de si se sigue o no de un conjunto de fórmulas previamente dado. Este resultado fundamental recibe el nombre de teorema de Church y puede enunciarse:

> El conjunto de todas las proposiciones de un sistema lógico de primer orden es un conjunto creativo –y, por tanto, no es recursivo–. En particular, el cálculo de predicados de primer orden es indecidible.

La decidibilidad se liga estrechamente a la noción de completitud en el sentido de que la incompletitud lo que asegura, en el fondo, es la no existencia de algoritmo alguno que permita obtener el conjunto de todas las fórmulas válidas de la teoría considerada.

Enlace que puede demostrarse de manera ngurosa tras el enunciado,

Toda teoría recursivamente numerable y completa es decidible.

Como me interesa destacar algunos métodos creados en el enfoque formal para la resolución de las cuestiones que en él se plantean, debo indicar que uno de los métodos aplicables para la demostración de la indecibilidad de teorías se apoya en dos proposiciones como:

i) Toda teoría que puede extenderse a otra mediante la ampliación de un número finito de axiomas y que contiene una teoría esencialmente indecidible, es indecidible.
ii) Si de una teoría se suprime un número finito de axiomas, y es indecidible, la restricción obtenida también es indecidible.

Averiguar la decidibilidad de teorías matemáticas, con la consiguiente creación de métodos adecuados para la resolución de este problema particular, se ha convertido en uno de los capítulos de la aplicación de la teoría de la recursividad y computabilidad al enfoque formal. En este campo, un resultado fundamental viene dado por el teorema de incompletitud de Godel ya mencionado y que ahora recibe la formulación:

El conjunto de todas las fórmulas universalmente válidas de un sistema lógico de segundo orden no es recursivamente numerable.

Otro resultado no menos fundamental se tiene en la afirmación: La aritmética formal elemental es incompleta y, por consiguiente, indecidible.

Afirmación que, en términos de recursividad, puede escindirse en dos:

i) El conjunto de proposiciones de la aritmética elemental es productivo
ii) El conjunto de proposiciones falsas de la aritmética elemental es productivo.

Inmediata consecuencia de contenido epistemológico es que el conjunto de proposiciones válidas de la aritmética elemental constituye una teoría indecidible y. por la condición impuesta al conjunto de axiomas para cualquier teoría formal-ya mencionada-, resulta que la misma no es axiomatizable. Puede generalizarse indicando que las *teorías axiomatizables son,* por modo exclusivo, *las recursivamente numerables.* Y ello conduce a la concepción de que ninguna axiomatización de la matemática puede aprehender todas las proposiciones válidas de la aritmética y, con mayor motivo, todas las proposiciones válidas de la matemática -si es que las mismas pueden aceptarse como dadas en acto-. Igualmente, vuelve a encontrarse la afirmación de que para cualquier axiomatización podrán construirse fórmulas válidas pero indemostrables en la misma. La validez no se muestra equivalente, en estos casos, con la demostración.

Entre otros resultados que la teoría de la recursividad aporta a la decidibilidad, pueden mencionarse los de la demostración de que son decidibles teorías como la de cuerpos algebraicamente cerrados, grupos abelianos, grupos abelianos ordenados, grupos libres, cuerpos p-ádicos, geometrías euclídea e hiperbólica, álgebras booleanas ..., y son teorías indecidibles las de semigrupos, anillos, cuerpos, retículos, teoría de grupos, teoría de conjuntos ZFS... Además, el enlace señalado con la completitud indica que tests como el de Vaught o el de eliminación de cuantificadotes también pueden aplicarse a problemas de decidibilidad.

Deseo terminar este apartado indicando que es en el campo de las funciones recursivas en el que se ha resuelto un viejo problema, el décimo de Hilbert acerca de las ecuaciones diofánticas. Problema cuya solución presenta una interpretación epistemológica verdaderamente interesante. Como he indicado las demostraciones formalizadas en el hacer matemático son reducibles a proposiciones acerca de operaciones aritméticas. Si consideramos como una medida de la complejidad de un sistema diofántico el número de operaciones -adiciones y multiplicaciones- que se necesitan para escribir el sistema, resultará que se habrá obtenido una medida para la complejidad de las demostraciones matemáticas. Y un teorema de Matijasevic puede establecerse en términos de cota superior para la complejidad de las demostraciones matemáticas. Cota superior establecida por Jones en 243, que puede ser reducida a 149, y que puede enunciarse en los términos

Para toda teoría axiomatizable T y cualquier proposición P, si P tiene una demostración en T, entonces P tiene otra demostración que consta de sólo 243 adiciones y multiplicaciones de enteros.

1.3.7. *Clasificación y caracterización de Lógicas*

Es tradicional que la descripción y ejemplificación de la axiomática se centre en lenguajes formales de primer orden, y sus lógicas correspondientes, con su condición esencial: la de que tales lenguajes, desde un enfoque semántico, puedan ser dotados de valoración. Es limitación que, para algunos, se quiere consecuente con la práctica matemática dado que la mayoría de las teorías matemáticas se pueden expresar en tales lenguajes de primer orden –o reducidas al mismo mediante expedientes artificiales adecuados- y puede atribuirse a las proposiciones de los mismos una valoración veritativa, en general bivalente, aunque una posible generalización pueda centrarse en la supresión de tal bivalencia pasando a conjuntos veritativos de más de dos elementos –y ello ha dado paso a las lógicas calificadas como polivalentes-.

Sin embargo, el método axiomático, en su enfoque formal, puede ir más allá. No sólo en cuanto extensión de lenguajes y expansión correlativa de teorías construidas sobre ellos, sino en cuanto a la propia posibilidad de suprimir la caracterización valorativa. En cuanto al primer punto, mediante extensiones de los lenguajes a órdenes cualesquiera; en el segundo, mediante la construcción de lenguajes no valorativos como los lenguajes modales. Es claro que las condiciones epistemológicas que satisfacen los lenguajes formales de primer orden pueden variar en ambos casos.

Se recuerda que las lógicas formales -y, consecuentemente, las teorías formales- dependen del vocabulario elegido, de su cardinalidad, así como de sus componentes y, punto que en general no se explicita, de la posibilidad de admitir en la construcción de las expresiones una longitud no necesariamente finita. Atender a cada una de estas condiciones conducirá a la creación de otros tantos sistemas formales, cuya construcción únicamente estará posibilitada por el método axiomático que le da origen.

De esta forma se tiene que el lenguaje de primer orden L_1 permite la cuantificación, por modo exclusivo, de los símbolos de variable de individuo. Si se agrega al conjunto de símbolos lógicos un cuantificador de predicado se obtendrá un lenguaje de segundo orden y, con él, una lógica de orden dos. Pero también pueden admitirse en L_1 reglas que permitan establecer conjunciones y disjunciones con un cardinal numerable de elementos, con lo cual se pasa a lógicas Lw.w y, si son de longitud arbitraria, a lógicas Lx.w' donde el primer subíndice indica el menor cardinal mayor que el número de términos que intervienen en cualquier conjunción o disjunción de símbolos del lenguaje, mientras que el segundo indica el número de variables que pueden venir tras el cuantificador. De modo análogo puede agregarse a L_1 un nuevo cuantificador, único, para obtener una lógica $L_1(Q)$ en la cual una expresión Qxa(x) se satisface en un modelo si y sólo si hay una infinidad de elementos que satisfacen a *ex* en dicho modelo.

Ahora bien, la aparición de estas distintas lógicas, permite que aparezca, simultáneamente, como problema, el averiguar qué propiedades son comunes a los diferentes lenguajes y lógicas subsiguientes o qué propiedades, si las hay, caracterizan a un determinado[1] tipo de lógica.

Uno de los resultados más interesantes en este campo estriba en haber puesto de relieve la importancia de dos propiedades, las de compacticidad y la de Lówenheim-Skolem-Tarski ascendente, ya que son ellas las que permiten caracterizar, precisamente, a los lenguajes de primer orden. Y ello porque no va a existir extensión propia de L_1 que satisfaga ambas propiedades a la vez. Quiero decir, se sabía que la propiedad de compacticidad la cumplen lógicas como L_1, $L_1(Q)$ –y ésta sólo para conjuntos numerables de proposiciones–; la propiedad de Lówenheim-Skolem-Tarski tanto L_1 como Lw.*w* y L2.*w*• pero no L2 ni Loe.*w*· Los intentos de comprobar que ambas propiedades podían verificarse en extensiones de L_1 no daban fruto. Y el motivo estaba en la negativa de su verificación simultánea demostrada por Lindstróm en 1969. Demostración que invertía el problema -método de inversión característico de todas las demostraciones de cierre que se han ido sucediendo en los diversos haceres matemáticos-·y consistía en demostrar que cualquier lógica que verificara ambas propiedades a la vez era isomorfa a L_1. Se imposibilitaba así la existencia de cualquier extensión propia de L_1 con ambas propiedades. La demostración de Lindstróm se apoya en la precisión, como punto de partida, del concepto de lógica general L, que se puede fundamentar, a su vez, en la caracterización algebraica de 'clase elemental' –y que corresponde a la noción de clase elemental finitamente axiomatizable-.

El teorema de Lindstrom posee un gran alcance metodológico y epistemológico y justifica, además, la importancia concedida a la lógica de primer orden. Importancia que corrobora, por otro lado, con un segundo teorema caracterizador de L_1 en cuanto a la numerabilidad y a la propiedad de Lowenheim-Skolem-Tarski y que establece que L_1 es una lógica general efectiva -por satisfacer este teorema y ser recursivamente numerable su conjunto de proposiciones universalmente válidas- y, lo que es fundamental, cualquier otra lógica que satisfaga estas dos condiciones es equivalente elementalmente a L_1.

2

LAS CREENCIAS

Obscumm per ohscurius. i¡?nulum pl'r ignolius

l. La descripción del método axiomático que he realizado en la primera parte es la de éste método tal como se me presenta en el hacer matemático, escindido según los condicionantes epistemológicos en dos vertientes, postulacional o pragmática, formal o sintáctica. Descripción que corresponde al método axiomático tal como surge tras la ruptura producida en el hacer matemático en los entornos de 1939. Y si este es el estado actual, como técnica puede ser instrumentalizado desde muy diferentes enfoques. Enfoques que veo escindidos, básicamente, en tres según las creencias que tenga el matemático que hace uso del método. Enfoques coexistentes hoy día, pero que no son, al menos dos de ellos, de hoy día. Precisamente los que dan origen al método, a su auge, a su decadencia. Circunstancia que obliga a dar una mirada atrás para un intento de captar las creencias que determinan esos dos enfoques, coexistentes hoy día con el que he descrito, pero que en su formulación original dan cuenta más límpida de la auténtica creencia que los soporta, sin los sincretismos al uso.

Mirada atrás en función de obtener lo que el método, como aparente instrumento inocuo, no muestra, obtener lo que se oculta en su origen y manejo porque todo instrumento, sea o no conceptual, está hecho en función de una misión, de un fin teleológico que lo trasciende. Pero en esa mirada atrás no pretendo agotar todo el haz de creencias, todo el contexto de cada uno de los momentos. Y ello, por dos motivos: El primero, porque en la instrumentalización actual, el método axiomático puede ser usado con creencias diferentes, aunque el contexto total sea el mismo para cada uso. En segundo lugar, porque no pretendo hacer historia del hacer matemático, sino dar alguna de las creencias con las que el método se maneja en dicho hacer.

Historia que, por otro lado, mostraría su impotencia en el intento de exponer el total de dicho contexto en el cual surge y se aplica el método. Contexto imposible de captar en su totalidad desde un contexto actual, muy diferente en las componentes sociológicas, culturales, económicas. Por poner un ejemplo, hay que tener presente que, con pocos siglos de diferencia, el simbolismo que encierran cuadros como los de Ticiano, Tintoretto o El Greco quedan prácticamente perdidos para nuestro mundo actual salvo para estudio especiales de iconología... Además, esa historia del método en la complejidad de sus creencias exigiría una historia global de la cultura, de la totalidad de actos de cada contexto, totalidad como la apuntada en el inicio de este trabajo referida a la crisis en que la sociedad contemporánea se me presenta inmersa. Totalidad de actos que pudieran reflejar un mismo fondo común, interactuante en cada uno de los haceres en que, de modo obligado, debe pensarse. Actos que constituyen una unidad en la que el matemático se encuentra inJJlerso, como un individuo más, y de los que es difícil desgajar, como ha hecho el positivismo, los que se consideran logrados de los fallidos. Estos últimos estimados como entorpecedores de la 'verdadera' marcha de la historia, en este caso de la historia de las ciencias. Desgaje de actos, análisis o división de una totalidad apoyados en una visión posterior, en una creencia en la marcha 'progresiva' de la historia, enfocada linealmente, por la cual en cada momento se alcanza el culmen de todo un proceso histórico lineal anterior cuyo único objetivo -postulado de reificación antropomórfica- era llevar al hombre hasta el estado presente. Pero tal marcha lineal histórica no existe, ni la ciencia ha 'progresado' siempre y en la misma línea, sino que en su trabajo, en el de quienes la hacen posible, han confluido, en cada momento, muy diversas tendencias, con sus cargas ideológicas, con influjos nada positivistas como los de la alquimia, el neoplatonismo, la idea de la captación de la 'verdadera' naturaleza, la creencia en que el hombre impone realmente leyes aunque lo dulcifique con términos como los de su descubrimiento... Componentes que, para los que mantienen un cerrado positivismo, pueden escindirse logrando separar lo que es positivo de la ganga, lo auténticamente científico de las ideas entorpecedoras de esa marcha que ha conducido hasta el estado actual; cuando de hecho esta separación es imposible, porque no hay ganga –y su propia actitud es una clara manifestación de lo contrario de lo que sostienen, al enfocar tal desarrollo científico desde una creencia previa que obliga a ver lo que sus anteojeras permiten ver–. Enfoque analítico frente al contexto de totalidades que permitan dar una imagen menos deformada y deformante de alguno de los factores esenciales que condicionan la creatividad y, básicamente, la propia burbuja conceptual, el plano del pensamiento puro, en la que el hacer matemático se encuentra inmerso. Separar lo que es inseparable, por no llevar hasta sus consecuencias la esencia del método axiomático, que exige el trabajo de cótica racional y, con ella, el develamiento de todas las hipótesis previas e implícitas que condicionan el trabajo racional. O, en caso contrario, dotar a la ciencia de un halo de notas que no se corresponden con las que auténticamente la motivaron y la hicieron factible.

Sin una historia global, y en esta vuelta atrás, pretendo poner de relieve algunas creencias en cuanto al método axiomático y sólo en el hacer matemático. Creencias que son las que condicionan los enfoques con los que se usa o se critica en cada ocasión, y que tampoco pueden separarse de las creencias del conocimiento al que, racionalizándose, dan paso. Debo ser consciente y, aunque no pretenda una historia del método axiomático sino sólo un esbozo de las creencias que se entremezclan en su uso, debo reconocer que en esta pretensión también se encuentra una obligada deformación, por la limitación a sólo uno de los aspectos de esa historia del conocimiento, a sólo uno de los aspectos de la superestructura cognoscitiva.

Así, por ejemplo, para el contexto pitagórico-platónico debeóa indicar el entorno heleno, las crisis en que se logra la adquisición definitiva de la burbuja conceptual frente a las perceptiva, ética, económica...; crisis incluso provocadas por las epidemias con sus secuelas de todo orden. O el reflejo de unas mismas apetencias en la oratoria forense con el recurso de admitir las premisas del contrario en la argumentación para llegar a una contradicción y negar tales premisas –y es la reducción al absurdo tan querida al matemático heleno, al lógico hindú en otros lugares, pero ahora como secuelas del budismo–. O las apetencias políticas y las formas de gobierno que adoptan, fundamentalmente en la democracia imperialista ateniense, con su juego incluso de imágenes geométricas para la plasmación concreta del ágora, con el círculo y su punto medio donde situarse el demócrata orador, a igual distancia de sus iguales, pero con el bastón de mando respecto a sus siervos. O el reflejo en la creencia de un orden cósmico, un orden inmutable tras el caos de los fenómenos naturales, orden establecido primero por los dioses –y de aquí que éstos tuvieran que ser respetados– y después por la ley creada por los hombres mediante la previa ayuda divina y que conduce a la admisión de la perfección de tal orden cósmico y la existencia de un espacio correspondiente, contrapuesto al espacio fenoménico, que es el de los sentidos, frente al espacio de la realidad absoluta; creación de leyes mediante una investigación anterior que provoca su aceptación y acatamiento 'racionales' y no por la mera opinión acrítica, de donde se alcanza que el conocimiento 'verdadero' se convierte en el fin primordial, pero conocimiento verdadero de la realidad existente en ese espacio cósmico, ordenado y no caótico, y donde la percepción sensible nada tiene que hacer, necesitándose otro tipo de instrumento, el conceptual, la racionalidad argumentativa y ordenadora. Fin primordial pero no como fin en sí mismo, no el conocimiento por el conocimiento, no como adminículo que cada individuo deba poseer más o menos artificialmente, sino como medio de vida dichosa, feliz, de cada individuo; fin que implica la búsqueda de una ética racional sustitutiva, en el fondo, de la impuesta por los dioses; fin que indica, simultáneamente, la pugna entre la burbuja conceptual, naciente, contra las restantes burbujas y las dificultades de su auténtica constitución, siempre bajo el peligro de ser subsumida, y ello nada más nacer, por las restantes parcelas en que se plasma la actividad humana. Ideas, las anteriores, que se manifiestan no sólo en la política democrática imperialista ateniense, en la ciencia, en el arte, sino también a través de la literatura, como lo revelan los siguientes versos de Eurípides, el amigo de Sócrates:

> Dichoso el que tiene conocimiento
> que viene de la investigación. No mueve mal
> para sus conciudadanos, ni se entrega
> a injustos hechos
> sino que vigila el orden que no envejece
> de la naturaleza inmortal, de lo que está hecho,
> y de dónde y como.

Parcial vuelta atrás para tratar de obtener alguno de los condicionantes, de las creencias que posibilitaron la manifestación y uso del método hipotético-deductivo. Bien entendido que sólo trato del método en el hacer matemático y no del contenido que por él se obtiene, lo que dificulta, aún más, la exposición, ya que ambos deberían no separarse porque no se puede razonar, contra la opinión de algunos, en el vacío, en la forma sin contenido. Parcial vuelta atrás, insisto, con todas estas limitaciones que no por ello deben impedir dicha vuelta, y la posible captación de alguna de las creencias que soportan el uso del método axiomático.

2. Y lo primero que se me presenta es que la concepción del método es una concepción nueva del hacer matemático actual, del surgido en los entornos de 1939. El llamado método postulacional por los matemáticos anteriores, método postulacional «clásico» o hipotético-deductivo, no coincide plenamente con la descripción que he realizado en la primera parte. Una de las diferencias esenciales se centra en que en su uso el método postulacional se autolimitaba al desarrollo interno de una teoría única, sin precisar que tal teoría lo era de una estructura delimitada del pensamiento puro. El objeto de la teoría se encuentra dado de antemano y mediante el método hipotético-deductivo o bien se ordenan las proposiciones acerca de tales objetos o bien se pretende dar un fundamento estrictamente racional de dichas proposiciones o bien se intenta obtener, mediante el proceso deductivo, las consecuencias de unas hipótesis previas dadas de las que no se sabe si poseen o no referencial. Se carece de la posibilidad del salto conceptual que supone la ruptura epistemológica de los entornos de 1939 en la cual se va a considerar una teoría deductiva como cerrada con el dato previo de sus axiomas que son los que permiten construir -o, en proceso recíproco, definir-la estructura de la cual se realiza la teoría. Ahora bien, con dicha clausura, la propia teoría se convierte en objeto de investigación como unidad, al igual que las subestructuras de una estructura dada. No hay, ya, una sola teoría, sino una diversidad de teorías que permiten engendrar, comparándolas entre sí, otras nuevas, aunque no se hayan desarrollado todas las proposiciones posibles de cada una de las mismas... No hay, ya, mero encadenamiento proposicional deductivo, sino una construcción permanente entre los dos polos estructura-teoría y en cualquier caso hay siempre un referencial de la teoría hacia su o sus modelos.

Es un salto conceptual que exige no sólo de las primeras componentes del método axiomático, ahora componentes definicionales de la estructura a la que se hace referencia, sino básicamente las restantes -subestructura, estructura cociente, producto cartesiano...-, que son las operativas y constructivas en el nuevo hacer.

Igualmente, y por razones idénticas, los conceptos que el método entraña y las condiciones exigibles en su fase constructiva axiomática, forman parte del hacer surgido tras la ruptura epistemológica citada, aunque por supuesto alguna de tales condiciones -principalmente las de independencia en cuanto a los axiomas-se hayan formulado también para el uso del método postulacional clásico. Incluso en él han tenido más repercusión que en el axiomático constructivo, quizá porque era la única cuestión planteable a este nivel de teoría única, que imposibilitaba ver sus limitaciones, sus fronteras respecto a otras teorías conceptuales. Uso clásico por el cual, mezclado con el actual en sincretismo no muy coherente, se han realizado preguntas por la consistencia de una proposición, por ejemplo, pregunta carente de sentido y que revela una mezcla acrítica, confusa, en la concepción del método, porque la misma sólo alcanza su pleno sentido para la teoría de una estructura completa, para la teoría deductiva ya cerrada.

E insisto en una precisión ya mencionada más de una vez: cuando afirmo que una teoría se estima clausurada por el dato de los axiomas que describen una estructura, no indico que, por ese mero hecho, se conozcan de facto todas las proposiciones de la teoría; o que las mismas se encuentren todas, ya, demostradas. Afirmar eso sería peor que una mentira, sería una muestra de confusión integraL Una teoría contiene una infinidad de proposiciones por lo cual puede seguir desarrollándose, y los buenos matemáticos pueden seguir encontrando nuevas proposiciones y nuevas demostraciones que agregar a lo conocido, si es que ello tiene algún interés mayor que la propia satisfacción individual de lograrla o permitir la confección de tesis doctorales o grandes publicaciones originales... Y el ejemplo de las propiedades de los triángulos en geometría euclídea 'clásica', sintética, que se han ido obteniendo recientemente, indica con claridad lo que quiero indicar.

La diferencia en la concepción tanto del uso del método axiomático como, por ello mismo, de sus componentes fundamentales, se muestra tomando los modelos del método en los distintos haceres matemáticos: en los *Elementm* de Euclides, en *De los centros de gravedad de las figuras planas* de Arquímedes, en *Consideraciones y demostraciones matemáticas de dos nuevas ciencias* de Galileo, en *Principia mathematica* de Newton, en todos los trabajos fundamentales de la geometría de Hilbert, de Peano y su escuela italiana, o los de Veblen y Young sobre la geometría proyectiva, en los escritos de Frege, tan lúcidos como crítica respecto a las creencias que admiten sin más los matemáticos y de los que destacaría su *Fundamentos de la Aritmética* y su ensayo, muy posterior, «La lógica en la matemática» donde no quiere ver la inflexión que el método axiomático va a sufrir, quedándose en su concepción de mero encadenamiento fundacional... Distintos momentos, distintos haceres y, aparentemente, un mismo método. Sólo aparentemente, porque al ser distintos en el objetivo, las creencias que lo soportan, hace que ese método muestre sus diferencias.

Y en este punto se encuentra una de las claves de este trabajo, porque en general se tiende a enfocar el método axiomático como si fuera el método postulacional clásico, el hipotético-deductivo, quedando empañado, de esta forma, tanto en su concepción propia como por las creencias que posibilitaron dicho método hipotético-deductivo. Y sólo un estudio de estas creencias permitirá ver, clarificar las notas esenciales del método tal como lo he intentado describir en la Primera parte. Igualmente, permitirá delimitar las creencias que, a su vez, lo comportan. Unicamente de esta forma podrán estimarse algunas críticas, enfoque que implicará la simultánea disolución de las mismas.

3. En esta parcial vuelta atrás voy a suponer, por parte del lector, el conocimiento de aquello que, desde la perspectiva alcanzada, se pretende observar. Quiero decir: voy a suponer, por parte del lector, el conocimiento de obras como las antes citadas, paradigmas del método axiomático en cuanto plasmación y creación de disciplinas como la geometría, estática, dinámica... Conocimiento al menos en cuanto a su estructura si no en cuanto a su estudio y desarrollo internos -lo cual, ciertamente, interesaría, y mucho, para que no se mantuviera en el plano de mero contemplador comentador superficial, con el permanente peligro ya señalado de las equivocidades y sus poluciones informativas-. En todo caso, en esta vuelta atrás lo que interesa, aquí, es el núcleo de las concepciones que posibilitaron el empleo del método, concepcio-

nes que, por otro lado, no se encuentran, en general, explicitadas en casi ninguna de tales obras. El método está involucrado o inmerso en la previa concepción que se tenga del objeto y de las formas de captarlo. Conceptuación del objeto matemático, formas del conocimiento, van a ser las bases o constituyentes de las ontologías o creencias que subyacen a todo hacer y, con él, al método empleado. Es lo que, con toda nitidez, nos mostrará esta vuelta atrás, esa mirada al hacer matemático en cuanto a uno de los métodos usados en el mismo.

Vuelta atrás que voy a escindir en tres momentos, según la conceptuación del objeto y, con ella, del hacer matemático. Tres momentos que responden a la idea de que el objeto: *a)* Se encuentra dado con independencia del hombre y se plantea el cómo captarlo y si un método deductivo es o no necesario; *h)* Ha de ser obtenido porque no todo se encuentra dado en la naturaleza de antemano, pero entonces surge la cuestión de cómo realizar dicha abstracción así como de justificar lo en ella obtenido; e) Ha de ser construido como objeto conceptual independientemente de las restantes burbujas en las que se encuentra inmerso el hombre, y el problema, ahora, es el de clarificar el instrumento adecuado para dicha construcción conceptual.

Desde estos tres enfoques pueden, incluso, hacerse críticas a las realizaciones de los cómo de los restantes, críticas que pueden ser inconsecuentes por salir de su marco de validez. Finalmente debo advertir que aunque haga una vuelta atrás, los tres momentos no se corresponden con unos períodos históricos determinados sino que prácticamente implican, en sus variaciones, toda la conceptuación del hacer matemático -aunque existan conceptuaciones intermedias, pero siempre como pretendidos sincretismos de las tres apuntadas- y, de aquí, su constancia en esas diferentes separaciones históricas, artificiales, que no se corresponden con las etapas auténticamente conceptuales, aunque las mismas muestren sus naturales variaciones. Haber elegido uno u otro autor, uno u otro momento, entra de lleno en las facultades electivas de quien esto escribe.

En función de las conceptuaciones del objeto voy a calificar los tres momentos con los términos: Lo dado, Lo descubierto, Lo construido.

2.1. *LO DADO*

1. Dado un triángulo, sus medianas se cortan, lo quiera o no el matemático, el hombre de la calle, en un punto interior, y el punto de intersección es el centro de gravedad, el baricentro del triángulo; y ese punto se encuentra sobre cada mediana a 2/3 del vértice y a 1/3 del lado; esta última proporción es la misma sea cual sea el tipo de triángulo. Si éste es rectángulo, el punto medio de la hipotenusa es el centro de la circunferencia circunscrita; además, el cuadrado de la hipotenusa es la suma de los cuadrados de los catetos y si es rectángulo isósceles, la longitud de dicha hipotenusa es inconmensurable con la de los catetos...

Supuesto el triángulo, en él se encuentra todo un haz de propiedades como las anteriores que son constitutivas del mismo, obligatoriamente, aunque el hombre de la calle, el matemático no tenga conocimiento de las mismas, de todas las que pueden predicarse. Lo que varia, la figura material que se dibuja y borra, el nombre que se asigna a cada elemento del triángulo y que puede ser convencional, aunque se quiera que dicho nombre sea lo más adecuado a la idea de aquéllo que nombra. Adecuación no siempre posible, pero que tampoco es fundamental, aunque se pueda exigir, en un momento, un acuerdo entre tales nombres para la menor equivocidad y el mayor entendimiento posibles. Más allá del matemático, de cualquier opinión que pueda tener, el objeto matemático -no la figura particular y concreta, no el símbolo, no el nombre- presenta una realidad y una necesidad en una serie de propiedades que se derivan de los supuestos que se establezcan en la que nadie puede influir: una vez puesto esto, se sigue necesariamente...; necesidad impuesta por la previa existencia del objeto del cual las propiedades puedan predicarse. Necesidad que va en contra, incluso, de la práctica empírica como puede observarse en la última propiedad mencionada de la inconmensurabilidad de una longitud dada respecto a otra, también dada, imposible de obtener por experiencia alguna.

Ante la objetividad del objeto matemático cabe una posición, primera: aceptar que el objeto exista con independencia del hombre que lo conoce -bien entendido que del hombre como especie, no como individuo aislado, particular-. Este no pone supuestos de los que derivar, temporalmente, las propiedades que en él se contienen; ha de limitarse a describir, meramente, dichos supuestos, a captarlos. En otras palabras, admitido como punto de partida que el objeto matemático se encuentre dado puede enfocarse como un objeto existente en sí, con independencia de quien lo conoce.

Adoptada esta posición, supone que los objetos matemáticos, como objetos reales, se encuentran inmersos en un mundo real, eidético, de formas puras -el argumento hasta llegar a esta conclusión es lineal-. Mundo o espacio contrapuesto al fenoménico o perceptivo, originador de la triada caos-hombre-cosmos. A partir de esta creencia, el método va a sufrir una influencia considerable, y ello porque si el objeto no es construido o elaborado en modo alguno, su conocimiento perfecto sólo podrá venir dado por la intuición eidética, intuición 'racional' de la que sobrará cualquier tipo de explicación o acompañamiento aclaratorio, que únicamente enturbiarán la captación directa del ser en su totalidad, en su ser ahí.

Platón, en *Teeteto,* lo precisará cuando señale que algunos decían que una ciencia consiste en el juicio exacto acompañado de explicación. Se opone a estas ideas, precisa: «poder decir en qué la cosa, acerca de la que se nos interroga, difiere de todas las demás». En otras palabras, el conocimiento ha de ser directo y, en él, cualquier explicación sobra. Basta, si se quiere explicar lo visto, definirlo mediante un juicio exacto, mediante el decir lo que es y en lo que se diferencia específicamente de los demás. Y un juicio exacto, se lee en *Sofista,* una proposición verdadera, es la que establece los hechos tal como son, mientras que si establece cosas distintas a los hechos, la proposición será falsa; en otras palabras, una proposición falsa describe cosas que no son como si fueran -y es el principio de «verdad» como adecuación-.

Ahora bien, si la captación intuitiva es un acto instantáneo, el hombre no puede realizarlo en esa atemporalidad, al menos en el hacer matemático. Dado un triángulo, en él, en la presencia de su imagen, se tienen todas las propiedades de cualquier triángulo, y todas completas, en acto; pero el hombre no las ve en su inmediatez. Su limitación es grande. El hombre, que no ve lo que en su presencia tiene, ha de recordar. Y, para recordar, tiene que ejercitar su razonamiento, ejercitación a lo largo del tiempo, además. Si dado un triángulo se contienen en él todas sus propiedades, bastará dar dicho triángulo como supuesto y, a partir de él, hay que ir obteniendo el total de las propiedades mediante el uso del razonamiento, uso que se enfocará como un ejercicio de recordación, de elevación hasta ese mundo de formas puras en el que basta la mirada para la captación inmediata de todas las propiedades de lo supuesto. Pero de aquí la afirmación de que todo se contenga en los primeros principios y pueda estimarse que el método deductivo sea o se muestre como secundario, método de ejercicio y ascesis, de recordación.

En *Cratilo,* y después de referirse a la aritmética, Platón precisará: Lo mismo sucede en la construcción de una figura de geometría; si se incurre al principio en algún error, aunque sea ligero e imperceptible, en todo lo ulterior se notan las consecuencias. Por esta razón es preciso en todos los casos que el hombre se entregue a largas reflexiones y a largas indagaciones, para asegurarse de si el principio sentado es exacto o no; cuando lo haya examinado bien, «las consecuencias irán apareciendo con todo rigor>>. La clave, pues, se encuentra en la búsqueda de los primeros principios, base y apoyatura de lo que los mismos contienen, de todo el razonamiento porque, según se lee en *Fedón:* «todos los razonamientos que no se apoyan sino en la probabilidad, están henchidos de vanidad... extravían y engañan lo mismo en geometría que en cualquier otra ciencia». Una doctrina, una teoría, sólo estará bien fundada cuando lo esté «en un principio sólido>>. De este principio es del que se obtendrán las consecuencias necesarias que compondrán el cuerpo de conocimiento, obligadamente mediato por la impotencia del hombre, por su caída. Consecuencia de estas ideas previas, la composición del método hipotético que el matemático ha de ejercitar. Método que se escinde en las siguientes fases, como Platón explicitará en *La República:*

I. Primeros supuestos de aquéllo que se investiga –lo parimpar si aritmética, las figuras si geometría, el movimiento si mecánica, la proporción numérica si música...

2. Conocimiento de tales supuestos, que no requieren explicación alguna, sino mero establecimiento.

3. Evidencia de los mismos, dada por la captación de la idea que su definición implica.

4. . Deducción a partir de los supuestos, con rigor total.

Cabe insistir en el hecho de que esta deducción demostrativa, cuando se establece para cada proposición particular y no para el total de la materia de que se trate, se hace sobre la circunferencia que se traza y se borra -recordar las ejemplificaciones dadas en

Menón. los párrafos de la *Carta VII*–, pero tales concreciones se pierden en el método porque las mismas se enfocan como elementos generales, olvidando todas las particularidades propias de las figuras, de los símbolos materiales trazados. Es decir, las propiedades generales, para ser demostradas, requieren la particularización en un elemento concreto que represente o sea modelo de todos los demás. Es el mecanismo de particularización característico de cualquier demostración matemática. El símbolo gráfico no es más que un reflejo sobre el cual ir construyendo y es esta construcción, o demostración, la clave de la rememoración, dado que se la emplea solamente como imagen buscando lo que no se puede ver sino con el pensamiento, por lo que se habla del cuadrado y del diámetro en cuanto tales y no de los que se están dibujando. De aquí que las demostraciones posean un carácter eminentemente constructivo y particularizador –incluso cuando uno de los mecanismos más utilizados, de los que más se haga uso, sea el de reducción al absurdo, cuya crítica sería factible únicamente cuando se lo emplea con clases infinitas– para, al final, indicar que lo mismo se puede atribuir de cualquier otra figura, de cualquier otro elemento, pasando de esta manera al mecanismo generalizador.

El método axiomático se encuentra totalmente dado en su aspecto postulacional de caracterizar la teoría global a partir de los primeros principios y, aún más, en el aspecto de dar el tipo, el modo demostrativo para cada una de las proposiciones de que se componga dicha teoría, es decir, que también se indica cuál es y cómo aplicar la maquinaria a las demostraciones o construcciones mediante los dos metateoremas –en lenguaje no de la época– de particularización y generalización, o mediante la reducción al absurdo..., que constituirían, realmente, las reglas demostrativas del sistema lógico subyacente en el que la teoría acerca de las figuras y los objetos se desarrolla.

Construcción demostrativa par.a recordar el mundo eidética, por no poseer el hombre la capacidad intuitiva necesaria, por su caída, para la captación directa del objeto y la figura, en cuyo caso sobraría la teoría y la construcción acerca de los mismos. Método constructivo-demostrativo que se manifiesta, de esta manera, como aparentemente secundario frente a la posible captación directa. Pero sólo aparentemente porque, de hecho, obtener todas las consecuencias necesarias de los primeros principios, de los supuestos, se hace imprescindible para el matemático por dos motivos: a) por la ya reseñada impotencia humana; b) porque el matemático es, antes que matemático, hombre y, como tal, ha de ejercitarse para el perfeccionamiento interior, para superar, en lo posible, la caída. El hacer matemático es un trabajo y, por este motivo, continúa poseyendo una componente mítica esencial, constituir un aprendizaje con esfuerzo, un ejercicio mental que permita elevar al hombre hacia el mundo eidética del cual procede su alma.

En este punto, el método axiomático o postulacional, el método hipotético-deductivo, se va a revelar como un proceso central y no sólo en cuanto a la re-construcción rememorativa, individual, personal de quien lo ejercita: es el que va a permitir organizar, ordenar el conocimiento matemático en *elementos,* en las componentes esenciales del mismo, establecidas en los primeros principios, en los supuestos iniciales. Elementos constitutivos del mundo eidético matemático, al igual que en la naturaleza material el filósofo debe buscar los elementos primeros de que está compuesta.

Método postulacional como clave y como reflejo de dos concepciones complementarias: por un lado, como método de búsqueda intelectual que apunta a un saber completo, unitario, contenido en los primeros supuestos, definitorios, y que dan los elementos en que se estructura, se organiza el saber.' Por otro, como método disciplinario de salvación, método disciplinario que conducirá a quien lo ejerce a una victoria sobre el tiempo y la muerte. Dos planos, dos aspectos por los que Platón exigirá la composición de Elementos matemáticos en la Academia, aspectos por los cuales el método postulacional alcanzará el rango primario en el sentido de desvirtuar al segundo de los planos, más estrictamente mítico, en beneficio del primero, de contenido más técnico, y en el que se desacraliza ese aspecto de salvación y ascesis, en beneficio de una tesis previa: la posibilidad unificadora de todo el saber, contenido en los primeros principios por modo exclusivo, primeros principios que deben decir lo que la cosa es mediante la diferencia específica respecto a las demás. Posibilidad unificadora de la reconstrucción cognoscitiva del mundo eidético de formas puras, ya dado previamente, por lo que el aspecto demostrativo no goza de un papel primario en función de cierre, función central en la demostración del método postulacional y formal en su enfoque actual, en el enfoque descrito en I. (Componente mítica que queda oculta en su manifestación arquitectónica explícita, producto de dicha componente, como una catedral oculta las motivaciones y, fundamentalmente, las proporciones, orientación, leyendas en su piedra, en sus muros).

En otros términos, el paso del acento mítico al desacralizado comporta que el objetivo sea el de captar un conjunto de verdades, que son las que van a expresar la constitución de lo real, mediante un orden lingüístico que procure reflejar lo más adecuadamente posible esa constitución real. Y ello frente a lo dado por la mera opinión, frente a la doxa, y a lo cambiante y cuya única realidad es ese cambio. Ahora bien, conlleva, al menos, dos puntos este paso desacralizador, originario del método axiomático o postulacional:

a) Que ese saber, que se dio y se ocultó al hombre, ya no se da completo, sino que el hombre tiene que conquistarlo mediante un trabajo, un ejercicio rememorativo -gracias al cual, por otro lado, alcanza su plenitud-; pero que, una vez conseguido, el mismo es eterno, porque la verdadera realidad no cambia en el tiempo, por no perecedera, «porque si lo que llamamos conocimiento no cesa de ser conocimiento, entonces el conocimiento subsiste, y hay conocimientO>>, según afirma en *Cratilo*. El conocimiento, el saber matemático va a gozar, de esta manera, de una nota de atemporalidad total: las propiedades del triángulo son verdaderas aquí y siempre. Nota de atemporalidad que participa de la atemporalidad de las formas puras y, con ella, de la necesidad de dichas formas, de dicho mundo.

b) La demostración, la construcción rememorativa no va a suponer construcción de conocimientos parcial, que supondría temporalidad y, con ella, imperfección y paso al caos con pérdida de su necesidad. Cuando se obtiene un saber, éste es completo, necesario. De aquí la importancia del conocimiento de los primeros principios, en ellos se contiene todo, porque incluyen todo el saber relacionado con los mismos, mostrándose, en este punto, la demostración como secundaria en el sentido de que establecidos los supuestos, cabe no intentar siquiera la obtención explícita de todas las propiedades que en ellos se contienen. Primeros principios que, en ocasiones, no son totalmente conocidos por lo cual la teoría que pueda obtenerse no dará cuenta completa del objeto de que trate, y labor del matemático será la obtención y clarificación de tales primeros principios, como Gódel remarcará en más de una ocasión refiriéndose a la teoría de conjuntos y a la necesidad de precisar los primeros principios o axiomas del infinito.

Admitir que el objeto matemático se encuentra dado en un mundo eidético, de formas puras, equivale a admitir que el saber matemático no se da en el tiempo, sino fuera del tiempo. Pertenece a un orden cósmico ligado a la propia inmutabilidad del demiurgo. Consecuencia inmediata, trasciende al hombre que ha de limitarse a descubrirlo, pero un descubrimiento de lo que, en el fondo, ya posee. Y aquí vuelve a incidir el método como recurso de una carga mítica, de una creencia previa. Como se declara en *Fedro*, el hombre, en su caída, ha sustituido el esfuerzo propio de la rememoración por la confianza en impresiones exteriores al espíritu, por lo cual permite que el olvido penetre en su alma por ausencia del ejercicio de la memoria. Ejercicio como único medio de impedir tal olvido y conseguir la vuelta a los orígenes. Ejercicio que encuentra una de sus máximas cumbres en el hacer matemático, en la disciplina que se obtiene con esfuerzo, pero esfuerzo dado con método constructivo. De ahí la obligación de su aprendizaje tanto para los filósofos como para los gobernantes. Y para estos últimos porque el método, al permitir la organización estructural de las proposiciones relativas a una cuestión, hace que se tenga una mayor capacidad de discernimiento, una mayor comprensión de la cuestión propuesta y, por consiguiente, conduce a la obtención de conclusiones y decisiones más acertadas; en otras palabras, la matemática como forma de aprendizaje de razonamientos. Pero ello implica, en cuanto a ejercicio, que el contenido no importa, sino el método en sí. La memoria como medio o instrumento de control individual y, a la vez, como ejercitación para lograr la identificación con el pasado, la reencarnación ...

De esta forma es el método el que permite organizar el saber a partir de los primeros principios en un orden que culminará en la descripción c mstructiva de los elementos constituyentes de la naturaleza, de los 'cuerpos platónicos' y que, por ello mismo, reafirma la exactitud de la calificación del neoplatónico Proclo respecto a Euclides como platónico en sus planes y organización y en la atribución que también hace a los *Elementos* de ser obra de ascesis y purificación.

2. Por lo ya dicho, es la organización metódica la que permite dar cuenta del enlace del saber matemático con el conocimiento de

la naturaleza. Si éste es conocimiento, entonces ha de ser del mismo tipo de conocimiento de lo verdadero, y de aquí que el universo, en su estructura, deba ser leído con el lenguaje propio de su auténtica naturaleza, la matemática, y según sus diversas manifestaciones complementarias y nunca independientes por la armonía que entre las mismas existe: aritmética, geometría, mecánica, óptica, astronomía ... Y el acuerdo naturaleza-matemática no es acuerdo accidental, sino esencial: el conocimiento de la naturaleza no va a sar más que reflejo del conocimiento matemático. Las formas puras son los arquetipos con los cuales el demiurgo ha constituido a la naturaleza o ésta en su propio desarrollo se ha dado tales arquetipos. De ahí que el número, la figura, el movimiento se enlacen en armonía completa y el conocimiento verdadero de la naturaleza, no de lo fenoménico, accidental o accesorio de la misma, sino de aquello que auténticamente la estructura, venga condicionado por tales elementos matemáticos. El demiurgo supremo matematiza...

Cuando algún fenómeno no se encuentre de acuerdo con unas teorías o proporciones matemáticas conocidas, deberán buscarse tales teorías o proporciones matemáticas, que existen aunque en el momento sean desconocidas, y que son las que establecen la razón del fenómeno -imagen mítica, motor del trabajo científico, lo cual se suele olvidar con frecuencia-. Y no ya como modelo para salvar las aparien ias sino como construcción teórica que dé cuenta de la auténtica forma, del saber real con verdad de los fenómenos considerados, que si son tales lo son precisamente por participar del modelo matemático correspondiente. Participación que no significa igualdad, identidad, y de ahí los errores y las pequeñas faltas de adecuación respecto al modelo matemático, porque debe c¡listinguirse entre lo racional y lo práctico ya que, como Newton precisará en *Principia mathematica*, << Puesto que, sin embargo, los artífices acostumbran obrar con poca precisión, la *mecánica* ha llegado así a distinguirse de la geometría, de tal manera que todo lo que sea preciso se clasifica como *geometría*. y todo lo que sea menos preciso, como *mecánica*. No obstante, los errores son de los artífices, no del arte». Y es la formulación del método científico que luego se plasmará como original de la llamada, mal llamada ciencia experimental, y que consiste en admitir que la observación y la experimentación se tengan que hacer bajo hipótesis previas de una ordenación matemática y, por ello, en ordenación deductiva; experimentación y observación dirigida para la captación de la armonía cósmica y eterna preexistente, presidida siempre por principios globales, generales, que logran su expresión más perfecta en la formulación estrictamente matemática. Lo cual no debe identificarse con la fórmula aislada, sino con las estructuras y la visión racionalizadora del universo como entidad unitaria en sí.

El ideal deductivo que el pitagorismo-platónico introdujo en el método, con su secuela de que si los fenómenos no se adaptaban a la teoría había que crear otra del mismo tipo para explicarlos —pero explicación sólo factible en el interior de la teoría y no explicación aislada que es lo propio de la técnica o mecánica en el decir newtoniano-, lo que se denominó erróneam nte desde un pretendido positivismo racionalista, construcción de modelos para salvar las apariencias, es el fondo mítico que se encuentra en la obra realizada por matemáticos como Euclides, Arquímedes, Ptolomeo, Copérnico, Kepler, Galileo, Newton... Fondo mítico que quiere ocultarse tras la faz de un pretendido objetivismo racionalista, ocultamiento que, en su pretensión, se manifiesta aún con mayor nitidez, porque lo que en ese objetivismo racionalista se obtiene es la imagen deformada del auténtico conocimiento de la naturaleza, camuflada para el lector no versado, con el rigor demostrativo de unas teorías aparentemente deductivas. Aparentemente, porque exigen tiempo y esfuerzo en su develamiento a pesar de que se encuentren dadas de antemano; aparentemente porq e en su manifestación faltarán postulados o axiomas, faltarán consecuencias, fallarán las demostraciones... Pero todo ello es secundario con respecto al plan esencial, al fin y objetivo que se persigue, y es la descripción identificadora, el develamiento de la verd...dera naturaleza y, en tal esfuerzo, lo poco logrado quedará logrado para siempre. Y estos fallos secundarios, al igual que lo que se deja escrito, constituyen una parte pequeña para estímulo de comprehensión y adivinación a los espíritus iniciados, y mero trabajo para el vulgo que no verá más que lo explicitado y no lo que de auténtico tendría que ver. Es Jo que el mismo Newton, modelo de racionalidad en las historias de la ciencia y el pensamiento al uso, modelo de rigor y autoridad científicas con el tan mal entendido enunciado *hipótesis non fingo*, dejará escrito: «Los filósofos prefirieron ocultar sus discursos místicos y presentar al vulgo objetos vulgares por temor al ridículo...»

Desde mi punto de vista, esta conceptuación del método axiomático no va a ser otra cosa que un intento de racionalización de la tendencia humana hacia el dominio de la naturaleza por medio de la magia. Racionalizada, pero sin poder dejar de traslucir el papel hermético del símbolo, representación de lo dominado en el sentido de que el demiurgo hace la naturaleza conforme al canon matemático, canon matemático que va a constituir el símbolo perfecto, trascendente al hombre, pero en cuyo conocimiento se iguala el hombre al demiurgo y, aún más, logra dominar, por el símbolo, el orden cósmico. De ahí la búsqueda de la proporción en el arte y su empleo, como manifestación, en el templo, que se convierte, a su vez, en panel y arca de mensajes cifrados para el iniciado. Proporción en búsqueda de que sea el hombre quien tienda hacia ella, porque la misma no se da en el individuo, en el caos de los fenómenos, pero que se impone como meta. De ahí la identificación de quien conoce el símbolo con el propio demiurgo creador o, si no hay demiurgo, con el espíritu de la naturaleza a la que domina dominando las fuerzas que la conforman. Y es el papel del conocimiento intensivo de Galileo, «en cuanto dicho término comporta intensivamente, es decir, perfectamente, alguna proposición, digo que el intelecto humano entiende algunas tan perfectamente, y tiene así de ellas absoluta certeza, tanto como pueda tener la misma naturaleza; tales son las ciencias matemáticas puras, o sea la geometría y la aritmética, de las cuales el intelecto humano conoce bien muchas otras infinitas proposiciones, porque las sabe todas, pero de las pocas comprendidas por el intelecto humano, creo que su conocimiento iguala al divino en la certeza objetiva». Y es el sensorio divino newtoniano, la iluminación divina cantoriana, el Dios no juega a los dados de Einstein... Y son los términos iniciáticos de Newton comparándose con el niño que juega en la playa «mientras se extiende frente a él el gran océano de la verdad» sin haber sido descubierto, en paralelo a los de Leibniz «estaba ya cansado de esas miserias cuando vi abrirse ante mí el océano», o de Cantor con su visión del paraíso divino de cardinales transfinitos... Términos que, en general, quedan ocultos en las cartas a los íntimos, en los manuscritos inéditos y casi nunca en lo que se publica para el vulgo, publicación que se quiere como la expresión suprema de una racionalidad objetiva, mera excrecencia mínima de lo que de más auténtico la posibilita.

2.2. *LO DESCUBIERTO*

1. La metodología pragmática o técnica, lo que queda en la evolución arqueológica, los restos, se mostraban apoyados, en la conceptuación pitagórico-platónica, en dos postulados centrales, que nada tienen que ver con el hacer al que condicionan: los de realismo y evidencia. La deducción, o componente demostrativa, es más bien una construcción apoyada en la figura, en el objeto concreto para, a partir de él, y mediante la maquinaria adecuada, alcanzar la idea de la cual participa. El origen del método se encuentra, por su lado, en la idea de impotencia que posee el hombre para alcanzar la visión directa del mundo eidético del cual forman parte las ideas matemáticas, impotencia del intelecto que le impide conocer, de solo un acto, todo lo que en él mismo se contiene. Y como objetivo del método hipotético-deductivo, por esos condicionantes, se colocan tanto la ejercitación y ascesis del individuo, como la preparación del gobernante; como la ordenación y sistematización en elementos del saber auténtico reconstruido, rememorado.

Si estas son algunas de las creencias pretendidamente racionalizadas que originan el método y lo condicionan en su estructuración y empleo, el mismo puede ser convertido en pura herramienta y, como tal, su uso puede quedar independizado de la ontología que le da nacimiento. Fundamentalmente porque, al partir de unos primeros principios de una sabiduría, de un contexto teórico determinado, el mismo método puede aplicarse con los primeros principios de otro saber diferente. El método, como ejercicio y reconstrucción de un saber, se independiza así de un saber concreto, aunque se aplique únicamente a la ciencia y no a la opinión.

Por otro lado, y esto es fundamental, el postulado de realidad puede ser discutido, cuestionado y, en lugar de admitir la existencia de los objetos matemáticos como objetos con una realidad eidética en sí, independientes al hombre que los rememora y reconstruye, condicionadora de la forma y proporciones de los objetos de la naturaleza que rodean a ese hombre, puede invertirse radicalmente la ontología de base y aceptar que tales objetos vienen condicionados precisamente por los objetos de la naturaleza, de la cual han de quedar desgajados por una labor de descubrimiento del hombre; es decir, que el objeto de la matemática, aunque verse acerca de formas en cuanto formas, es objeto incardinado en lo sensible y material y no independiente en mundo eidética alguno que conforme a lo material, sino que es éste quien conforma a dicho objeto, aunque para su captación debe hacerse uso tanto de la abstracción de ciertas propiedades particularizadoras como de la intuición racional.

Inversión de ontología que hace que se presente simultáneamente una dicotomía radical: frente a la intuición eidética que, por impotente, daba paso a la construcción racional, aparece una fase estrictamente justificacionista. La razón, de construcción conceptual, pasa a elaboración fundacional. En ambos casos, racionalidad como segunda fase de un objeto figura! previo, bien la forma eidética pura, bien la forma abstraída. Este segundo enfoque implica una desacralización de la burbuja conceptual más profunda aún que la manifestada en el pitagorismo-platónico. La memoria y, con ella, la ejercitación que condicionaban el método hipotético-deductivo, pierden su papel esencial, pierden su papel mítico de ser instrumentos para alcanzar el orden cósmico. Con metáfora de Proclo, el alma que ha bebido en el Ameles olvida todo lo referente a las vidas anteriores << porque transformada en enamorada del devenir cesa de recordar los principios im:nutables y los olvida>>. El alma, ahora, ha de abstraer y ver el objeto matemático y no sólo en cuanto objeto ideal sino que debe dar razón del porqué del mismo. No basta, de un fenómeno, de un objeto, decir que es y qué es para que pueda constituirse en saber necesario, un saber universal: es función de la ciencia no deductiva sino taxonómica, por decirlo así, decir que un fenómeno, que un objeto es así, pero es función de la ciencia decir por qué es lo que es. Y, para ello, la memoria no sirve al no pertenecer tal objeto a mundo eidética alguno, a orden cósmico inexistente que le daba el fundamento y respondía indirectamente a la pregunta por su ser. De aquí que la memoria quede como mero ejercicio técnico perdiendo el papel de imbricar a quien la ejerce en el orden pasado y, de aquí, la memoria quede marginada a la razón. Queda escindida a la facultad de razonar y, si pertenece a la misma, lo será por accidente.

Aristóteles remarcará el papel que ha de tener el razonamiento puro y la demostración. Al perder el postulado de realidad trascendente, que daba fundamento al objeto, éste tiene que ser explicado no en cuanto objeto, sino en cuanto a la causa, al por qué del mismo y, para lograr este objetivo, tiene que ser demostrado. Aristóteles, a los postulados de evidencia y realismo -que acepta, pero en cuanto existencia del objeto matemático como idea o forma, aunque incardinada en el objeto sensible- agregará un tercero, el de deducción para apoyar la metodología hipotético-deductiva. Deducción que, ahora, no va a consistir en una construcción rememorativa, sino que va a permitir avanzar desde el conocimiento de un hecho hasta la comprensión de por qué este hecho es como es. En otras palabras, la deducción no va a ser construcción, ni mera operación de obtener consecuencias de unos primeros principios -consecuencias que, por otro lado, no permiten obtener nuevos conocimientos en sí, pues de las premisas nada nuevo se obtiene en las conclusiones-. El método, por consiguiente, no es constructivo, sino explicativo.

La etapa deductiva se convierte en esencial para dar cuenta, para dar la comprensión del cómo es cada hecho, cada objeto o cada relación particular. De aquí que se deba insistir en que las premisas, los primeros supuestos, deban tener una generalidad mayor que la conclusión obtenida en la etapa deductiva. De lo contrario no se tendría, en tal etapa, la razón de ser del hecho particular. Es lo que se condensará en la manida y tópica frase, no hay ciencia sino de lo general.

Ahora bien, de supuestos falsos pueden realizarse etapas demostrativas válidas y obtener conclusiones verdaderas -manteniendo el criterio platónico de ser la proposición verdadera la que expresa la adecuación a la realidad del objeto, aunque con la diferencia de matiz de que ese objeto no es, ahora, una forma eidética-. De modo que la etapa deductiva, por sí sola, no cumpie el objetivo perseguido. Junto al haz de condiciones de matiz ontológico que la posibilitan, hay que imponer otro haz del mismo tipo. Por lo pronto, hay que admitir que los primeros principios deben ser verdaderos, adecuados a una realidad que constituye el objeto propio de la disciplina en cuestión. Y, en este punto, la matemática es tal que en sus primeros principios nada se toma de accidental sino que se toman definiciones esenciales, por lo que precisamente se diferencia de las discusiones dialécticas. De aquí que el objeto no pueda ser el triángulo que se traza en el arenaría, o el círculo que se traza y se borra, sino el objeto abstraído de los objetos sensibles, aunque incardinado en ellos, abstracción de los accidentes como el peso, color, tamaño..., con lo cual el objeto matemático es universal forma eidética y no el sustrato material sobre el cual parecería versar, por lo que por falta de observación concreta se ignoran incluso algunos de sus casos particulares. En segundo lugar, las premisas han de ser indemostrables porque de lo contrario se tendría un regreso al infinito y jamás podría darse cuenta del por qué de cada objeto; se acude, en socorro de esta tesis, a la intuición racional en el sentido de admitir que el hombre posee la facultad de percibir, de conocer intuitivamente los primeros principios a partir de los datos de la experiencia, de la percepción sensible. En tercer lugar, las premisas deben ser estimadas como la causa de la atribución realizada en la conclusión. En este tercer punto se centra un problema, el dar algún criterio, como en los dos casos anteriores, para distinguir cuándo una correlación es causal y en qué se diferencia de una correlación accidental, y el criterio consiste en identificar relación causal con atribución esencial de predicado a sujeto. Pero éste criterio queda sin especificar...

De esta forma, a partir de una inflexión en la ontología de base, se introduce la necesidad de la etapa deductiva en el método creado por los platónicos como etapa tan esencial como las anteriores. Para justificarla, se introducen una serie de elementos extraños al método en sí: evidencia y necesidad de los primeros principios, correlación causal de las premisas y la conclusión, existencia de procesos mentales como la intuición -que no debe confundirse con la eidética platónica, que por otro lado carecía de lugar, por impotente- y la abstracción -en la cual no se tienen en cuenta partes esenciales como la necesidad de un proceso idealizador, el hecho de que cada individuo no es tabla rasa respecto a las percepciones sino que fisiológicamente las estructura, elige y condiciona...-, que permiten obtener los primeros principios y el proceso razonador con el cual se logra obtener las consecuencias de ellos, indicando por qué las cosas son como son.

Elementos ajenos al proceso que terminan por identificar el hacer matemático con un hacer natural más a pesar de que, en un primer momento, se indique la diferencia respecto a haceres que pretenden, por modo exclusivo, decir qué es el objeto de su saber y que, por ello mismo, no tienen en su etapa demostrativa como modelo básico el silogismo de la primera figura, que es el central del hacer matemático, porque esa figura es la que hace de guía en las ciencias matemáticas, como la Aritmética, Geometría y Optica y, casi puede decirse lo mismo de todas las ciencias que se proponen considerar el por qué de las cosas y dar-el conocimiento de su esencia.

Convicción fundamental, la de que los primeros principios de cada ciencia son verdades necesarias y, por lo tanto, sus consecuencias también. Por la intuición se capta la verdad necesaria y, de aquí, que la ciencia se encuentre de acuerdo con la realidad en el sentido de que hay identidad entre el hecho de que un predicado se atribuya a un individuo –lo cual pertenece al plano del lenguaje– y que el individuo en cuestión posea la propiedad correspondiente. Hay que destacar que esta intuición y correspondiente adecuación es tal porque cada ciencia tiene su campo propio de actuación y, correspondientemente, de conocimiento; de esta forma se rompe, igualmente, con la convicción pitagórico-platónica de la unidad de todo el saber. Carece de sentido preguntar si Jos versos épicos son círculos y, consecuentemente, carece de sentido razonar de geometría con alguien que no esté versado en geometría o aplicar los elementos geométricos a otras ciencias, salvo cuando éstas estén condicionadas, subordinadas. Y esto último indica que puede hacerse un saber de óptica, por ejemplo, en el cual se indique que existe el arco iris y cómo es, y un saber de óptica 'geométrica' –o racional- en el cual lo que se hace es decir por qué el arco iris es como es. El primero es un saber de hechos, el segundo ya es geométrico, matemático; pero ambos pueden considerarse como ciencias diferentes, y el primero es realizado por el físico -entendido en su sentido originario- mientras que el segundo lo es por el óptico en cuanto óptico, es decir, en cuanto matemático. Las distintas disciplinas han de enfocarse, ahora, no en cuanto a su método, sino en cuanto a su contenido. Es éste quien determina el método.apropiado y no a la inversa como lo pretendía el enfoque constructivo pitagórico-platónico.

2. Consecuente paradoja, el método ha perdido, en la inversión ontológica, su esencia constructiva y se ha convertido en mero ordenamiento explicativo, en el cual, además, tampoco se tiene una clara conciencia de cuáles deben ser las reglas deductivas, ya que el silogismo de la primera figura, con sus premisas universales y afirmativas, no constituye ni da razón suficiente del papel constructivo que poseen las fases 'metamatemáticas' de particularización y generalización en cada proposición particular que debe demostrarse, por lo cual el mismo se queda en la superficie del enunciado de las proposiciones matemáticas enfocadas como mero encajamiento de clases.

El método, para ordenar lo ya logrado. De aquí que, además de detenerse en los tipos de figuras y sus posibles conversiones resulta que para el método se plantearán cuestiones como la independencia de los axiomas, la reducción en el número de los mismos, la interpretación posible de términos como ·axioma', 'postulado', ·noción común'..., admitiendo tácitamente que el ordenamiento es posible porque el saber ya está obtenido previamente. Y está adquirido porque es un saber que no es de hechos individuales, como la física, sino de formas que admiten la explicación de su causa formal. No se ve que son precisamente esos axiomas, nociones comunes y postulados los que caracterizan el espacio conceptual en el que se insertan las figuras y, consecuentemente, permiten desarrollar proposiciones acerca de las mismas, de sus propiedades, pero en el espacio marcado por dichas primeras proposiciones, que no responden a evidencia perceptiva alguna o a evidencia intuitiva racional, cuyo papel es el de delimitar el espacio, no ser causa de las propiedades que en el mismo puedan predicarse.

Desde un plano metodológico estos últimos factores van a hacer que el objetivo central del hacer matemático vaya a desvirtuarse de la pretensión de ordenamiento, de la pretensión de lograr encajar con una sistematización en la cual cada hecho obtenga su lugar causal adecuado. De ejercitación y ascesis, de reflejo de un conocimiento plenamente dado pero que hay que construir, el método hipotético-deductivo pasa a ser, por inflexión ordenadora, en todas las ocasiones, un estorbo para la obtención de un saber que. aunque contenido en la realidad, hay que abstraer de la misma. La ordenación, la etapa deductiva se convierte en una etapa posterior a la previa adquisición del conocimiento, adquisición por la cual se logra el qué es de la cosa, y, para ello, una etapa rigurosa deductiva no sería otra cosa que un entorpecimiento. El hacer matemático, aunque sea un hacer de formas puras y universales, se convierte en un hacer de hechos. Conocimiento, ordenación de conocimiento, dos etapas escindidas, ajenas entre sí.

Esta dicotomía, con la pérdida consiguiente en el crédito del método axiomático, con la pérdida de su uso, puede observarse en los matemáticos que llegan a sistematizar y exponer con nitidez total el pensamiento expuesto en este punto, y que parten de la suposición previa del objeto matemático como sustentado en los objetos sensibles, como dado aunque tenga que obtenerse de esos datos sensibles mediante las dos extrañas operaciones cognoscitivas de abstracción e intuición. Previa suposición de que la matemática, en el fondo, no es más que una ciencia de la naturaleza más, al mismo nivel que las ciencias que tratan del hecho, del fenómeno, aunque se pretenda en un nivel superior, en un nivel de universalidad. La dicotomía en el plano cognoscitivo -intuición, razón- como creencia previa que condicionará, incluso y una vez más, tanto el papel del método como las justificaciones del mismo.

Y será Pascal quien muestre esta dicotomía de manera explícita y radical. En primer lugar, exponiendo la metodología del saber matemático de modo claro y distinto. En segundo lugar, negando esta metodología para la creación y para todos aquellos saberes que se obtienen de la voluntad y no del entendimiento, las dos potencias del alma por las cuales recibe el hombre las opiniones.

Respecto al método -y sin entrar en la contraposición con Aristóteles, quien no dominaba la matemática, y sí Pascal, creador entre otras cuestiones matemáticas del método de inducción completa, considerado posteriormente como el método clave del hacer matemático, diferenciador incluso de este hacer respecto al de la lógica y, consecuentemente, origen como problema de la distinción de niveles lingüísticos- Pascal expone, en primer lugar, que las definiciones de la matemática, en todos los casos, son definiciones nominales., rechazando la concepción de que las mismas tengan que dar la esencia del objeto definido. La definición da nombre, convencional, a lo que todo el mundo conoce con claridad -en la matemática: número, espacio, movimiento-. Y es el postulado de evidencia: no hace falta dar la definición esencial de lo que, de suyo, es evidente. La definición, cuando se da, o bien oscurece lo que el conocimiento natural posee o bien no es una definición sino una auténtica proposición de la cual hay que hacer la demostración si es que la misma no es, también, evidente, en cuyo caso la demostración también sobra. El criterio formal de la definición nominal queda plasmado con nitidez por Pascal: sustituir la definición en el lugar de lo definido; y es criterio básico, porque al ser nominal la definición, el matemático goza de una libertad total al establecerla, pero es libertad condicionada a mantener, en las consecuencias, el mismo significado y, para ello, este criterio se muestra fundamental. Además, el matemático únicamente utiliza la definición como abreviatura, simplificadora en el desarrollo de su trabajo y es la segunda condición epistemológica: si es abreviatura, la definición no puede ser creadora de nuevos objetos. Son dos condiciones epistemológicas -eliminabilidad, no-creatividad- que han podido ser asimiladas por el método axiomático, pero ya como teoremas demostrables y demostrados en el interior de las teorías formales de primer orden, aunque sean criterios no válidos para el total del método, fundamentalmente en cuanto a la no-creatividad de la definición.

Junto a la extrema evidencia de las nociones primeras de la matemática -y que dan paso a las tres grandes ramas en que este saber se escinde: aritmética, geometría, mecánica- se encuentra igualmente el dato de las primeras proposiciones que han de ser, como las primeras nociones, evidentes. Condición de evidencia avalada también por el entendimiento en el sentido de que, si no fueran evidentes, tendrían que ser demostradas, para lo cual debería partirse de otras proposiciones previas, y ello supondría un regreso al infinito. En este punto Pascal debe reconocer que el orden matemático no es todo lo perfecto que debería exigírsele al orden total: demostrar todo. Pero, consuelo, es el orden más perfecto que existe y, dentro de lo que cabe, tampoco hay esa imperfección ya que, al tratar de cosas muy simples, las proposiciones que las enlazan son, igualmente, claras y evidentes para el común de las personas. De ahí que, dentro de su limitación de no poder demostrar todo, la matemática sea la más perfecta de todas las ciencias.

A partir de esta evidencia el matemático ya tiene que definir todas las demás nociones de las que tiene necesidad y tiene que demostrar todas las proposiciones que no son evidentes. Punto que establece el postulado de deducción, y que no encuentra una justificación convincente, apoyándose en la teoría de causas que ya he mencionado.

Además, la matemática es tal «que no supone más que cosas claras y constantes para la luz natural, y por ello es perfectamente verdadera, la naturaleza la sostiene a falta del discurso». Y es el postulado de realismo, apoyatura en la naturaleza, no alejada de la misma ni, por tanto, conformadora; pero a la vez, postulado de realismo que anula la propia importancia del discurso y, con él, del método hipotético-deductivo. Postulado en el que insiste y se hace más patente en las palabras «no define ninguna de estas cosas, espacio, tiempo, movimiento, número, igualdad, ni las parecidas que hay en gran número, porque estos términos ya designan naturalmente las cosas que significan...», y se corrobora con la llamada pascaliana a la fe, punto de enlace quizá, con el pitagorismo, pero que no es otro enlace que una inversión de tal postura, porque refiriéndose a las tres nociones primitivas, número, espacio, movimiento, «estas tres cosas, que comprenden todo el universo, según las palabras *Deus jecit omnia in pondere, in numero, et mensura* (Ap. XI, 21)...», y su «Conocimiento abre el espíritu a las más grandes maravillas de la naturaleza».

Si estas son las condiciones de la metodología matemática, modelo supremo para las restantes ciencias, que Pascal ha plasmado con nitidez en su opúsculo *De /'esprit géométrique,* resulta que el opúsculo comienza con unas precisiones que suelen olvidarse, incluso por aquellos que aceptan las condiciones de esta conceptuación del método axiomático, precisiones que son las que justifican la pérdida en el crédito de aquéllo que se pretende justificar. Cito textualmente:

«Se pueden tener tres objetivos principales en el estudio de la verdad: uno, descubrirla cuando se la busca; otro, demostrarla cuando se la posee; el último, discernida de lo falso cuando se la examina. *1* No hablo del primero: trato particularmente del segundo, que contiene al tercero...*1* Demostrar las verdades ya encontradas, y esclarecerlas de forma que la prueba sea invencible, es lo único que quiero dar; y no tengo para ello más que explicar el método que la matemática (Pascal escribe 'la geometría', pero en su sentido más amplio) realiza en este punto... Este arte consiste en dos cosas principales, una probar cada proposición en particular, otra disponer todas las proposiciones en el mejor orden...».

Y el opúsculo agrega, igualmente:

«Y no he elegido esta ciencia más que porque ella sola sabe las verdaderas reglas del razonamiento y, sin detenerme en las reglas de los silogismos que son tan naturales que no se las puede ignorar, se detiene y funda sobre el verdadero método de conducir el razonamiento en todas las cosas, que casi todo el mundo ignora...»

Frente al método postulacional, la matemática goza del arte de descubrir, pero en frente no ya metódico, ya en un plano que se denomina análisis. Y en el análisis no hay método sino descubrimiento apoyado incluso en el experimento mental, como el mismo Pascal, como antes Arquímedes, hace con la 'balanza'. Lo difícil es descubrir, que la reducción y exposición a un método concreto ya es un hecho secundario. Y, de aquí, la aparición de un nuevo estilo en el hacer matemático: lanzar problemas, lanzar enunciados sin demostración, reto a los demás matemáticos. Cierto que el método expositivo deductivo permitirá evitar cualquier duda, hacer ver la necesidad, el carácter verdadero de las proposiciones aisladas, de los logros descubiertos. Pero ello pertenece a un estilo geométrico o matemático, a un estilo antiguo que puede impedir, en algún momento, por deseo de precisión y organización, lo que va saliendo como puede, mediante la intuición y la abstracción a lo que es así.

3. Esta alternativa será el lema de Clairaut, cuando justifica a Euclides por demostrar lo que es evidente, ya que atribuye como objetivo del matemático heleno convencer a los sofistas obstinados que rechazaban las verdades evidentes; lo cual ya no ocurre porque «Todo razonamiento que incide sobre lo que el buen sentido decide de antemano, es hoy pura pérdida, y no es propio más que para oscurecer la verdad, y para fastidiar a los lectoreS>>. Será el lema de D'Aiembert cm su «Seguid, que la fe vendrá despuéS>>, de los ataques a Euclides que necesitará de vindicadores, de defensores al estilo no ya de Clairaut, sino de Saccheri. El método esteriliza y carece de sentido frente a la verdad de los hechos matemáticos, frente a la verdad de una ecuación diferencial que permite explicar y predecir un fenómeno de la naturaleza, aunque la misma no se sepa encuadrar en una teoría hipotético-deductiva.

Es la inflexión metódica protagonizada por Descartes en su ataque a los antiguos y al método de los mismos. Ataque cartesiano que, originado en su enfrentamiento con los míticos, no puede por menos que asumir aquello a lo que ataca. Los cabalistas pretendían crear un método 'inventivo' marginado, por supuesto, a los criterios de racionalidad conceptual propios de una creencia como la que subyace en lo que he calificado de Lo Descubierto, marginados a cualquier papel de fundamento deductivo. Y así se apoyaban en métodos como el Arte de la Memoria, representados en la línea de Lulio y Bruno. Y Descartes busca también un método, pero no fundacional, sino un <<ars inveniendi>>, una mathesis del mismo tipo de aquellos a los que, a pesar de su ataque, se le presentan como prácticamente coetáneos. Método de descubrimiento e invención y no sólo de prueba. Y será el procedimiento del análisis, del suponer resuelto el problema para analizarlo y llegar a su descubrimiento. Sólo posteriormente, mediante la síntesis, podrá alcanzarse lo bien fundado de dicho análisis, pero siempre síntesis en función de una intuición directa de sus etapas, y no de un proceso demostrativo clásico, meramente inferencia! y, por ello, fundacional; consecuentemente, estéril.

Hay que tener presente que la acusación de esterilidad no va dirigida, en el fondo, contra el método. A él recurre Pascal, a él recurren todos los matemáticos al mantener uno de los dos planos en que lo divide Pascal, el de probar cada proposición particular, aunque el segundo plano, disponer las proposiciones obtenidas en el mejor orden a partir de unos primeros principios, de unos axiomas evidentes, se relegue a sólo uno de los campos, el geométrico euclídeo y ello por mantener una tradición de carácter más bien escolar. El ataque se dirige, básicamente, aunque no se quiera o se perciba explícitamente, a que el método es globalizador, exige el total de la disciplina y el descubrimiento 'físico' requiere el análisis de un sistema separado del resto, particularizado. La longitud de una cicloide, el estudio de la braquistócrona, deben realizarse con independencia, rompiendo los marcos estáticos de una geometría 'cerrada'. Geometría incapaz, además, de dar cuenta de otro factor: el movimiento, salvo en conglomerado de circunferencias, con sus epiciclos y eferentes, excesivamente complicados para dar razón del movimiento instantáneo, con su velocidad y aceleración de los sistemas materiales. El ataque se dirige contra la concepció'l que este método conllevaba en el enfoque matemático expuesto en 2.1.: la idealidad de las primeras nociones y, con ella, la unidad de la matemática, la trascendencia y el alejamiento de la naturaleza. Quien utilice el método no va a reflejar los fenómenos reales que se producen en ésta, sino a mantenerse en un mundo eidética de verdades necesarias y atemporales, en un mundo alejado de los fenómenos, de la «realidad>> –y ello a pesar de Galileo, a pesar de Newton-. Y el hacer matemático se quiere ligado, incardinado a la naturaleza, y consiguientemente en el conocimiento de la misma, pero no por imposición teórica previa como hacía el pitagorismo platónico, sino por un proceso inverso, por abstracción de los fenómenos naturales. La matemática se pretendía un conocimiento de fenómenos, no de ideas puras, aunque se la dotara del carácter de necesidad y universalidad. Y el método postulacional parecía alejado, impotente para cumplir esta misión.

Insisto, no el método en sí, sino la ontología que lo posibilitaba, era lo que se estimaba, en última instancia, esterilizador. Y de ahí los ataques, por cambio de objetivo, al mismo. La propia geometría se había identificado, contra el sentir pitagórico-platónico, no con el estudio de las formas ideales, propias de la campana conceptual o del pensamiento puro, sino con la geometría física, con la campana perceptiva, que debería encontrarse subordinada precisamente a la geometría matemática en el planteamiento pitagórico-platónico. La disciplina se había convertido en la ciencia del espacio concreto, frente a la concepción de ser el estudio de Jo verdadero, conformador del mundo fenoménico pero por participador de éste en ese mundo eidético; al ser ciencia del espacio concreto, el papel demostrativo pierde cualquier función en una materia que se obtiene por observación y percepción.

Y es este mismo hecho el que se contiene, implícito, en los criterios de la definición pascaliana. La definición sobra porque, en el fondo, y referida a las primeras nociones, su carácter ha de ser meramente ostensivo, mostrador del objeto, mediante el nombre que se da a algo preexistente y que, por existente y visible, no requiere de explicaciones acerca de sus diferencias conceptuales respecto a otros objetos igualmente visibles y ostensibles. De ahí los ataques a las primeras nociones, postulados, axiomas y definiciones que utiliza Euclides, como impropios porque no son verdaderas definiciones sino proposiciones que habría que demostrar más que ver.

En contraposición, el ataque desde los metódicos a esta nueva forma de considerar al hacer matemático se haría en un frente inapropiado: la ausencia de rigor demostrativo que el nuevo enfoque suponía. Acusación de falta de rigor inadecuada, en primer lugar, porque el propio método postulacional no lo toma como criterio central y, por consiguiente, no lo posee –y hago rcrferencia a los últimos párrafos de 2.1.–. Y en segundo lugar, porque el rigor estaba plenamente logrado desde la convicción de que las proposiciones matemáticas reflejaban lo que ocurría en la naturaleza y, de aquí, la no necesidad de tener que dar cuenta demostrativa a partir de unos primeros principios más o menos evidentes -incluso algunos menos evidentes que las conclusiones que de los mismos se obtenían-; en el enfoque semántico no hay demostración, sino adecuación... Concepto de rigor absolutamente relativo y propio o interno a cada uno de los contextos ideológicos que condicionaban el hacer matemático y que, por ello mismo, impedían tomarlo como criterio absoluto para juzgar a uno u otro de los haceres. Desde uno, desde otro contexto, estos ataques se me muestran superficiales porque van al instrumento y no a los supuestos que condicionan, realmente, a dicho instrumento.

2.3.1. *LO CONSTRUIDO*

1. Constituyen creencias fundamentales en las dos concepciones antes descritas los postulados de Evidencia y Realismo respecto a los objetos matemáticos. Junto a ambos postulados se plasma el de Deducción para las proposiciones a realizar respecto a los objetJs matemáticos. En cualquier caso, la prioridad se concede a los dos primeros, por lo cual el papel demostrativo aparecerá, en cierta medida, como secundario, aunque posea un estatuto marcadamente constructivo en la conceptuación pitagórico-platónica — por lo que, con leve contradicción, el método se mostrará esencial pero en el aspecto pragmático-, organizativo y expositivo en la abstractiva, especialmente tras la inflexión mencionada en 2.2.2. Ambas conceptuaciones muestran otro postulado como creencia subyacente: el de que la matemática aparece ligada, de modo absoluto, a la naturaleza. Enlace Matemática-Naturaleza que muestra sus dos acepciones: en Lo Dado, la Naturaleza es una copia, mal hecha por otra parte, de la Matemática; en Lo Descubierto es la Matemática la que aparece como una copia, abstracta y caricaturesca, de la Naturaleza. En ambos casos, la Matemática aparece intrínsecamente unida al conocimiento de la 'realidad', entendida como realidad material. Bien mediante la armonía pitagórica que obliga a que el auténtico conocimiento de la naturaleza tenga que ser expresado mediante el lenguaje matemático porque el demiurgo hizo esta naturaleza según el canon matemático, bien porque mediante la abstracción de los fenómenos naturales se llega al lenguaje matemático y, por ello, las proposiciones matemáticas no hacen otra cosa que servir de instrumento para expresar las leyes universales de los fenómenos naturales, modelo general idealizado y siempre incorrecto, por tal idealización, de dichos fenómenos.

Conviene destacar, por otro lado, unos puntos respecto al papel que han tenido ambas conceptuaciones. En la inversión ontológíca que supone Lo Descubierto se crea, como nuevo problema, el justificacional. Es decir, es cuando surge, como problema, el de la fundamentación de la Matemática; no ya respecto al objeto, sino en cuanto a las proposiciones que se refieren a dicho objeto. En Lo Dado tal problema no existe porque se partía del hecho de la previa existencia del objeto matemático y de aquí que sólo se tuviera que tener en cuenta o bien su captación directa o bien mediante una construcción expresable, por supuesto, lingüísticamente. Desde el plano de la abstracción, por el contrario, hay que fundamentar tanto el objeto abstraído como las proposiciones acerca del mismo que han de establecer su causa, demostrativamente. Problema nuevo de fundamentación que, de la teoría acerca del objeto se traslada al origen u obtención de éste. Problema de fundamentación no claramente entrevisto es el que muestra la dicotomía anterior en la inflexión que he apuntado en 2.2.: se pasa de la teoría acerca del objeto y su justificación deductiva, a la búsqueda del papel inventivo respecto a dicho objeto. De esta forma se originan dos tendencias en los intentos de resolución de este nuevo problema:

a) Una empírica, cuyo máximo exponente es Mili y que, a pesar de las críticas de Frege, se mantiene en vigor en muy distintas posiciones actualmente, que van desde algunos materialistas hasta los que se autodenominan constructivistas y que apoyan el fundamento del hacer matemático en la acción con palitos o rayas; no hacen otra cosa que confundir los planos fundacional y genético en su versión psicológica.

b) Otra racional, que busca la fundamentación no sólo del objeto abstraído sino de las proposiciones acerca del mismo; fundamentación por causas como en el aristotelismo, por la deducción pura como en Frege, exigencia que obliga en este último caso, al matemático alemán, al establecimiento de las reglas de la Lógica que permitan dicha fundamentación en el ámbito del pensamiento puro, independientemente por supuesto del origen de los objetos de la Matemática y de las atribuciones a los mismos.

Ahora bien, el problema del fundamento o justificacional surge en la inversión frente a la conceptuación de Lo Dado (y ahora hago referencia, realmente, a un problema histórico, de génesis), pero tratando de permanecer, ya, en el mismo plano creado por éste, salvo en el empirismo. La importancia de la conceptuación platónica se centra en la creación, realmente, de la burbuja conceptual, aunque todavía esté matizada por el enlace con la Naturaleza, por un lado, con la Etica de salvación QOr otro. Creación de burbuja a partir de un espacio que ya no es el perceptivo, ni tampoco el icónico y que, por ello mismo, exige la creación simultánea de un método propio, que no va a ser otro que el axiomático para determinar el marco intrafigural y el deductivo-constructivo para cada una de las proposiciones que se refieren a los objetos de dicho espacio conceptual; y esta es una de las posibles explicaciones de que, si bien el método axiomático aparece como resultado de una impotencia de captación directa del objeto, por contraposición muestra su auténtica importancia en esta conceptuación, como medio o instrumento propio de la burbuja conceptual. Es lo que desde otros terrenos se ha calificado de creación de la racionalidad lógica, de la logicidad, incluso frente a la razón y racionalidad como argumentación moral. Y sólo desde la previa creación de esta burbuja conceptual tendrá sentido, aunque ya en inversión ontológica, la creación de un nuevo problema como lo es el de fundamentación, de justificación. Problema que afectará también a la conceptuación de Lo Dado, por rebote, en el sentido de que, posteriormente a su creación, y frente a los restantes justificacionismos, tendrá que justificarse, adoptándose como fundamento la admisión de un mundo eidética de formas puras, cuando tal admisión previa era, realmente, su punto de partida, la creencia básica que posibilitaba tanto su conceptuación como la metodología subordinada a la misma.

2. Junto a las posiciones que se mantienen en Lo Dado y en Lo Descubierto cabe una tercera postura, que entraña una nueva inversión respecto al estatuto ontológico del objeto matemático: admitir que el hacer matemático no tiene como objetivo primario una descripción de la naturaleza, ni sus objetos poseen una existencia independiente al hombre, sino que son productos conceptuales, conocimiento objetivo obtenido por un proceso propio, adecuado al plano conceptual en el que se sitúa. Que este producto se apoye, en última instancia, en unos condicionantes biológico-fisiológicos -como la repetición de los pasos al andar, los movimientos de agrupamiento en los primeros momentos del nacimiento ...–, que posea unos marcos delimitadores también biológico-fisiológicos -niveles de percepción acotados, estructura ventricular determinada ...– no es obstácclo sino condición para que el hombre, al fin y al cabo una parte de la naturaleza, haya creado una serie de superestructuras entre las cuales puede encontrarse la conceptual y, en ella, el conocimiento objetivo matemático -qui-

zá con más prectston, pero en problemática de tipo histórico de eludización, por ello imposible: la creación de ese conocimiento objetivo matemático obliga a la creación del espacio conceptual, ampliándose y no quedando identificado, ya, con dicho conocimiento-.

Prescindiendo del origen genético y psicológico o biológico de tales superestructuras resulta que, para su plenitud cognoscitiva, se muestra esencial el método propio de dicha estructura conceptual, porque aunque ningún instrumento sea absoluta, totalmente adecuado para el material con el que tiene que operar -por su imperfección intrínseca, siempre mejorable, y por la propia resistencia de aquello sobre lo cual se opera- debe existir cierta correlación entre instrumento y material. Es lo que la creación de la burbuja conceptual puso de relieve, su mérito absoluto. Y el método propio de la burbuja conceptual es, precisamente, el método axiomático. Es el que permite el propio autodesarrollo del conocimiento en su marco propio. Y ello porque el método axiomático lo que logra, básicamente, junto a la construcción conceptual del objeto, la delimitación, en dicha burbuja, del espacio conceptual que se maneje, y con tal delimitación, los problemas que en dicho espacio pueden plantearse y desarrollarse, así como aquellos que saltan de dicho marco.

Si bien es cierto que se actúa, en el nivel actual, sobre previos conocimientos, resulta que los mismos son tales porque, en el fondo, se han creado, respondiendo a un cuadro no siempre explicitado en un primer momento. Es lo que pondría de relieve Dedekind al estudiar la estructura de la Aritmética, de las proposiciones que versan acerca de los números naturales. Admite que tales proposiciones se muestran como ya dadas y por un trabajo previo de otros matemáticos. Sin embargo, las mismas no son proposiciones establecidas al azar o unidas por tan solo el contenido, el referirse a números, como se quería ingenuamente, sino que a Dedekind se le manifiestan como componiendo los elementos de una unidad teórica, porque todas hacen referencia a una estructura subyacente, una estructura algebraic;a y de orden muy claramente determinada. De aquí que tales proposiciones no sean otra cosa que la manifestación de una teoría que sólo puede venir caracterizada, globalmente, cuando de la misma se hace una descripción axiomática. Método propio de caracterización de esa unidad, el método axiomático permite definir lingüísticamente la estructura y, mediante su segunda fase, la demostrativa, logra enlazar las proposiciones en una teoría cerrada acerca de dicha estructura. Método axiomático que permitirá la afirmación de ser, la matemática, una creación libre, aunque no arbitraria, del hombre.

Delimitado el marco mediante el método axiomático resulta que, de modo automático, permite la aparición de un haz de problemas referidos al mismo. Y no sólo en cuanto sistema cerrado con los problemas de si posee únicamente un modelo o existen modelos no canónicos, como sistema formal, por seguir con la Aritmética. También, al desarrollarla, en su interior, se presentan, como realidad en sí, cuestiones como las congruencias, y ello le guste o no al matemático y lo sepa o no en un momento u otro; congruencias que, por supuesto, dan origen a multitud de problemas entre ellos los de aparición de nuevas estructuras. Surgen fórmulas como las de Bernoulli, conjeturadas en un primer momento mediante una labor de tanteo, de ensayo y error, para ser demostradas posteriormente; surgen conjeturas como las de Fermat, Golbach... y, en búsqueda de su demostración, como problema vivo en el marco aritmético, se van creando los números ideales de Kummer, los ideales de Dedekind, se percibe que tales construcciones lo son porque, a su vez, ocultan una estructuración interna que sobrepasa el marco propio de la Aritmética, y que es la que da paso al Algebra calificada de moderna... En cualquier caso, porque se está en un campo previamente delimitado, aunque tal delimitación no se conociera previamente y pareciera que provenía del contenido más que de la estructura interna que permite ser sobrepasada en cuanto es percibida.

Aquí se tiene un hecho propio de un plano genético e histórico: Darse cuenta, precisamente, de que lo que se está manejando es la teoría de una estructura supone un cambio, una ruptura epistemológica respecto al hacer interno anterior. Es un salto cualitativo que hace variar el objeto del hacer matemático y, por supuesto, el enfoque epistemológico del mismo. Cambio dialéctico de nivel o nueva etapa en la elaboración o construcción conceptual. Y es el paso del desconocer el marco y permanecer en el interior de una teoría que delimita ese marco a salir del mismo en cuanto se percibe y conseguir una visión del total, hasta del propio marco y, consecuentemente, de otras teorías y otras delimitaciones. Después el matemático podrá permanecer en el interior de una teoría determinada, pero sabiendo ya que la misma es un elemento parcial de la burbuja conceptual y que, por ello mismo, podrá enlazarla con otras o buscar analogías y diferencias. Habrá ampliado, aun permaneciendo en su interior, su propia visión de su hacer propio.

3. Insisto en el hecho de que esta posición supone un cambio respecto a Lo Dado y a Lo Descubierto. Y no sólo en cuanto al plano mencionado anteriormente, genético. En Lo Construido se realiza una inversión por la cual se llega a la afirmación de que es el hombre quien construye, en el interior de la burbuja conceptual, del pensamiento puro, el espacio correspondiente mediante el método axiomático. Y es la creación de ese espacio la creadora de las figuras, de los objetos propios de dicho espacio. Es éste quien conforma, ahora, el objeto, su figura propia. Para seguir con el ejemplo del triángulo dado en 2.1. resulta que dicho triángulo es un objeto que si tiene unas propiedades determinadas las tiene en función del espacio al cual pertenece y en el que está definido, y no en función absoluta suya. Según que ese triángulo pertenezca a un espacio plano euclídeo o semieuclídeo puede afirmarse que «el lado mayor de un triángulo es igual a la suma de los otros dos», o por dualidad, que «el ángulo mayor de un triángulo es igual a la suma de los otros dos»... Propiedades falsas, al igual que la dualidad ángulo-lado, si están referidas a un triángulo en un espacio plano euclídeo. Proposiciones que muestran, precisamente, las particularidades de la estructura que subtiende y posibilita tales espacios: la de espacio vectorial sobre un cuerpo. Y según qué particularidades, qué espacio métrico elegir -si es que se elige un espacio métrico, como antes, y no proyectivo afín o topológico- las propiedades que se prediquen de los objetos de dicho espacio -el triángulo, por ejemplo- serán unas u otras y se tendrá una u otra teoría, más particular, por supuesto, que la teoría de la que forma parte, la de espacio vectorial. Ahora bien, la caracterización de este espacio vectorial, de los espacios particulares que pueden irse obteniendo del mismo, sólo puede venir dada por su caracterización axiomática.

Naturalmente, el estatuto de cualquiera de tales teorías es el estrictamente conceptual, porque no hay posibilidad alguna de pasar del espacio perceptivo, directo, a cualquiera de estos espacios. Y de aquí que carezca de sentido hablar de que un espacio vectorial métrico sobre un cuerpo finito no sea imaginable perceptiva, sensorialmente -para mí, al menos, no lo es, carezco de cualquier tipo de representación icónica o meramente aproximativa de dicho espaci()- y, desde esta afirmación, llegar al rechazo de estas construcciones conceptuales. Sería una confusión lamentable, aunque existe, al no distinguir una serie de planos como el representativo, el psicológico o el genético con el conceptual. Igualmente, respecto al plano epistémico, que no se conozcan, de tacto, todas las proposiciones, o las figuras posibles, o sus predicados, no invalida el que la construcción realizada tanto de la estructura como de la teoría a ella asociada, se muevan en el plano conceptual, de conocimiento objetivo, en el que se sitúa el hacer matemático. De igual modo que debe rechazarse la afirmación de ser el factor deductivo el único criterio para tal plano conceptual, entre otras cosas porque la indecidibilidad impide sostener hoy día tal afirmación.

4. Cuando, en las creencias que condicionan Lo Descubierto, se produce la inflexión por la cual llega a identificarse el espacio euclídeo con el espacio de la naturaleza, se comete un nuevo fallo, de identificación del espacio conceptual o de conocimiento logicista con el sensorial y representacional, motivado quizá por la búsqueda de fundamentación de lo científico en lo empírico, sin ver que éste y su espacio representativo asociado son condiciones necesarias para el conceptual, son los que condicionan y posibilitan el conocimiento, pero sin pertenecer al mismo. El espacio euclídeo, único espacio conceptual conocido entonces es, precisamente, el espacio antirrepresentativo y antisensorial por excelencia. Lo que Euclides hace en sus postulados, axiomas y nociones comunes es, precisamente, caracterizar el marco, el espacio que hoy se califica con su nombre y que es contrapuesto al perceptivo; es homogéneo, isotropo, continuo, ilimitado..., notas radicalmente opuestas al sensorial, a lo obtenido por cualquier tipo de percepción sensible. Es el espacio platónico de formas puras, inalcanzable desde cualquier proceso más o menos oscuro calificado con el término de abstracción, aunque supone una actividad racional constructiva mental básica. Construcción conceptual en la cual se sitúan las figuras de las que predicar un haz de proposiciones cuya admisión debe realizarse, por modo único, gracias al criterio o postulado de deductividad.

El proceso constructivo euclídeo es un proceso que muestra un cierto paralelo en el Renacimiento cuando se pretende la búsqueda de un espacio más ligado al representacional y para el cual el euclídeo muestra su impotencia. Pretensión que cristaliza en la creación del Espacio estético, apoyado en la Perspectiva -en principio cónica, uniocular- y, con ella, en el damero que constituye el entramado en el que situar las figuras, la acción, el tema... Creación de un espacio figurativo que, sin embargo, tiene que admitir como datos, como condiciones necesarias para su elaboración no ya el tema condicionante, sino factores ónticas como la forma, el color, el tamaño, la posición, la textura... Factores que no constituyen, en sí, el espacio, pero que condicionan la elaboración del mismo. Y a pesar de constituir el Espacio estético un espacio opuesto al perceptivo, esta creación espacial podría recibir la crítica del platónico porque, por figurativo, engaña al espectador, haciéndole ver lo que no es más que apariencia. Si hubiera permanecido en el plano estrictamente conceptual, ayudado por la figura que se traza y se borra, pero como mera ayuda, hubiera permanecido en la burbuja conceptual, racional o lógica, pero al quedarse en lo visual, en lo figurativo, materializa una apariencia identificándola con lo real puro. Desde el enfoque de Lo Construido, el Espacio estético no es otra cosa que la manifestación de la potencia creadora del hombre, plasmada no sólo en la burbuja conceptual, sino también en la estética, manifestaciones ambas de la potencia imaginativa humana, que no tiene por qué limitarse a la racionalidad logicista o a la racionalidad moral, sino que también se plasma en otro tipo de racionalidades, tan dignas como la racional logicista propia de la burbuja conceptual.

Con ello quiero indicar la separación entre el espacio euclídeo -por mantener el caso anterior, porque lo que afirmo es válido para los restantes espacios conceptuales que el hombre construye en la burbuja conceptual, en el hacer matemático- no sólo del perceptivo y sensorial, sino de cualquier otro espacio construido también por el hombre, como el espacio estético, pero que se mantiene próximo al representacional. En este sentido, en el hacer matemático, lo construido es la estructura y con ella la teoría asociada, elementos ambos del pensamiento puro, uno de cuyos instrumentos, si no el esencial, lo constituye el método axiomático.

5. Si el objeto matemático pasa a ser, no ya un objeto individual, sino la estructura que incluso condiciona los espacios a los

cuales pertenece el objeto, y dicha estructura viene definida, construida, por el uso del método axiomático, cabe siempre una vaga sensación de arbitrariedad. El entendimiento humano no sólo crea monstruos, también personajes míticos, aunque sean una mera transposición de su propio entorno, una antropomorfización sublimada o proyección. En este punto, también debe hacerse una advertencia: no es deseable exagerar la potencia imaginativa humana, limitada por sus condicionantes propios biológico-fisiológicos y de tal manera que se mantiene en unas cotas relativas e incluso, en contraposición con otras zonas de la naturaleza, con su propio cuerpo y su organización, me atrevo a decir que esa potencia imaginativa es bastante pobre. Sin embargo, hay que insistir en que la objetividad de lo creado, la existencia de la estructura y su teoría proposicional correspondiente, no viene dada por la adecuación a estructura material alguna, a modelo material. Entre otras cuestiones porque los conjuntos base de las estructuras matemáticas son, en principio, infinitos. Infinitud que impide admitir que el concepto matemático sea abstracción de la naturaleza porque el infinito es imperceptible e inimaginable, inexistente en esa naturaleza material, oscura raíz de la que nada se puede predicar y de la que ni siquiera se puede esperar una manifestación simbólica. El modelo material de la estructura, por consiguiente, es inválido para asegurar la existencia del nuevo objeto matemático, de la construcción mental realizada por el matemático. La condición central, nuevo y auténtico problema para la conceptuación de Lo Construido, no de Lo Dado, ha de venir por ello en la consistencia del sistema de axiomas que caracterice a la estructura que se haya construido. He aquí uno de los problemas centrales que plantea una tercera posible conceptuación del objeto matemático. Problema con solución de consistencia relativa al que ya hice referencia en 1.3.1. Ligado con él, parece oportuno la búsqueda de sistemas suficientes de postulados o axiomas para cada una de las estructuras abstractas que ya se poseen, y otros distintos para la creación de otras nuevas.

Naturalmente, si ahora el objeto matemático no va a ser reflejo de un objeto material o el pálido reflejo de un objeto eidética trascendente, se requiere el manejo de unas marcas concretas para poder, sobre ellas, realizar la construcción mental adecuada. Marcas sin referencial, aunque posean un significado dado, precisamente, por el uso que de las mismas indican los axiomas. Formalismo inscripcionista pero como mera ayuda, no como fundamento en sí de la conceptuación indicada; mera ayuda porque el individuo, para pensar. requiere del lenguaje aunque sea en el silencio de su trabajo individual, o de la imagen simbólica, pero siempre de la palabra bien en su calidad sonora bien en su calidad gráfica, porque el mundo ha sido hecho no con manos, sino con palabra. Por supuesto que es sobre estos símbolos materiales. tomados como clases, sobre los que se razona, pero trascendiéndolos, buscando el objeto construido, como concepto abstracto. Quedarse en el mero formalismo inscripcionista, como Thomae, como Hankel, como el primer Hilbert, como los miembros de la escuela de Erlangen, es inconsecuente empirismo. Pero, a la vez, si no hay sustentáculo referencial, el entendimiento debe especifü.dr con nitidez las reglas de derivación. Que ahora, de ser ejercitación y ascesis o de ser ordenación, se convierten en las cláusulas de cierre que determinarán la teoría deductiva. Cabe ir repitiendo muchas de las expresiones utilizadas en la descripción del método axiomático que he utilizado en 1.2.

Sin embargo, creo que debo señalar dos puntos. En primer lugar, precisamente el surgido al mencionar el término infinito. Por manejar conjuntos con infinitos elementos, muchos matemáticos han tendido al platonismo en esta versión constructiva –y he mencionado Gódel, y podría agregar Frege en cierta medida y en cuanto al plano fundacional, no en cuanto al aspecto constructivo del método axiomático-. Más que construcción, piensan, se hace una descripción, variando únicamente el objeto que, de ser el número, la figura, el movimiento, ha pasado ahora a ser la estructura formal. Basta tener en cuenta que no hay abstracción de entidad material alguna, abstracción que pase de objeto a concepto. En éste último caso no habría otra opción que o negar el infinito –y es la tendencia constructivista de los primeros momentos- o aceptar una forma más o menos mitigada de existencia de dicho objeto infinito en un mundo eidética que no se muestra enteramente comprensible –y es la posición de Cantor-. Infinito actual que, como he sostenido en otro lugar, es perfectamente compatible con la teoría platónica y que se muestra por ejemplo en las clasificaciones, ya dadas en acto, de los números irracionales en *Teeteto,* entre otros lugares. Ahora bien, la admisión del infinito no tiene por qué conducir a su identificación como objeto individual, material, o como forma pura individual, eidética. No tiene por qué realizarse reificación alguna sustancial, reificación individualiÚldora a la que tan dado es el individuo al tener frente a sí un sustantivo. No es esencial el platonismo en la conceptuación constructiva del objeto.

El segundo punto se encuentra en que si ahora el objeto matemático se muestra como una construcción libre del espíritu humano -con todas las limitaciones apuntadas-, esta construcción no tiene por qué detenerse en una lógica bivalente, en sistemas formales sobre dichas lógicas o incluso sobre lógicas polivalentes. Ni tiene por qué aceptar como ley suprema un principio como el de contradicción en todas las zonas del pensamiento. Pueden crearse sistemas formales no canónicos, lógicas temporales, lógicas minimales. Admitir en principio la ley de no contradicción como básica, pero también el hecho de que si de una teoría dada no puede demostrarse tal consistencia, tampoco se la tiene que rechazar enteramente. Manejarla en aquella zona en la cual la contradicción no ha aparecido y, si termina apareciendo, crear los medios para remediarla. Y es objetivo fundamental, en un momento determinado, para el matemático, que una contradicción pueda surgir, no por la contradicción en sí, sino por el hecho de constituir un reto, un problema al que hacer frente y superar, creando si es preciso otro sistema formal, otro hacer matemático. De hecho es lo que el matemático ha venido haciendo y hace en todo su trabajo. Manejar lógicas minimales que se adaptan en cada trabajo que hace. Y en este punto incide la gran creación de Tarski de la adecuación de los sistemas formales, de su consistencia relativa, mediante la noción de satisfacción no ya de una estructura respecto a un mundo eidética o respecto a la naturaleza, sino respecto a otra estructura, a un modelo que también es creación conceptual del entendimiento humano. La definición de 'verdad' como adecuación, de origen platónico, lo era respecto al objeto trascendente, dado. La verdad como adecuación tarskiana lo es como adecuación a otra estructura abstracta creada por el hombre.

Igualmente incide en este segundo punto el llamado 'convencionalismo' al estilo de Poincaré, en el sentido de que al ser la estructura una pura creación del entendimiento, la elección de una u otra para la descripción de algún fenómeno es enteramente convencional, pero bien entendido que una vez elegida una estructura, lo que se obtenga de ella, de los axiomas que se establecen, deja de ser convencional porque ha de atenerse a las reglas demostrativas elegidas. Reglas que son, también, y en cierta medida, convencionales haciendo variar su elección el sistema teórico o deductivo construido.

6. Por supuesto que el problema que se plantea desde esta perspectiva -uno más- es el posible enlace del hacer matemático con el hacer cognoscitivo que pueda obtenerse de la naturaleza. En Lo Construido, se tiene un conocimiento conceptual que puede, o no, ser adaptable a la Naturaleza. Bien entendido que, en este punto, tal adaptación no lo es respecto a dicha naturaleza de modo directo, inmediato, sino a través de los restantes conocimientos o disciplinas conceptuales. Aquí sostengo que ningún conocimiento es inmediato en cuanto sea conocimiento inferencia!, aunque exija el previo conocimiento mediato perceptivo de algunos objetos, así como el dato de la actividad motora y sensorial. Desde este enfoque, el enlace del hacer matemático conceptual con la naturaleza lo es a través de otros haceres también conceptuales, pero siempre que éstos alcancen la categoría de conocimiento. No hay isomorfismo entre objeto natural y objeto conceptual, porque éste es una construcción mental, condicionada ciertamente por la burbuja perceptiva, pero condicionamiento que no conduce a que sea un mero mapa pictórico de tales objetos naturales. Es problema de enlace que puede ser resuelto desde la perspectiva de Lo Construido agregando a las componentes del método axiomático descritas en I. una componente más, la del dato de los referenciales semánticos a las variables que intervienen en el conjunto base de la estructura que se esté manejando. Problema en el que ya indiqué que no deseo tratar aquí extensamente, reservándolo para otro trabajo. A pesar de lo cual, y de modo muy informal, indico que es problema que puede mostrar un intento de solución si se acepta que ese conocimiento de la naturaleza, cuando se organiza en sistema conceptual, adopta la misma forma que el conocimiento matemático teórico objetivo y, de ahí, la petición de que se organice deductivamente, al convertir también su objeto en estructuras abstractas. El método axiomático se adoptaría, de esta forma, como el mejor instrumento para las distintas disciplinas, en el sentido no de que éstas se establecieran mediante los procesos demostrativos en sí -lo que tampoco hace en el interior de la matemática, según he venido insistiendo-, sino mediante la estructuración de su propio objeto en cada campo de trabajo.

Aquí la matemática podría enfocarse, en algunos casos, como herramienta lingüística, pero teniendo presente, siempre, que ya no se haría matemática, sino la disciplina que se maneje. Separación de teorías por su objeto, aunque no por su método y estructuración.

Supone, una solución de este tipo, la aceptación de una condición previa: la acotación de aquello que se trabaja y estudia; acotación y delimitación que, a su vez, provocan una simplificación y consiguiente deformación. Un mismo objeto, un mismo fenómeno pu eden estudiarse desde muy diferentes puntos de vista y cada punto de vista, que entraña una especialización, elimina, desenfoca los restantes. El objeto, el fenómeno, deja de ser tal para convertirse en una parte del mismo. Sólo la unificación imposible y no la especialización acentuada darían cuenta del total, del fenómeno en sí. Pero un punto sostengo: la aplicación del método para cada enfoque, salvo para la matemática, no debe hacerla el matemático, sino quien auténticamente domina su campo de trabajo, su materia propia. Y es en este punto donde cada científico teórico — desde el físico hasta el economista pasando por el lingüista, por ejemplo- tiene su trabajo: analizar conceptual, críticamente, los que puede estimar elementos primeros de su disciplina, porque sólo una crítica conceptual profunda puede conducirle a una poste- rior formalización que, d otra manera, quedaría en el vacío, en el mero artificio, remotamente aproximado en el mejor de los casos

-aunque después de la crítica y de la sistematización, la aproximación al fenómeno en sí sea púra creencia, sostenedora de las ideas de aproximaciones sucesivas como función de las distintas teorías que se pueda ir fabricando-. Que pueda intervenir el matemático en este trabajo, de acuerdo, pero ya no en cuanto matemático sino en cuanto geómetra al viejo estilo, universalizador. Géometra como lo fué Arquímedes, o Newton, o Poincaré para cada una de las ciencias de su época. No como mero recetador de fórmulas o constructor de teorías formales sin un sustento previo adecuado. Y uno de los problemas actuales se centra en que se pretende sustituir el 'espíritu universal' por el coloquio pluridisciplinario, en un remedo falso de la profunda unidad conceptual que se exige. Remedo que conduce, por ejemplo, al lanzamiento de hipótesis 'matematizadoras' -la tan manida y falta de sentido 'roatematización de la realidad'- que la propia realidad se encarga de no verificar en observación experimental alguna -y pienso, por ejemplo, en el tan manido modelo neurofisiológico de McCullogh y Pitts, aunque los modelos podrían ampliarse en número...–.

Una solución de t;ste tipo conduce a cierto convencionalismo respecto a las construcciones teóricas, como ya he indicado. Desde un enfoque matemático, de cualquier teoría o estructura que se construya no puede atribuirse que sea más verdadera o falsa; ello carece de sentido. Extrapolando esta convicción cabe aceptar el hecho de que pueden construirse muy distintas disciplinas sobre un mismo objeto y cada una de ellas escindirse igualmente en otra multiplicidad, produciendo cada una de ellas un cierto conocimiento de la naturaleza, propio, igual en cuanto a conocimiento, pero diferenciado por el enfoque de cada una, y no siendo ninguna de ellas más verdadera o real que las restantes, cuestión carente de sentido también aquí. La elección de una u otra materia es asunto de convención –y de hecho el triunfo de unas ideas o de otras depende, en la mayoría de las ocasiones, de que esté sancionado por un conjunto de miembros de determinadas sociedades 'científicas'-, pero bien entendido que, una vez elegida una disciplina y una visión de ella, la misma ha de mantenerse coherentemente. Es lo realizado con cada una de las estructuras matemáticas o con cada una de las geometrías construidas, con los distintos sistemas lógicos –si bivalentes, si modales...–, con su coherencia propia, independiente a cualquier tipo de aplicación pragmática posterior, que no necesita. En otro aspecto, en aquellas teorías que parecen requerir esa falsabilidad pragmática posterior, se tiene que para dar cuenta de unos mismos fenómenos cabe aceptar, pongo por caso simplificadoramente, una teoría como la heliocéntrica o la geométrica. Ambas salvan las apariencias en el terreno conceptual y en el predictivo, ya que las dos teorías, en su formulación matemática, sólo se diferencian en una transformación de coordenadas, por lo que ambas son totalmente equivalentes desde el punto de vista físico, aunque las imágenes sean diferentes y las reacciones emocionales que han podido provocar también. La única diferencia se centraría en la mayor simplicidad para la descripción de los movimientos planetarios, pero la simplicidad de cálculo se muestra como un criterio también relativo y de matiz estético en el nivel que aquí puede situarse -aunque en otros fenómenos pueda llegar a establecerse un criterio más objetivo, apoyado, por ejemplo, en la duración y tiempo de empleo de una calculadora durante la realización de los cálculos-. Matemáticamente éste sería un factor secundario aunque técnicamente alcanzara cierto nivel de problema.

Una cuestión, a no discutir aquí. se centraría en la comparación de teorías mediante la búsqueda, en primer lugar, de qué llamar comparación de teorías no formales; y, en segundo lugar, de unos criterios objetivos e independientes de las teorías a considerar –si es que fueran factibles los *experimenta crucis,* lo que ya he indicado que es imposible- para establecer dicha comparación. Problema en el que subyacen diferentes creencias de si la construcción científica de leyes constituye una imagen adecuada de la realidad o de si la construcción teorética racional –no la técnica- sólo tiene como objetivo salvar las apariencias quedando fuera de sus límites los hechos individuales, irrepetibles, aunque posean la misma realidad que las estructuras cognoscitivas racionales.

2.3.2. *SUS CREENCIAS*

I. Una de las claves para la verdadera comprensión de lo que supone la conceptuación de Lo Construido –así como de algunas afirmaciones realizadas a lo largo de 2.3.1.– está en la previa y nítida distinción de la existencia de varios planos en el oficio del saber. Existencia y distinción que no siempre se realizan y que, por ello, entrañan la posibilidad de todo un cúmulo de críticas y malentendidos respecto al método axiomático, respecto a todo el campo del conocimiento objetivo. Aunque no corresponda a este lugar una labor de exposición y crítica de tales planos debo al menos reunirlos, aunque de ellos he ido haciendo referencia en párrafos anteriores. Agrupados para que el lector los tenga presentes y, con ello, pueda criticar los malentendidos que surgen a lo largo de toda exposición más o menos crítica.

Por un lado se tiene el plano que da origen a la problemática *ontológica*, respecto a la naturaleza de los objetos del hacer matemático, de cualquier otro tipo de hacer. En este sentido, he indicado que, desde el enfoque de Lo Construido se constituye como objeto del hacer matemático la estructura y la teoría con ella asociada. Junto al plano ontológico, e inseparable de él desde el enfoque de Lo Construido, se encuentra el instrumento para tratar de dicho concepto: y es el plano *metodológico*. E indico que desde

Lo Construido el método es inherente al ontológico porque es dicho método el que provoca, precisamente, la génesis de dicho objeto_. Es posición opuesta, claramente, a los enfoques de Lo Dado y Lo Descubierto, que separan nítidamente dichos planos al aceptar la existencia previa de dicho objeto, bien como forma pura, bien como abstraída de lo material, y dejar que el plano metodológico incida, por modo exclusivo, no sobre el objeto, sino sobre las proposiciones que puedan predicarse del mismo, en el sentido de o bien preguntar por su adecuación, o bien preguntar por su causa, o bien por obtener más proposiciones acerca de dicho objeto. En Lo Construido ambos planos, ontológico y metodológico van unidos, por la génesis metódica sobre el objeto, ahora la estructura caracterizada por modo exclusivo por el método que es quien la construye y quien permite, a la vez, la respuesta a las preguntas que se plantean en las otras dos conceptuaciones.

Junto a los dos planos anteriores se encuentra el *epistémico.* cuyo núcleo básico se centra tanto en la captación de la estructura como en la obtención, en el conocimiento de las proposiciones acerca de dicha estructura; es decir, en el conocimiento y su obtención de la teoría de la estructura que se esté manejando. Y este plano epistémico puede escindirse en enfoques diferentes; *Genéticv-Históricu, Psiculógicu-Didácticu, Fundacional.* El genético-histórico es el plano desde el cual cabe preguntar por el origen no sólo de la estructura sino de la teoría acerca de la misma. Origen enlazado a una historia que carece, en general, de respuesta definitiva, porque siempre se busca en la historia lo que se desea encontrar, como he indicado en otros lugares. En el plano genético puede incluirse, igualmente, no sólo el proceso histórico, sino el individual, pero ello enlaza con mayor propiedad tanto con la epistemología genética como con la psicología.

En el plano psicológico incide en el cómo aprehender tanto la estructura como su teoría, al igual que sobre la forma en que el matemático ante su pizarra o su papel o lápiz, crea las proposiciones correspondientes, así como el papel que pueden tener en esa creación, en esa aprehensión, factores como la imaginación, elementos icónicos o representacionales... Y es al plano psicológico al que ligo el Didáctico, no porque sean idénticos, pero sí por la subordinación de éste al psicológico. Plano Didáctico que consiste en la búsqueda de unas técnicas de engaño por las cuales pueda llevarse al individuo hasta la adquisición del conocimiento de la teoría y de la estructura de la cual es teoría; técnicas de engaño por las cuales pueda alcanzarse, en algún momento de la evolución biológico-psíquica del individuo, el plano conceptual y llegue a distinguirlo de los restantes. Es, casualmente, uno de los puntos más debatidos respecto al hacer matemático últimamente y donde se ataca más duramente al método axiomático como enemigo de la razón, de la invención, del individuo, de su adaptabilidad al medio...

Finalmente se encuentra el plano *fundacional,* surgido como problema, según he indicado, tras la inversión que Lo Descubierto supone frente a Lo Dado. Plano fundacional que suele confundirse con el genético, al apuntarse que el fundamento del hacer matemático, por ejemplo, se encuentra en la representación sensorial. Desde el plano fundacional, la clave se ha querido en el papel deductivo, por el cual cada proposición se liga a las restantes y se asegura su verdad bien porque no es más que la consecuencia de unas primeras proposiciones que son verdaderas -no se sabe bien al respecto a qué criterios porque siempre acaba recorriéndose a la intuición en la verdad de dichas primeras proposiciones-, bien por la fecundidad de sus consecuencias que son verificadas por algún otro procedimiento que no sea el deductivo -y la ausencia de criterio de racionalidad intrínseca quedaría patente si tal verificación lo fuese respecto no a algún elemento de su burbuja conceptual propia, sino respecto a la naturaleza—. Sin embargo, el mero plano deductivo pierde su sentido al saber que cualquier teoría, por levemente potente que sea, es incompleta, por lo cual existen proposiciones 'verdaderas' que son indemostrables en la teoría; así como al saber que el proceso demostrativo es indecidible. Problema de fundamentos que se ha vuelto hacia la génesis de tipo psicológico o histórico, ante estas dificultades, mostrando con ello nueva confusión entre los planos epistémico y genético, además de confundir la burbuja perceptiva con la conceptual. Y debo señalar que todos estos planos, que pueden ser válidos para otras burbujas lo son, en especial, para la conceptual y, en ella, para el hacer matemático y su conocimiento objetivo.

2. Y es atendiendo a estos distintos planos como pueden esbozarse las creencias que condicionan Lo Construido. Creencias que esbozo en los tres apartados siguientes y, en los cuales, no hago otra cosa, realmente, que insistir en lo dicho a lo largo de páginas anteriores.

a) *Heurística.* El método axiomático es el instrumento de carácter operativo y no sólo sistematizador y delimitador de la estructura. Ya la propia sistematización teórica implicaría un ordenamiento con su carga·orientadora respecto a las cuestiones ya resueltas y a las todavía abiertas y, más aún, respecto a los métodos y enfoques por los cuales se ha resuelto o con los cuales no se han podido resolver tales problemas; orientación en temas, en métodos. Pero su carácter operativo creador viene aumentado porque permite: l. Establecer las definiciones tanto de las estructuras formales como de los distintos conceptos que se manejan en el hacer matemático. 2. La creación de nuevas estructuras. 3. La comparación, relación y composición de las mismas.

Limitándome a la fase constructiva axiomática, debo reiterar que es gracias al método axiomático formalizador como se han logrado demostrar todo un haz de limitaciones presentidas o intuidas por algunos matemáticos, pero sólo demostradas en el interior de la axiomática constructiva, entre las que menciono, nuevamente, y como fundamental para el método en sí, el que pueden existir teorías no axiomatizables: Basta considerar lenguajes no recursivamente numerables, teorías construidas sobre lenguajes de orden superior al primero. Igualmente, el hecho de que teorías construidas sobre lenguajes de orden superior al primero no sean completas muestra con claridad que la demostración no pu de identificarse con el conocimiento total que pueda obtenerse de una teoría. De aquí la importancia creadora, heurística, pero a la vez, la servidumbre, del método axiomático.

Y en el propio enfoque postulacional, más aún, intuitivo en el que se sitúan algunos contradictores del método axiomático, resulta que éste posibilita una vuelta a las intuiciones geométricas, en las que se quiere ver o buscar nuevas savias para la matemática futura. Por ejemplo, en el Análisis, durante el siglo x1x sp pretendió aritmetizar las calificadas como confusas nociones de infinitésimos, de cantidades evanescentes que siendo no eran. lnfinitésimos en los que Cavalieri, Pascal, Leibniz, Newton... se habían apoyado para hablar de distancias muy pequeñas, de aproximación de un valor de una función en un punto y, con ellas, para calcular áreas, volúmenes, longitudes... Reemplazadas las nociones intuitivas, geométricas, por el estilo de los e, se llega a la creación, prétendidamente rigurosa, de Jos números reales por los procedimientos de sucesiones de Weiertrass, de Cantor, de cortaduras de

Dedekind. Pretendidamente, porque tales construcciones 'racionales' se muestran contradictorias, por impredicativas. El continuo no puede construirse a partir del número natural, de lo discreto; no puede aritmetizarse. Sin embargo, y a pesar de la impredicatividad, los matemáticos educados en ella la consideran 'intuitiva' y, además, construcción rigurosa. Y lo menos que puede decirse de estas construcciones es que son mostruos de la razón, autocontradictorios, antiintuitivos... Y es el método axiomático el que permite dar una construcción 'racional' del cuerpo ordenado de los números reales y, todavía más, la construcción de un modelo de cuerpo ordenado no arquimedianamente que contiene a R y en el cual puede establecerse todo el análisis clásico mediante el empleo de infinitésimos, como primacía de la intuición geométrica. Un análisis no canónico, pero de acuerdo con todo el hacer e los creadores del mismo. Vuelta a la intuición, pero ahora fundamentada, reglada para evitar los peligros de dicha intuición cuando no controlada, los peligros de su uso alegre e indiscriminado. Finalmente, insisto en que por encima de todo el método axiomático permite la creación del marco adecuado en el que se pueden plantear problemas acerca de lo delimitado por el marco. Y cabría reiterar mucho de lo expuesto tanto en el apartado anterior como en toda la primera parte.

b) *Ideológica.* El empleo del método axiomático exige que, como visión de la disciplina a construir, se la tenga como un todo, como un organismo en unidad. No de proposiciones sueltas, aisladas, sino interrelacionadas en una teoría unitaria. Incluso componentes del método como la definicional, o atribuciones extrínsecas como la 'verdad' o no de las proposiciones que constituyen cada teoría matemática particular, se muestran relativos bien al interior del sistema formal a considerar, bien al modelo especial sobre el cual se haga la valoración veritativa. Y si ya he mencionado, brevemente, el caso de la definición, ejemplifico el segundo miembro de la disjunción indicando que una proposición como <<ningún triángulo rectángulo puede ser equilátero>> no es verdadera en sí, sino en el interior de una determinada geometría, falsa en otras geometrías, carente de sentido en contextos diferentes.

La unidad, el cierre de la estructura no significa, por otro lado, que la misma esté dada ya, de modo explicito en el conocimiento de todas y cada una de las proposiciones que la componen, ni que la misma no pueda ser transformada para dar paso a otra estructura distinta. Pero esa unidad posibilita el empleo del método axiomático, a la vez que obliga a que, por dicho empleo, se refuerce la visión de la unidad; empleo común a todas las disciplinas en las cuales el trabajo matemático puede escindirse. Unidad bien por «elementos» al estilo pitagórico-platónico en el enfoque postulacional 'clásico', bien de estructuras madre al estilo bourbakista en la visión actual.

e) *Ontológica.* El objeto matemático es la estructura formal, abstracta -o la distinta combinación de estructuras-. Esta es una construcción cognoscitiva humana objetiva realizada por el matemático; no todo está dado en la naturaleza de modo inmediato. El hombre, como agente de la misma, la transforma y se autotransforma consecuentemente, obteniendo una superestructura cognoscitiva.

Esta creencia incide en el plano fundacional en el aspecto de afirmar que carecen de sentido las discusiones en torno a la naturaleza aislada de las proposiciones matemáticas como proposiciones analíticas, sintéticas o sintéticas a priori. Carecen de sentido porque de ellas, aisladas, nada puede predicarse en cuanto a su analiticidad o no, predicación dependiente de la proposición en su contexto, en el interior de la teoría en la cual posea significado -y el ejemplo anterior del triángulo rectángulo equilátero puede reiterarse-. Y esta teoría se mantiene en burbuja conceptual, independiente a una posible génesis, por un lado, y a una posible adaptación a otras ramas del conocimiento, por otro. Desde este plano, obliga a que todas las proposiciones derivadas demostrativamente de los axiomas que construyen la estructura sean analíticas -entendiendo, entonces, por analítica aquella proposición que se obtiene de las anteriores por las reglas de derivación- pero a la vez dan conocimiento de esa estructura como objeto conceptual -y son, por tanto, sintéticas, al originarse de un previo contenido de conocimiento-.

Y es en este contexto, creado por el método axiomático, en el que la estructura más o menos formalizada en el terreno lingüístico, pero en unidad, la que se muestra como un objeto conceptual construido por el entendimiento humano y que, una vez construido, presenta una entidad real objetiva más fuerte incluso que los objetos que nos rodean, porque en ella nada puede cambiarse caprichosamente o a voluntad de quien quiera, individualmente. La estructura de grupo, guste a quien guste, es una estructura plenamente realizada e inamovible; podrán darse unos u otros axiomas, pero todos ellos serán equivalentes entre sí; podrán obtenerse nuevas proposiciones, nuevos enlaces, nuevas aplicaciones, pero nada ni nadie podrá variar tal estructura, una vez que la misma ha sido, ya, construida conceptualmente. Podrá, eso sí, quedar abandonada en un futuro en beneficio de otros objetos creados en otros haceres matemáticos, calificados en su momento como 'modernos'; podrá integrarse plenamente, o sólo algo de su contenido, en tales nuevos haceres...

3. Estas tres categorías de créencias, y que por creencias entrañan la operatividad y aplicabilidad del método axiomático incluso fuera de su campo de acción propio, no deben identificarse con las que sostienen que el método axiomático es único en el trabajo matemático. Más modestamente, y participando en ese trabajo, cabe estimarlo como una herramienta más. Considerar que es único, es un exceso que implicaría, por un lado, el desconocimiento de otros métodos igualmente esenciales que posee el matemático en su trabajo, alguno ya citado de pasada, pero de entre los que no me resigno a reiterar el de reiteración o inducción completa. Por otro lado, porque implicaría una identificación entre método de definición, demostración y axiomatización, esta última como grado supremo, cuando tal identificación es imposible -teoremas de limitación como se ha indicado en 1.3.-. Finalmente, implicaría el olvido -enfoque antropológico- de que todo aquel que crea, en el momento de la creación, olvida las teorías metodológicas, los condicionantes previos, abandonando toda ortodoxia metódica que, si lo es, lo es en cuanto a teoría posterior o marco en el cual plasmar lo creado, aunque por supuesto esa creación haya exigido el previo dominio de los contextos metódicos del campo en el que se trabaja; dominio que permite marcar, explícitamente, la posible marcha creadora en mero guión, en objetivos que jamás terminarán siendo respetados en su integridad, pero sin el cual, sin los cuales no se alcanzaría más que el sueño inorgánico, imposible de plasmar salvo por otra teoría metódica que lo guíe y lo tome como nuevo objetivo.

A la vez estas creencias no son otra cosa que una trasposición de lo que no se menciona en la 'verdad' del método y que permite ocultarse tras él a quien lo maneje. Obliga a dar la impresión de que el hacer matemático constituye una ciencia puramente racional, marginada al hombre, a lo que de pasión y vida existe en la naturaleza. Lo que si bien podóa acordarse de alguno de sus resultados –y ello seóa común a todo tipo de conocimiento-, no puede hacerse ni respecto a las motivaciones, ni respecto a la construcción de cada teoóa o a la de cada estructura particular. Y si bien se afirma que pensadores matemáticos como Platón, o Leibniz, o Newton, o Gauss, o Poincaré, o Hilbert, en cuanto especulación -no eran filósofos 'profesionales', como si tal categoóa existiera fuera de la profesionalización mercantil- afirmaron algunas insensateces no racionalmente científicas, resulta que dieron razón en cuanto al objetivo final del trabajador matemático: el que éste no acude a la matemática por su capa de racionalidad, por su excrecencia demostrativa, sino por el fondo de belleza y por la capacidad imaginativa que la misma encierra. Imaginación, no razón, base suprema del hacer matemático, aunque exija, para ejercitarla, un rigor de método absoluto, un rigor de método que es, a la vez, un rigor de pensamiento cótico.

4. Y aquí se encuentra otra creencia que subtiende el empleo del método axiomático constructivo. La que afirma que son las creencias las que influyen en la instrumentalización del método; más aún, en la instrumentalización de cualquier método de cualquier teoóa. Y es lo que se ha pretendido mostrar en el párrafo 2. Así, resumiendo lo ya escrito, se observa que en el pitagorismo-platónico el método se muestra esencial porque la creencia que subyace al hacer matemático es que la matemática se encuentra dada, completa y en su orden y el hombre ha de redescubrirla por 'elementos'. Precisamente Euclides parte de un espacio conceptual caracterizado axiomáticamente y culmina su obra con la construcción teórica de los cuerpos 'platónicos', con los 'elementos' de que está constituida la auténtica realidad, no la fenoménica. En otras palabras, toda la ordenación euclídea no lleva una finalidad intónseca conceptual, sino que viene condicionada por una finalidad extraconceptual. Finalidad para la cual, sin embargo, el método demostrativo se le muestra esencial. No ocurre lo mismo en los haceres subsiguientes. Incluso puede observarse cómo Descartes intenta la búsqueda de reglas para la dirección de la mente frente al método de los antiguos. Y es este tipo de reglas, de operacio-

nalismo incorporado, el que se mantiene en el hacer del cálculo, hacer que plasmará Euler en las reglas de derivación e integración puramente formales, mecánicas, y, por serlo, operativas. Y es una de las razones por las cuales los seguidores del pitagórico-platónico Newton quedarán descolgados, por su 'antigüedad' metódica, por su axiomatismo, en este terreno. Por el contrario, la posterior ruptura cantoriana exige, por la visión globalizadora del hacer matemático, una vuelta al método de los antiguos...

Incluso pueden citarse las palabras de Frege, paralelas a las que he mencionado en 2.2. de Pascal, paralelas pero ya en contexto ideológico diferente, por lo que el paralelismo queda roto, cuando en el Prólogo a *Las leyes fundamentales de la Aritmética* 'copia' términos pascalianos:

«El ideal de un método estrictamente científico de la matemática, que he tratado de realizar aquí, y que bien pudiera ser denominado eucüdeo, lo voy a describir de la siguiente manera. Probarlo todo, esto ciertamente no se puede exigir, porque es imposible; pero puede exigirse que todos los enunciados que se utilicen sin ser probados sean declarados explícitamente como tales... Pero además, y en este punto voy más allá de Euclides, exijo que se mencionen previamente todos los modos de deducción y de inferencia que se empleen».

Si el reconocimiento del método 'ideal' matemático parece el mismo -sólo parece en la acepción de que para una conceptuación de Lo Dado, los argumentos de regreso al infinito no son válidos, porque no pretenden fundamentación alguna, dada por el objeto preexistente, por lo que el método, más que 'euclídeo' sería aristotélico-, al ser las creencias diferentes, los objetivos se hacen diferentes, y mientras Pascal vuelve al contenido creador de la matemática, Frege se centra en el modo, en los fundamentos sobre los que se apoya el hacer matemático, y dejando a un lado los restantes planos -genético, psicológico, el propio ontológico y no porque no le parezcan importantes, que sí se lo parecen a pesar de quienes comentan a Frege, pero importantes en sus planos respectivos y no para el de fundamentos- dedica su atención de modo exclusivo al plano fundacional, secundario para quienes sostenían las conceptuaciones de Lo Dado y, claramente, Lo Construido. Pascal y quienes le siguen renuncian incluso al método postulacional en beneficio de nuevas proposiciones más o menos aparentemente ligadas a la naturaleza, mientras que Frege pasa a construir un sistema formal como el Cálculo proposicional o el de predicados de primer orden, o a intentar la sistematización de la Aritmética desde la posición ideológica del logicismo, con radical pretensión de eliminar cualquier sombra de psicologismo y, en el fondo, cualquier sombra a la que pueda calificarse de sintética de las teorías matemáticas ...

5. Parece conveniente precisar. Las creencias, lo que he venido llamando creencias, no pertenecen al ámbito del conocimiento, sino de la fe. Al ámbito del conocimiento pertenecen las teorías que, por serlo, bien en su cierre deductivo, bien en su cierre de contenido, alcanzan un estatuto calificable de estático. Las teorías son independientes de sus posibles aplicaciones, de los adjetivos que puedan rodearlas. Sin embargo, son las creencias, como normas de acción, las que determinan tales adjetivos, la aplicabilidad de las teorías, las potencias de las mismas y, con ello, su propia temporalidad. Esto último en el sentido de que es posible construir teorías de las que puede calificarse que, desde el nacimiento, salen muertas, mientras que otras van a cubrir lapsos de tiempo muy amplios, con repercusiones profundas en todo el ámbito cognoscitivo y, con él, en el pragmático. Una teoría sin creencia es nada, pura discusión acerca del color de los unicornios; una creencia sin teoría, es quizá t'eor que nada, es pura ideología. En otras palabras, una teoría es no sólo teoría racional, deductiva, sino teoría imbricada en una visión, en una concepción del cosmos, en unas creencias que son las que posibilitan su dinamismo y que por ser normas carecen de estatuto cognoscitivo alguno, apelando por ser campo de fe, a los sentimientos, emociones, pasiones ..., no sólo individuales sino de grupos de 'presión' racionales y, con ellos, a los mitos que entornan a las teorías, y su aceptación y rechazo acríticos. En el terreno que aquí me ha ocupado, el método axiomático, he pretendido mostrar la confirmación de esta tesis en cuanto a los condicionantes de dicho método, de su instrumentalización en el hacer matemático.

Aún más, ya la propia construcción conceptual viene condicionada por unas creencias y mitos asociados a las mismas, los de racionalidad. Creencias que vuelven a mostrar su papel en cuanto a la aplicabilidad de la teoría en sí, por el enfoque que de la misma se realiza, por el papel que se le atribuye respecto a otros haceres, la expansión y nuevas aplicaciones o modelos...

Así, el platónico piensa en elementos y pide, *exige* la confección de tales elementos matemáticos en un orden dado que culmina en la estereometría... Composición en elementos que incluye la independencia respecto a la doxa, aunque no respecto a otros haceres teóricos a los que condiciona en el método y contagia en cuanto al mito y al 'auténtico' conocimiento de la naturaleza. El operacionalismo de la 'ciencia nueva', por el contrario, parte de la convicción, de la creencia en que la naturaleza está escrita en lenguaje matemático, pero aquí y ahora y no en mundo eidética alguno; el orden viene dado no por un esquema metódico previo sino por la naturaleza, y de aquí la búsqueda de regla.> de actuación transformadoras en expresiones matemáticas operativas, no importando el orden conceptual axiomático, sino el operacional; con lo cual el cierre de una teoría sólo podrá darse por el contenido de la misma, por su traducción en proposiciones, y de ahí la profunda escisión que se produce en la Matemática según los contenidos en que se trabaje. Los elementos son ahora expresiones que conforman al técnico en su trabajo mecánico; y así la construcción naval, por poner un ejemplo, es campo de dicho operacionalismo llegando al extremo de que ingenieros navales, como Jorge Juan, pasen a considerarse 'matemáticos' por sus tratados para la construcción naval, tratados donde se exponen, por vez primera en España, las reglas del Cálculo. Y es ejemplo ya clásico para no ponerlo del día de hoy. Pero, a la vez, esta misma convicción lleva a problemas como los de isoperímetros, máximos y mínimos...

Y es frente a esta creencia de ser la ciencia matemática un trabajo manual y natural más, es contra la convicción de ser una ciencia de la naturaleza, contra la que se revelan matemáticos de primeros de siglo XIX y el tema se centra, entonces, en la teoría de números, la más alejada de aplicaciones, y en la geometría proyectiva aparentemente alejada también, y en las distintas geometrías imaginarias, no reales... Ya la mecánica racional se ha convertido en dogma; la aplicabilidad, la aparición de nuevas ideas en este terreno y no el mero desarrollo del mismo, se muestran con horizontes cerrados; el hacer matemático tiene que romper con ése anquilosamiento. Pero el propio trabajo en los terrenos de la pura razón se hace disperso, provoca sus polémicas en cuanto a tanto objeto no real. La idea de que lo obtenido responde a un plan estructural, aunque implícito, provoca una vuelta a las visiones globalizadoras, una vuelta al método axiomático...

Si las creencias, como nonnas de acción, determinan el papel de las teorías y, con ello, la instrumentalización de los métodos, también se tiene, en este punto, un posible elemento diferenciador para el contraste entre diversas teorías y la aparición de las rupturas epistemológicas. Que, como rupturas, no lo son propiamente de las teorías, sino del papel de las mismas, de la operatividad y aplicabilidad de sus núcleos conceptuales. Quiero decir, el teórico historiador de teorías -profesión y temática actuales- quizá tenga la posibilidad de distinguir unas de otras, adoptando como criterio. uno más, el mayor o menor uso, la relevancia o no del método axiomático. No por el método en sí, sino por las creencias que indican el papel y operatividad de su uso, y con ello cuándo una teoría parece agotada en cuanto a su núcleo central, al convertir alguna de tales creencias en fase racionalizada, anquilosada respecto a pura norma, con el método axiomático por el método axiomático en sí, y no como instrumento. La teoría pierde capacidad de desa.rrollo, de acción. Es lo ocurrido con Newton, para continuar con el último párrafo de la sección anterior, quien no logra cristalizar en teoría axiomática deductiva una nueva mecánica racional -que es obra posterior-, pero sí logra dar potencia a la creencia en la posibilidad de la misma y en la posibilidad de aplicación a casi todas, por no decir, todas, las restantes disciplinas. Y la cristalización realizada por Laplace, quien muere precisamente un siglo después de Newton, incluso con el opúsculo en el que suprime cualquier fórmula m;ltemática frente al *Principia mathematica* newtoniano, convierte en dogma, paralizador, a la nebulosa teórica -llamada por algunos metafísica- del *Principia*. Pero es lo que ocurre también con el formalismo hilbertiano, formalismo programático cristalizado en el estructuralismo bourbakista; programático y orientador de todo el hacer matemático posterior, de todo e' hacer que se convierte en realidad en el hacer matemático tras la ruptura de los entornos de 1939, y que parece mostrar síntomas de dogmatismo paralizador -por deformación acrítica de su papel-, que hacen acuciante la búsqueda de nuevas formas de creación en el hacer matemático o, más que nuevas formas de hacer, nuevas ideas que renueven el dogmatismo paralizador inscripcionista, que no el de empleo de método axiomático.

2.4. CRITICAS Y CONTRACRITICAS

1. Si he pretendido mostrar alguna de las creencias que soportan el uso del método axiomático, se observa también que las conceptuaciones mostradas no por antagónicas dejan de ser coexistentes. Coexistencia que permite el enlace o paso de algunas ideas de cada una de ellas a las restantes. Ya he señalado la posibilidad de mantener un consecuente platonismo con la conceptuación constructiva sin más que variar el objeto de trabajo matemático y convertirlo, del número, la figura, el movimiento, en la estructura formal. Ahora bien, ninguna coexistencia es, por así decir, pacífica: la coexistencia implica el intento de prevalecer cada conceptuación sobre las demás; en otras palabras, la coexistencia implica crítica desde cada una de las posiciones hacia las restantes para su consiguiente eliminación. He apuntado algunas de las que se han lanzado entre las dos primeras conceptuaciones expuestas. Pero la coexistencia también implica la posibilidad de sincretismos mal establecidos, de mezclas conceptuales, con aceptación acrítica de tesis opuestas de cada conceptuación, que dan paso a imágenes deformadas del método, del propio estatuto del hacer matemático. Y sincretismo de este tipo -es decir, ausencia de verdadero sincretismo o trabajar con un sistema pero hacer profesión de otras ideas- es el que, en el momento actual, existe.

Estas razones conducen a que, ahora, quepa la exposición de todo un haz de posibles críticas lanzadas hacia el método axiomático y ello por tener, en primer lugar, las tres conceptuaciones básicas que, desde mi punto de vista, condicionan el empleo del método axiomático.

Y, en segundo lugar, porque, en algunas críticas, vuelve a encontrarse un haz de creencias quizá no explicitadas con suficiente claridad en los puntos anteriores y, fundamentalmente, porque desde ellas se pretende que, al ser críticas racionales, las creencias no existen, sino únicamente argumentaciones frías, objetivas, cuando tales críticas no hacen otra cosa que manifestar, implícitas, dichas creencias. Finalmente, porque la amalgama de argumentaciones es grande, lo que hace aumentar, y no por la mera coexistencia de diversas conceptuaciones claramente delimitadas, la oscuridad en cuanto al método como instrumento del hacer matemático.

Cabría ordenar tales críticas atendiendo a los distintos planos del saber que he enumerado en el apartado anterior: Ontológico-Metodológico, Epistémico, Genético -histórico, individual-, Psicológico-Didáctico, Fundacional -empírico-racional-. No voy a hacerlo así, porque daría a las páginas que siguen un aire de tratado escolar que no me gusta. Prefiero que sea el lector quien se permita, si quiere, realizar tal clasificación para cada una de las críticas así como para cada una de las defensas que aquí realizo. Invitación cordial, por la que pueda incluir todas las que encuentre, que muchas otras de las que aquí menciono existen. Quiero indicar que realizo tres grupos en este apartado. En el primero incluyo aquellas críticas que pueden estimarse como cotidianas, muy propias de muchos matemáticos profesionales que no han meditado seriamente acerca de su hacer propio, falta de meditación que les conduce a estas consideraciones; procuro responder en el mismo tono y de aquí la ausencia explícita de los planos antes indicados. En un segundo incluyo una defensa de los 'defectos' del método axiomático euclídeo, defectos revelados desde Lo Descubierto y desde quienes estiman que el método axiomático es, esencialmente, un método de carácter fundacional. En un tercero hago referencia, aunque breve, a una crítica procedente de algunos lógicos que, situados también en un plano fundacional, buscan 'nuevas' vías constructivas respecto al hacer matemático, con explícito rechazo del método postulacional y el axiomático, aunque tengan que quedarse para ello en los inicios de la matemática, incapaces de alcanzar, salvo por la vía de definición axiomática que rechazan, las nociones fundamentales del hacer matemático contemporáneo.

2. *En lenguaje ordinario: Críticas y contracríticas*

C.l. El empleo de símbolos sin referencial, característico del hacer axiomático formal, hace que el trabajo matemático constituya un mero juego, cuando la convicción de quien trabaja en matemática como la posibilidad de su aplicación a las ciencias de la naturaleza, invalidan tal enfoque. El formalismo inscripcionista no se muestra, pues, como una justificación conceptual adecuada para la razón de ser del hacer matemático y, con él, para el método axiomático.

C.2. Admitiendo que el método axiomático sea un instrumento operativo, la ordenación del conocimiento matemático en forma axiomática no es otra cosa que una etapa posterior que, útil sin duda, necesita del dato previo de aquello que ordena. Así, el propio ejemplo de Dedekind es claro cuando sistematiza el conocimiento ya adquirido de la Aritmética elemental, sólo posible porque el sistema se encontraba dado de antemano y los axiomas de Peano no hacen otra cosa que adoptar las notas esenciales establecidas, empíricamente, por Dedekind. Es el mismo proceso el realizado por Bourbaki cuando obtiene las distintas estructuras que componen el entramado matemático apoyándose en un trabajo 'experimental', empírico sobre el total de la matemática de entonces, entornos de 1939, aunque se reconozca que el método axiomático es el criterio unificador que da 'existencia' a las distintas estructuras madre. En otras palabras, el método axiomático no es creador; como mucho, sistematizador. Y en este sentido, al no poder aplicarse los métodos formales hasta que la materia de estudio esté suficientemente desarrollada y clarificada, resulta que el método axiomático sobra, mero entretenimiento para quien carezca de ideas originales creadoras.

C.3. Aun cuando se acepte el método axiomático, se observa que no todas las proposiciones conocidas de una teoría encuadran en la formalización que constituye la clave del método.

C.4. El hacer axiomático es un hacer inmovilista y atemporal. Como todo se contiene en los primeros principios -y ese todo equivale a nada, por ser un mero juego sin contenido concreto, sin conocimiento en el caso del formalismo inscripcionista- resulta el argumento increíble -ya dado por Galileo, por otra parte- de que con sólo conocer estos primeros principios se conoce todo y este saber es para siempre. La lógica que subtiende este manejo es una lógica calificable del estado permanente. Consecuentemente, los conceptos del hacer matemático no sufren variación alguna una vez obtenidos en esos primeros principios, lo cual va contra el hecho histórico de su evolución, cambios de sentido...

C.S. Establecidos dos o tres axiomas, el matemático se permite obtener una serie de consecuencias de esos datos primeros. Pero ello supone, en general, un aislamiento del objeto respecto a su contexto, falto de una observación más completa del fenómeno, con lo cual puede conseguir, más que un estudio serio del fenómeno a considerar, una mera cadena de afirmaciones sin sentido. Y este hábito conduce, en general, a una desnutrición y esclerosis del propio pensamiento matemático, alejado de cualquier tipo de realidad, enclaustrado en su formalismo esterilizador.

C.6. La demostración formal llega a hacerse por la demostración formal, como eje,rcicio de prestidigitación ante un público admirativo. Pero tal demostración formal, perfecta y rigurosa, oculta la verdadera marcha del pensamiento en su realización, en su planificación. Además, en una disciplina, la detención en cada una de las demostraciones llega a enmascarar también la propia estructura y finalidad de dicha disciplina, perdiéndose la visión de unidad que la soporta y que, además, posibilita la ejecución de dichas demostraciones.

C.7. La hegemonía de la acción formal, de la caligrafía o el juego simbólico sin contenido, conduce a un estatuto especial del matemático: creerse en posesión de la verdadera marcha de la ciencia, superior a Jos restantes haceres por su precisión y capacidad deductiva por la cual llega a obtener un mundo de proposiciones con un mero punto de apoyo, al estilo arquimediano; aunque tal mundo nada tenga que ver con el mundo de la naturaleza. Ligado con este estatuto del que se autoapropia el matemático, resulta que los demás científicos, para pasar por científicos necesitan imitar la verborrea simbólico-formal y el método expositivo deductivo axiomático. Y cualquier obra de ciencia, para obtener dicho calificativo, debe ir sembrada o adoquinada de fórmulas matemáticas y no en el lenguaje usual, aunque éste puede ser, en algunos casos, más apropiado. Pero si sólo se escribe en lenguaje usual, indicando las motivaciones y finalidades del trabajo, este se estima, con cierto matiz despectivo, como de especulación o mera divulgación deformadora, y no de investigación profunda, sin las notas de objetividad y universalidad que se atribuyen al lenguaje científico, notas dadas únicamente por el formalismo matemático, radicalmente impersonal, y que no tiene que ser únicamente lenguaje formulario clásico, sino de estructuras.

3. Alguno de los argumentos anteriores son comunes tanto para quienes sostienen el método postulacional -entendido aquí como un hacer concret(}- como para quienes sostienen un hacer más concreto aún, un hacer dependiente de la abstracción de la naturaleza. Sin embargo, la mayoría de las críticas no son otra cosa que intentos de descripción de hechos, que se extrapolan inadecuadamente, convirtiéndose en crítica mediante la atribución al método

de notas que no son características del mismo. Entre los posibles argumentos en defensa de, y sin que se pretenda una defensa metódica, como ya he indicado, enuncio los siguientes:

D. 1. El papel demostrativo no es absoluto en el hacer matemático, enfocado en cualesquiera de las conceptuaciones básicas; y no lo es porque, de hecho, todo matemático, sea o no creador, se equivoca en las demostraciones y, a pesar de los errores demostrativos que la invalidarían, se acepta la proposición propuesta. Esta se considera, en el fondo, autosuficiente y la demostración no sirve más que como una posterior apoyatura para delimitar su validez y enlace con otras proposiciones; de aquí que la creación matemática se apoye más que en el proceso demostrativo, en la imaginación del matemático. Los errores en las demostraciones son comunes a todos los matemáticos y ninguno se ha librado de ellas; así, Euler, Gauss, Poincaré, Hilbert... por citar alguno de los considerados como mentes especialmente creadoras. El teorema fundamental del álgebra, por mencionar un ejemplo de proposición, pasó muchas vicisitudes antes de que fuera demostrado y, a pesar de su falta de demostración, los matemáticos lo habían adoptado como un hecho.

Hasta se da el caso, para algunos paradójico, de que el error demostrativo llegue a ser más iluminador que la proposición a la que pretende sostener, y ello en cuanto a convertirse en motor, a su vez, de creación, pareciendo que la matemática en lugar de marchar de proposición demostrada en proposición demostrada, fuera de error en error. Y no sólo en la creación de los matemáticos. En textos, muy buenos textos por otro lado, los errores demostrativos también aparecen, y este es un medio en el que los errores deberían encontrarse ausentes...

El contexto teórico en el que se mueve el matemático, la imaginación de quien trabaja en ese contexto, bastan para que el matemático decida. Incluso en aquellos puntos en los cuales no puede, por carecer de los conceptos adecuados, decidir de una proposición o de un problema si va o no en línea, por carecer de esos medios conceptuales, su intuición es la que decide el rechazo o aceptación de los mismos; los problemas clásicos de la duplicación del cubo, de trisección del ángulo... no pudieron hallar respuesta coherente hasta bien entrado el siglo XIX y, sin embargo, los matemáticos, de manera sistemática, rechazaban los intentos de solución de dichos problemas por convencimiento pleno en la imposibilidad de su resolución ·por regla y compás·, aunque faltaran los elementos básicos para la demostración de tal convencimiento. Y sólo el desprestigio acompaña a quienes se empeñan en dar demostraciones de tales problemas, como mostraría el caso Hobbes, el caso Gregory, y es mero ejemplo.

La perfección demostrativa no se ha pedido en las componentes de la axiomática, salvo en su versión fundacional, y precisamente creo que ha indicado y reiterado que se demuestra como se puede en esta fase del método. Atacar la demostración por la demostración, constituye un error; atacar la demostración por esterilizadora, otro. Que falten ideas a los actuales matemáticos, es posible; pero ello no implica que la responsable de estas faltas de imaginación sea la demostración formal, por presencia o ausencia excesivas de la misma.

La potencia del error puede realizarse, por otro lado, contra aquellos que se centran en la admisión de la fórmula por la fórmula en sí como reflejo de un dato de la experiencia, sin ver que la misma no es otra cosa que la expresión, más o menos adecuada, de un conocimiento objetivo que la sustenta, bien conceptual, bien relacional, pero de un conocimiento que, aunque pueda corresponderse con un fenómeno de la naturaleza, no lo expresa en su identidad, entre otras cosas porque, al hacer ciencia, el fenómeno se crea, aunque no sea más que en su acotación, mediante las hipótesis previas de trabajo, que incluyen la posible formulación matemática de dicho fenómeno.

D. 2. Aun cuando los principios primeros se tengan clara y distintamente formulados, la elección de los mismos no es asunto mecánico -salvo confundir el enfoque sintáctico puro con método axiomático, que supondría confusión o insipiencia en quien rFaliza la crítica-. La elección de los primeros principios, de cuáles Heben ser los adecuados para la formalización de una teoría previa o para la creación de una teoría que no sea mero divertimiento neurótico individual, es un problema de intuición, no de demostración. Como ya apuntara Kreisel, en el momento en el que las antinomias de la teoría de conjuntos hacen su aparición, realmente todos los principios que podían superarlas estaban formulados y con absoluta nitidez, y eran comprensibles para todos; pero lo que no se tenía era un criterio para decidir cuáles eran los que debían ser manejados, cuáles eran los mejores respecto a las posibles consecuencias y a la superación de la crisis. En otras palabras, aun con buenos principios y nítidamente formulados, el matemático puede equivocarse aplicando el método axiomático y sin aplicarlo, y lograr teorías contradictorias y antinómicas; aunque precisamente en el ejemplo indicado fuera el método axiomático uno de los instrumentos para superar dicha crisis.

Además, no hay que detenerse en la captación de unos primeros principios como si éste fuera el objetivo central. De hecho -y he tratado de poner algún ejemplo- ninguna estructura queda determinada por un único sistema de postulados que posean estatuto especial alguno. Elegir unos u otros sistemas de postulados no hace que la estructura varíe, sino que se obtengan sistemas de postulados equivalentes, caracterizadores del mismo objeto conceptual. En todo caso, la comparación entre tales sistemas de postulados y las condiciones que deben cumplir para su equivalencia, ya constituye un problema nuevo...

Como base de estos dos puntos se encuentra la convicción de la libertad creadora del matemático, ínfima minoría de quienes se autocajifican de tales, ínfima minoría cuya potencia imaginativa permite captar un bloque conceptual y posteriormente ir desarrollándolo, demostrativamente, paso a paso, sostenido ese desarrollo por la captación global de su tema de trabajo. Infima minoría que permite que, posteriormente, los restantes matemáticos se dediquen a abreviar y 'perfeccionar', racionalmente, lo logrado por quienes tienen la potencia de imaginación suficiente para la captación del tema en su totalidad, aunque los errores demostrativos parciales vayan jalonando el desarrollo de ese tema. Libertad creadora del matemático frente al dato previo de su objeto sostenido tanto por el pitagorismo-platónico como por el realismo materialista abstractivo.

D. 3. Una proposición o un concepto aislados, carecen de sentido. Sólo lo adquieren en el contexto de una teoría. Y en este punto puede estimarse que, actualmente, en un mínimo común de gentes, hay consenso general. Que desaparece en cuanto a delimitar las fronteras de lo que se entiende por contexto de una teor1a determinada. Desde quienes pretenden un rigor para el trabajo matemático, el contexto sólo queda perfectamente delimitado cuando se establecen las reglas de clausura del mismo y, para ello, se dan tanto las primeras nociones como los primeros principios. De mero contexto, teoría. Ahora bien, este paso es el que da, precisamente, el enfoque postulacional. Para aumentar el rigor, pueden indicarse como elementos de las reglas de clausura, cuáles son los principios de razonamiento utilizados o admisibles. No es un expediente más o menos estético. Es un expediente imprescindible y puesto de relieve, precisamente, por quienes admiten un constructivismo radical, por el intuicionismo, para superar antinomias en el hacer matemático. No constituye sino la segunda etapa del método axiomático.

D. 4. Si la ciencia no quiere ser ciencia de casos particulares, debe hacer generalizaciones y poder aplicarse al mayor número de casos posibles. Requiere, para ello, que exista una simbolización adecuada. El formalismo simbólico es una exigencia intrínseca al pensamiento en éste y en cualquier tipo de conocimiento. Simbolismo que no tiene por qué identificarse con la posición ideológica nominalista, con el formalismo inscripcionista empírico, ya que son concepciones que se cierran la posibilidad del razonamiento general, al impedir hablar de *todos* los símbolos de una forma determinada, al impedir razonamientos como el de inducción completa...

Un simbolismo adecuado permite observar las analogías y evitar repeticiones improcedentes de demostraciones; analogía no del simbolismo en sí, sino de la estructura que permite alcanzarse con su ayuda. Estructuración que, por supuesto, no viene dada en la marca concreta, material, por lo cual, por otra parte, la acusación de inscripcionismo al método axiomático no es correcta. Y ya el mero planteamiento crítico de la necesidad del simbolismo adecuado obliga a la creación y desarrollo de los lenguajes formales, con sus comparaciones, papeles, aplicaciones interpretativas... La necesidad y utilidad del simbolismo quedan, de esta manera, racionalizadas en un grado lo suficientemente elevados para no dejarse arrastrar, sino muy conscientemente, por la magia de los símbolos.

D. 5. El método axiomático ni es creador ni es esterilizador en sí. Ningún método, como instrumento, lo es. Quien crea no es el método, sino quien lo maneja. Ahora bien, hay instrumentos que permiten obtener, crear algo con ellos y hay instrumentos que no sirven para esta función. Y en este sentido, el matemático, utilizando el método axiomático como instrumento de definición de las estructuras abstractas, utilizándolo como medio para el desarrollo de la teoría asociada, ha creado tanto nuevas estructuras y teorías como sistematizado las existentes. Y ha permitido plantear cuestiones no ya acerca de los sistemas formales, sino incorporarlas a su trabajo, interiorizarlas. Así, las condiciones epistemológicas pascalianas de la definición; así, las condiciones de consistencia que, si no han logrado la demostración directa, el mero planteamiento matemático, como problema interno, ha suscitado un trabajo y, con él, la creación de teorías imposibles de lograr de otra manera; así, la definición formal, interna, del propio término de Lógica general... Logros, entre otros, las demostraciones formales de sus propias limitaciones. Aspecto creador no sólo en el terreno de lo que cabría calificar de fundamentos o filosofía de la matemática, sino en los terrenos que los matemáticos pragmáticos consideraban como 'matemática', como el álgebra universal, la teoría de categorías, los modelos no canónicos...

Ahora bien, insisto, aunque se maneje un método, quien lo maneja es el matemático y, como tal, el error puede surgir. Error siempre posible, pero en cualquiera de las conceptuaciones del método y en aquellas que lo niegan. Sin embargo, el empleo del método axiomático -perfectamente compatible con los restantes modos de trabajo y con la intuición matemática- da una ventaja sobre el empleo de sólo la pura intuición o madurez del matemático: la de ser un instrumento que, en cualquier momento, puede dirimir el error y, al dirimirlo, orientar para la consecución de los medios oportunos para superarlo. La crítica, inconsecuente, olvida que los propios matemáticos que enfocan su hacer como un hacer de evidencias, recurren al hacer postulacional para mostrar la validez y necesidad de su trabajo, porque es criterio que logra, como tal, desvelar sus propios errores. Constituye, precisamente por ello, una de las claves del hacer matemático, donde un error o una equivocación es, simplemente, un error o una equivocación y no una interpretación más o menos 'genial' de quien la comete, y donde una proposición interior a una estructura es una proposición interna a esa estructura, independientemente de las opiniones, de las especulaciones y puntos de vista de cada matemático y de quienes lo entornan; donde un problema está resuelto o no resuelto, nunca más o menos resuelto -aunque sí más o menos elegantemente resuelto- ...

Además, el empleo del método axiomático ha permitido establecer dos niveles teóricos interdependientes: el concreto o postulacional y el abstracto o formal. Y el último, que puede considerarse como una cierta formalización del primero, regula el hacer de éste en la medida en que permite la clarificación de las primeras nociones que utiliza, incluso haciendo ver que, en ocasiones, en una noción aparentemente sencilla pueden encontrarse involucradas muy distintas matizaciones y hasta, a veces, concepciones diferentes -lo cual no es obstáculo para que, a su vez, la pragmática del método, el enfoque postulacional, sea utilizado en la axiomática en su nivel operacional-. Es lo propugnado, por ejemplo por Chomsky, cuando al propugnar la formalización en lingüística señala como ventajas del método:

«Una teoría formalizada puede proporcionar automáticamente soluciones para muchos problemas diferentes de aquellos para los cuales se la concibió explícitamente. Las nociones oscuras e intuitivas pueden conducir a conclusiones absurdas y no proporcionar conclusiones nuevas y correctas, razón por la cual carecen de utilidad en dos aspectos importantes».

Papel heurístico del método axiomático que no obliga a confundir, como hacen quienes lo critican, el método axiomático con método universal, por un lado, o los planos de génesis cognoscitiva con el plano conceptual, por otro.

D. 6. Un punto hay, sin embargo, en que alguna de las críticas podría presentarse como más plenamente adecuada: la axiomática refleja una imagen estática del universo, siendo esencial en ella la idea de permanencia, de estabilidad del cosmos; la axiomática se enfoca no constructivamente, sino en papel descriptivo, por lo cual exige un mundo ya hecho y no en transformación, no cambiante.

Si bien la conceptuación pitagórico-platónica partía de esta creencia previa, el constructivismo axiomático no tiene por qué comportada. El constructivismo implica no una estática sino una dinámica del conocimiento, por la cual ese conocimiento es logrado, construido y transformado paso a paso o en rupturas radicales. Sin embargo, al admitir como nuevo objeto la estructura construida mediante la definición axiomática, esta estructura queda en estado permanente, fijada en la superestructura del conocimiento objetivo. Ahora bien, por lo pronto, lo que importa en la estructura y su teoría -desde el enfoque constructivo axiomático- no es el conjunto base dado de una vez para siempre, lo cual rechaza de manera explícita, porque dicha estructura se plasma en infinidad de conjuntos base originando concreciones diferentes, sino el hecho de que tal estructura pueda caracterizarse funtorialmente, operacionalmente; es decir, lo importante es la operación en la cual llega a desaparecer la propia noción de pertenencia de elemento a clase y la propia noción de conjunto. Pero, a emás, hay algo de lo que tampoco puede librarse el constructivismo no axiomático: la necesidad de suponer, con Zenón, que lo que se ha producido una vez puede reiterarse una y otra y otra. Una operación reiterable exige como sustrato la uniformidad de aquello a lo cual la operación se aplique. En el hacer matemático se admite la uniformidad conceptual, válida en todo tiempo y lugar en el que existan seres humanos -conformados, al menos, como hasta ahora-. Lo cual no equivale a decir que todo el conocimiento y las formas de obtenerlo estén dadas de una vez para siempre. Ni siquiera el conocimiento matemático. Y el propio hecho de haber realizado una mirada atrás y haber visto que el método postulacional ha variado en sus componentes ya es una afirmación de que el hacer matemático tanto en objeto como en método, varía en contextos históricos y se obtienen distintos tipos de matemática, tipos en los cuales las proposiciones varían en cuanto al campo propio en el cual son válidas; por ejemplo, la afirmación euclídea, con su demostración correspondiente, de que todo número se puede factorizar de manera única, es proposición no universalmente verdadera, sino que lo es para sólo determinados anillos y cuerpos. Y este es un conocimiento obtenido mediante un trabajo enriquecedor y, a la vez, transformador del campo en el que se movían los euclídeos.

El conocimiento se obtiene con esfuerzo, con trabajo y mediante procesos mentales que tampoco son constantes, sino que van variando. Así, se razona ahora en el hacer matemático con principios como el de inducción completa, pero sólo a partir del siglo XVII o con métodos globales a partir de finales del siglo XIX tras los trabajos de Cantor, o se hace uso de razonamientos no predicativos desde las mismas fechas o de argumentos aporéticos desde los trabajos de Gödel, o de lógicas minimales según el contexto en el que se actúa y que permiten evitar el criterio de no contradicción en el total del hacer, autolimitándolo a aquellas parcelas en las cuales se está seguro de no cometer contradicción...

4. *Una falsa visión histórica*

Desde un punto de vista puramente formalista o simplemente postulacional, pero pretendidamente riguroso, se han realizado ataques al empleo del método postulacional de los 'antiguos'. Ataques que, por contraposición, permiten observar las ventajas del formalismo. Ventajas consistentes en explicitar todas y cada una de las nociones primitivas y todos y cada uno de los axiomas o postulados, por un lado, cuando se trataba de formalizar una teoría y no partir ya de un sistema formal dado; especificar con nitidez las reglas de demostración que, a partir de los primeros postulados, permiten obtener las proposiciones del sistema, por otro; finalmente, establecer la diferencia y papel de las definiciones respecto a los postulados. Condiciones que, desde el rigorismo indicado, ninguno de los sistemas postulacionales construidos antes del siglo XIX cumple.

Por ejemplo, se insiste como lugar común -también yo lo he hecho- que Euclides, en los *Elementos*, hace uso de postulados como los de continuidad, superposición de figuras o el que establece que, en el plano, si una recta corta a un lado del triángulo entonces corta necesariamente a otro de los lados... Postulados que no aparecen especificados en momento alguno a pesar de que se utilicen. Además, Euclides hace uso de la definición pretendidamente esencial y no de la nominal, con lo cual no da deíiniciones, realmente, sino proposiciones que, en el mejor de los casos, habría que estimar como postulados porque se manejan pero no se demuestran. Euclides no menciona para nada las reglas de demostración de las que hace uso. Y tampoco se preocupa por demostrar la consistencia del sistema matemático que construye...

Y si menciono a Euclides es, simplemente, por haberse constituido su obra en paradigma del hacer *more geometrico, more mathematico.* Las críticas son válidas para cualquier otro sistema postulacional construido posteriormente, como en el caso de Arquímedes quien, en *De los centros de gravedad de las figuras planas* establece siete postulados de los cuales obtiene -Proposiciones 6 y 7- la ley de equilibrio de la palanca: Dos pesos conmensurables (o inconmensurables, respectivamente) se equilibran a distancias inversamente proporcionales a ellos. En lenguaje de fórmula escolar esta ley establece que la potencia y la resistencia están en razón inversa de sus brazos de palanca. Emst Mach es el primero en observar, 1883, que de los postulados arquimedianos, puramente cualitativos, es imposible obtener esta ley cuantitativa. Posibilidad sólo factible porque Arquímedes utiliza un postulado implícito: el producto del peso por el brazo de la palanca es constante. Mach, muy en su época, no quiere reprochar sólo a Arquímedes esta falta de 'rigor' en el método y recuerda que tampoco otros grandes personajes -así Stevin, Galileo, Huyghens, Lagrange...- advirtieron la falta de este postulado en el sistema y el salto conceptual exigido...

Ahora bien, las críticas son realizadas en nombre de un perfeccionamiento supuesto del método, que se quiere surgido tras la aparición de las geometrías no-euclídeas con la consiguiente separación del hacer matemático-hacer cognoscitivo científico natural; son críticas que olvidan el contexto de trabajo euclídeo donde tal separación no existía, unido el hacer matemático al conocimiento de formas puras de las cuales participaba y le daban la consistencia y la forma requerida. El mero planteamiento de tales críticas sólo es factible desde otro marco ya que, por ejemplo, la consistencia no podía plantearse como problema conceptual, por venir asegurada por la existencia previa de las entidades con las cuales trabajaba el matemático. La consistencia, como tal, no existía, sino meramente problema de adecuación del conocimiento a la realidad que lo trasciende. Pero la consistencia tampoco es problema en el enfoque estrictamente postulacional como ya he indicado en I., por lo cual es un desenfoque de su propio método hacer una crítica al método de Lo Dado. Incluso como problema de pura lógic formal, al apoyar una argumentación en la no-contradicción -y hablo de coherencia, no ya del propio principio de contradicción- sólo aparece en contextos muy diferentes de los matemáticos y aproximadamente en el siglo xm. para haceres de carácter meramente argumental y lingüístico...

Igualmente, la especificación de las reglas demostrativas carecía de existencia como problemática, como auténticas reglas de clausura de la teoría. Entre otras cuestiones, porque sólo podía surgir como problema tras un reconocimiento de un cálculo como el proposicional, ausente de las normas silogísticas, y del hecho de que los razonamientos matemáticos no eran sólo de inclusión de clases, sino relacionales y funcionales. Euclides carecía de los instrumentos teóricos necesarios para poder plasmar tales elementos o -instrumentos, originados sólo desde otros marcos como el fundacional. De modo análogo, el papel de las definiciones en Euclides creo que quedó suficientemente aclarado al indicar el cuadro de creencias en que se mueve su labor matemática, en 2.1.

Una crítica de este tipo es la establecida por Frege, por ejemplo, de manera indirecta, precisamente en las palabras que he citado textualmente antes. Y , sin embargo, Frege, en paralelo a Pascal , es antieuclídeo. A Euclides, realmente, no le importa en el fondo -hago leyenda histórica- más que el espacio real, el conceptual y la caracterización final de los elementos de dicho espacio. No tiene, como problema , el de fundamentar nada , porque es problema inexistente para un matemático de conceptuación de Lo Dado. Por el contrario, el problema para Frege es, precisamente, el de la fundamentación de dicho hacer matemático , y de ahí sus críticas al empirismo , al propio Euclides. Frege se queda en la fase de génesis fundacional racional, logicista y busca tal génesis fundacional en lo estrictamente deductivo, independiente a la existencia objetual. Búsqueda en la cual terminará fracasando y de ahí su posterior asomo a la geometría , con abandono de la Aritmética, como posible base del pensamiento puro. Es diferencia esencial que impedirá a Frege el ver que es el método axiomático el creador del objeto matemático. Cuadros diferentes desde los que hacer críticas que, al desbordar su cuadro, quedan desenfocadas.

Críticas inadecuadas tanto en su objetivo como en la falta de visión del propio marco desde el cual se realizan y único para el cual tendrían sentido. Por otro lado, estas críticas no tienen presente que al construir un sistema axiomático -como primera formalización de un haz de ideas previas- el mismo puede no ser adecuado, no ya porque contenga ciertos errores demostrativos, sino precisamente porque no logra dar un sistema plenamente cerrado y completo de aquello que pretende formalizar. El conocimiento global no se adquiere mediante un simple acto, sino que requiere muy diversas etapas, con permanentes vueltas al punto tomado de partida. En este caso, el sistema axiomático se convierte, automáticamente, en una fuente de problemas, en un reto, desafío para los restantes matemáticos. Es lo ocurrido con el programa formalista de Hilbert y su pretensión de hallar la demostración interna de consistencia, que ahora sí cobra todo su sentido en el nuevo marco, aunque pretensión fallida pero origen de todo un haz de nuevas creaciones puramente matemáticas. En otro orden de cosas, con el mismo Euclides y la búsqueda demostrativa del postulado Y en función de los restantes, también fallida, pero origen de nuevos ordenamientos de la geometría. Con *Principia mathematica* de Newton, donde los postulados no explicitados, pero usados, las hipótesis creadas por modo exclusivo para intentar la demostración y justificación de temas concretos y válidas sólo para estos temas, las faltas y errores en las demostraciones son algo común a lo largo de la obra y, sin embargo, el objetivo de dar una filosofía de la naturaleza estrictamente matemática *mediante proposiciones matemáticas demostradas matemáticamente* , se convierte en objetivo supremo para algunos, mientras que el de perfeccionar y llevar a expresión matemática lo que no lo era en Newton -aunque éste si lo creyera- es el objetivo supremo para otros, fueran o no discípulos de Newton en el sentido estricto del término como señala Truesdell. Y un sistema como *Principia mathematica* permite organizar, en cierta manera, lo ya esbozado y elaborado por matemáticos anteriores, pero en trabajo disperso, sin unidad; y, más fundamental, por ese intento organizador, por ese objetivo de axiomatización delimita un cuadro en el que se inicia una nueva disciplina que alcanzará con los trabajos puramente matemáticos de Euler y con los de Lagrange y Laplace, entre otros, el rango de mecánica racional y, posteriormente, el de Física clásica.

5. *Los antimetódicos*

Desde los propios orígenes de la plasmación del método axiomático como una de las claves del hacer matemático hubo reticencias por parte de quienes sostenían como más importante una fundamentación de dicho hacer. Discrepancias que no son, contra el parecer de algunos, meramente metodológicas sino mucho más profundas, son de carácter ontológico-epistemológico. Discrepancias en cuanto al estatuto, a la conceptuación del hacer matemático. Así, frente a Lo Construido, una escuela como la de Erlangen -Lorenzen, Lorenz ...– pretende buscar un fundamento al hacer matemático que no se apoye en el método axiomático.

La conceptuación básica se centra en que para los componentes de esta escuela el hacer matemático no es un hacer de estructuras formales ni de teorías acerca de dichas estructuras. Estas se ven como algo arbitrario, y quienes sostienen que constit yen el objeto propio del hacer matemático pretenden fundamentarlas en la deducción -lo que, como ya he señalado, es incorrecto-. Esta, a su vez, en la razón y ésta, a su vez, y nuevamente, en la razón... Y o bien se sigue fundamentando en la razón en un regreso al infinito o bien hay que cortar, de manera dogmática y autoritaria. El hacer matemático, como cualquier otro hacer, debe apoyarse en una filosofía de la ciencia que adopte como criterio el de una permanente crítica, de carácter normativo, que intente la justificación de los medios que en tales haceres se emplean para la construcción de sus teorías. En el momento presente hay una crisis en el hacer matemático y, en consecuencia, se tiene que realizar una fundamentación, nc dogmática, de dicho hacer. Evitando todo dogmatismo, el mejor fundamento que puede encontrarse es el de la acción, la actividad del hombre. Y tal actividad no es otra que la actividad diaria, ordinaria. Desde este enfoque el hacer matemático, cuando adopta el método axiomático, además de dogmático, esclerótico y autoritario, se presenta como un proceso en el que s<" olvida justificar, fundamentar los primeros pasos. Justificación o fundamentación que se muestra esencial para cualquier tipo de hacer, y que no puede realizarse en el método deductivo sino en las actividades naturales, racionales y libres de prejuicios.

Estas y parecidas razones suponen ataques al método axiomático por aquellos que ven en el hacer matemático de estructuras un mero juego, mientras que por el contrario, desde la actividad de la vida ordinaria, la matemática se presenta como un hacer muy serio, como un actividad 'ordinaria' muy profunda y nada arbitraria. Y de aquí que, sin dogmatismo en el punto de partida, en la creencia base que indica que es obligatoria la fundamentación, se tenga que fundamentar, asegurar la verdad de los primeros principios o axiomas de esta actividad tan seria de la vida ordinaria que se llama matemática. Asegurar tal verdad es el objetivo base de la fundamentación y hay que buscarla en la adecuación a la práctica, gracias a procesos efectivos. En el hacer lógico, tales procesos se basan en el método dialógico -pregunta, respuesta- creado por Lorenzen y que se muestra como una actividad 'natural', de la vida ordinaria; en el hacer aritmético esos procesos se basan en rayitas concretas para contar las ovejas que entran en el redil.

Significa, en el hacer lógico, el manejo de proposiciones aisladas de su contexto, averiguando dialógicamente su verdad o falsedad; lo cual es radicalmente imposible, aunque permite, ciertamente, el establecer estrategias para la decisión respecto al valor veritativo de dicha proposición. En cuanto al hacer aritmético de rayitas, implica una confusión entre Logística y Aritmética, confusión combatida desde los tiempos de Platón. A pesar de lo cual se insiste en que tras el acto primitivo de contar con rayitas se dan normas para regular el empleo de los signos y la naturaleza de las operaciones con tales signos. Nueva contradicción, cuando Lorenz pretende justificar la inducción completa no tiene otra opción que acudir a los ordinales transfinitos, que deben ser muy propios y naturales de la vida ordinaria y de cualquier actividad material. Además permiten cualquier acepción los últimos términos que he utilizado porque los mismos no se definen previamente en este ataque de los antimetódicos.

Lo mismo ocurre respecto a la Lógica, obtenida como actividad propia de las argumentaciones de la vida ordinaria. Junto al condicional lógico se distingue el condicional práctico que es el que descansa en la actividad natural sin intervención previa del lógico, que se deriva del práctico. Supone que el condicional práctico aparezca como independiente al lenguaje y refleje actividades humanas extralinguísticas y, consecuentemente, extrasimbólicas. Como señala Lauener todo acto de concatenación exige ya un contexto linguístico -aunque yo diría, más bien, simbólico- y postular un condicional práctico no es más que un subterfugio. Además, Lorenzen establece unas reglas operativas para su proceso dialógico, pero cabe cuestionar siempre la arbitrariedad de esas reglas, salvo argumentar que las mismas no son otra cosa que el resultado de la actividad ordinaria, y es otro subterfugio en el cual se elige una actividad determinada que precisamente fundamente lo que uno quiere fundamentar. Y aquí incide la misma crítica que apunté al plano Didáctico, el constituir un engaño para conducir al alumno allí donde se quiere conducirle.

Esto último permite ver dónde se encuentra el fallo de esta posición que condena el método axiomático como dogmático. Confundir la explicación con la fundamentación del hacer matemático, de cualquier hacer conceptual. En cuanto explicación, han logrado, los lógicos de la escuela de Erlangen, buenos resultados y hallazgos técnicos, como el propio proceso dialógico para contrastar si una determinada proposición de un Cálculo es o no válida, aunque no haya demostración de la misma -por la incompletitud del Cálculo en el cual se esté operando-. Pero aun en este caso se requiere que dicha proposición esté construida de acuerdo con un determinado cálculo lógico, con reglas sintácticas determinadas, es decir que pertenezca a un L-lenguaje. Querer fundamentar dicho hacer en la actividad humana, por otro lado, es un truismo, porque es el hombre quien ha construido dichos cálculos, estruct ras, modelos y hacer matemático, en una palabra, quien ha construido la burbuja conceptual, aunque condicionado, ciertamente, por su estructura biológico-fisiológica *y* por el medio en el que se ha ido transformando. Pero actividad que, en el caso de la burbuja conceptual es mental y no una actividap de rayitas o guijarros, que son muy buenas actividades lúdicas y permiten un proceso explicativo interesante, pero que en ningún caso constituyen un fundamento epistémico, ni ontológico, ni metodológico, de un hacer conceptual. Lo Construido, la estructura y la teoría a ella asociada, son del pensamiento puro y querer partir de la rayita concreta es mera confusión de planos del saber. Y que no es fundamento de nada, lo prueban quienes sostienen esta posición, porque ya he indicado el recurso de Lorenz a los ordinales transfinitos, por un lado, y por otro, el permanente quedarse en el juego sensorial y no ir a la búsqueda de dichos elementos de actividad de la vida ordinaria para las estructuras, con lo cual siguen permaneciendo en un hacer matemático de papúes -y perdón para los papúes-, aunque podrían responder que naturalmente tales búsquedas no hacen falta porque en la vida ordinaria las estructuras no existen y, consecuentemente, tampoco existen en el hacer matemático...

Junto a ese fallo se encuentra la permanente búsqueda, obsesiva, de fundamentos: la deducción, la adecuación al mundo, unos primeros axiomas verdaderos, una actividad sea de la vida ordinaria sea de la racional... Parece una continua confusión en la separación entre burbuja conceptual o del pensamiento puro y las restantes y una pretensión de subsumir dicha burbuja conceptual en otras, hacerla desaparecer. Ciertamente existe un problema, pero de carácter psicológico, neurológico, didáctico: Cómo se desarrolla el individuo y cómo va adquiriendo la estructuración fisiológica pertinente para alcanzar la burbuja conceptual -lo que, según mi experiencia docente, no alcanza todo individuo-. Problema que no incumbe a un plano de fundamentos, ni a un plano ontológico. Desde los cuales habría que indicar que el hacer matemático es una construcción conceptual y no de otro tipo; y si se hace matemática, se hace matemática y no regletas o gomas de colores; y si se manejan éstas, como motivaciones, sugerencias para ver no lo que estas regletas y gomas de colores hacen ver, sino lo que no se ve con ellas, trascendiéndolas. Porque ciertamente un juego de regletas o gomas de colores, como actividades de la vida ordinaria, no alcanzarán la estructura ni la teoría de dicha estructura, entre otras cuestiones porque esos juegos y esas gomas de colores lo son como juegos matemáticos, en cuanto desde el hacer matemático previo se los ha constituido como materiales de actividades lúdico-matemáticas, y" no al revés.

6. Profesionales del hacer matemático han insistido, en línea que nada tiene que ver con el constructivismo de la actividad ordinaria de los lógicos de la escuela de Erlangen, en que el hacer matemático no consiste ni en un método, ni en un contenido: La Matemática se basa, fundamentalmente, en resolver problemas. Y el primer problema que se me presenta es el de la significación del término 'problema'. No lo he visto definido por quienes sostienen este punto de vista. Ciertamente uno, en sus clases, plantea ejercicios, problemillas... pero siempre dentro de unos marcos determinados. No sé lo que puede significar 'problema', así, en abstracto... En cualquier caso, quienes sostienen esta idea, suelen acudir a la historia, pero este es su fallo: confundir el plano genético-histórico con los restantes. Y, nueva confusión, se acude al plano psicológico: el volcarse a un tema, a una cuestión no resuelta... Pero, por un lado, en una teoría determinada, con su marco propio; por otro, siempre cabe señalar que si es pregunta no resuelta lo es por no demostrada en el contexto teórico en el cual realizar dicha pregunta, contexto teórico en el que se plasma el problema. Con lo cual dicha cuestión lo es porque no se conoce la demostración de la misma, es decir, si pertenece o no al conjunto de teoremas, a la teoría deductiva que corresponda. Desconocimiento de plano epistémico, realmente. Y no me detengo más porque creo que ya he hecho suficiente referencia a este punto, en páginas anteriores.

3

A MODO DE CONCLUSION

Cesr ici 1111 *livre de lm1111ej oi*
(Montaigne)

En el caso del hacer matemático una de las críticas centrales que se lanzan desde el plano de la revuelta actual está constituida por estimar que dicho hacer ha cristalizado como terreno de pura ciencia racionalizada, formal y abstracta, que ha olvidado sus intuiciones originarias -aunque ningún acuerdo existe en cuanto a cuáles sean esas fuentes-, y se ha convertido en un hacer opresor tanto para el propio matemático -que trabaja sin orientación alguna, sin saber por qué ni para qué- como para aquellas materias científicas a las que quiera aplicarse. Y, por extensión de paradigma, sobre todo el pensamiento. Consecuencia de su formalización y abstracción, se ha convertido en un hacer paralizador de la imaginación creadora. Desde este plano se estima que toda deducción matemática es formal, convertida en cálculo y no guiada por el fin u objetivo a perseguir, con lo cual el mundo o universo en el que se mueve el espíritu matemático está desprovisto de toda materia, carente de sentido, separado de lo real. Cristalización en ciencia formalista racionalizada precisamente por el método utilizado: el axiomático formal, porque axiomatización se muestra equivalente a abstracción -cuando quizá más real hubiera sido indicar que, por abstracción, se necesita utilizar el método axiomático y un cierto grado de formalización-.

Creo que después de lo expuesto en 1., en 2.3. y 2.4., tal acusación parece, en principio, inconsecuente. Es claro que la aplicación de un método, indiscriminada, llega a provocar extravíos. Pero de ello no es responsable el método, sino quien lo utiliza. Quien sólo ve el método sin aquello en lo cual hay que emplearlo, sin las creencias que lo entornan, sin la distinción entre los distintos planos que ha de ver todo quien se dedique al saber, ve nada o quiere no ver, deformando a su medida lo que luego critica. No hace matemática quien sólo aplica la fórmula o se detiene en el aparato externo, quien sólo hace la demostración por la demostración para prestidigitación ante quienes le contemplan, sino que en esos casos juega, meramente, a recetario o a calígrafo. Y tampoco la hace quien se limita a la resolución de un problema o a una nueva demostración de un teorema ya muy conocido o quien se dedica a resolver los 'juegos matemáticos'... De aquí que atacar el método en sí no equivalga a atacar la auténtica marcha del hacer matemático, sino la mera aplicación de unas recetas, y ello con anteojeras, que en el fondo no se tienen presente. El equívoco no hace más que contribuir a un aumento de la polución desinformativa que impera en grado mayor, confirmando el calificativo de utopías respecto a las igualdades de la razón y de la capacidad, es decir, para lo que podrían ser las igualdades reales, contrapuestas a las que esa polución hace predominar, las puramente formales.

Ir contra el método por el método no es otra cosa que una manifestación de oportunismo demagógico o de confusión mental respecto a lo que, de hecho, se oculta en el pretendido dominio del mismo. Y ello porque lo que realmente importa en el trabajo matemático no es la aplicación indiscriminada de método alguno, sino la capacidad imaginativa de quien realiza ese trabajo. Capacidad imaginativa acompañada de intuición para captar tanto el contenido como su posible marcha demostrativa que, junto al análisis conceptual constituyen la clave de dicho trabajo. Imaginación junto a dominio conceptual de una materia que sólo se obtiene mediante trabajo y esfuerzo, mediante ejercitación que entraña también la de la memoria. Exigencias internas a la burbuja conceptual en la cual se da el trabajo matemático, clara expresión de que esta burbuja conceptual posee su propio autodesarrollo y transformaciones internas.

Creo que es en este punto, el de ser la matemática un trabajo conceptual en el que inciden, realmente, las críticas que se hacen a la matemática como abstracta y axiomatizada, como alejada de la naturaleza y de lo real, y que se compendia en afirmaciones como las ya mencionadas, como las siguientes: El método axiomático ha hecho que la matemática se convierta en una torre de marfil por su excesivo grado de abstracción; torre de marfil por la cual el matemático trabaja, en el fondo, para sólo una docena de iniciados.

Si la crítica no va contra el método, realmente -y si va contra el método es por desviación de su objetivo-, sino contra el ser torre de marfil, se me presentan dos aspectos, al menos, en la revuelta contra el hacer matemático, contra el hacer conceptual en general; porque el matemático es mera representación particular de este hecho: la revuelta se hace, prácticamente, contra toda la burbuja conceptual, contra el plano del pensamiento puro:

l. Si se afirma que la matemática actual nada dice de la realidad y está ausente de un contacto mínimo con la naturaleza, se afirma algo que supone un desenfoque de qué sea el conocimiento. El hacer matemático posee un contenido de conocimiento objetivo. Y cada disciplina, sea o no científica, posee también su propio objeto de conocimiento real, objetivo. Objeto de conocimiento logrado mediante una interacción, mediante una transformación de la naturaleza sobre ella misma, que es la que da como resultado ese objeto, esa superestructura objetiva, real. Y los objetos logrados en cada hacer no deben solaparse, aunque gracias a un método común de trabajo puedan presentar interrelaciones e influencias obligadas. No se puede hablar con el geómetra, y en términos geométricos, acerca de los versos épicos, salvo que tales versos se conviertan en materia de estudio matemático -su peso y medida, por ejemplo-, pero ya no se hace poesía, ya no se enfocan los versos épicos como versos épicos. Que la imaginación, sensible, no sea capaz de representarse el mundo conceptual objetivo en el que trabaja el matemático, es una cuestión diferente, pero es el mismo problema que se plantearía en disciplinas pretendidamente más cercanas a lo 'material' como quieren ser la Física o la Biología, que como disciplinas conceptuales tampoco dan ni pueden dar una pintura cartográfica del universo, de la naturaleza, a pesar de las leyendas escolares. Y en este caso podría achacárseles lo mismo que al hacer matemático: que tampoco dirían nada de la realidad, de la naturaleza. Y hay que observar que en ellas son precisamente las imágenes perceptuales sensibles las que entorpecen su marcha conceptual, no quienes las favorecen.

Si, por otro lado, se quiere indicar que la matemática Qada dice al hombre ni a la sociedad, ello supone, más que crítica, un acierto aunque relativo al común de las gentes, que no a los matemáticos. Acierto, porque el individuo también vive en burbujas que no son las pensamiento puro, sino estéticas, míticas, tecnológicas ... Acierto, porque no identifica mera ideología con la teoría en el contexto de una creencia; y la ideología puede dar la sensación de satisfacer las apetencias acríticas del hombre, lo cual no ocurre en la teoría. El hermetismo matemático, como cualquier otro tipo de conocimiento objetivo, lo ha sido permanente, disciplina de iniciados, a pesar de su transparencia y a pesar de que las opiniones, posibles en cuanto a las especulaciones respecto a los fundamentos, métodos y aplicaciones, dejan de existir en cuanto al producto acabado. Quizá el impedir la matemática, como producto, la especulación y la diversidad de opiniones, siempre factibles en terrenos como la economía, la política, lo social o la religión, sea la causa de tal hermetismo, aridez y silencio para el común de las gentes que necesitan sentirse protagonistas de aquello que no controlan, protagonistas-esclavos bajo la dictadura de lo que, en aparente pero irreal libertad, les dan para elegir y, sin otra opción, eligen. Pero la función de la matemática no es una función dogmática como, por ejemplo, la religiosa, la política o la económica. Precisamente esa marginación a cualquier dogmatismo y a cualquier ideología, permite a la matemática el ser trabajada por trabajadores de ideologías totalmente opuestas en lo político, lo religioso, ... Incluso para algunos se ha hecho, por reacción, tabla de salvación objetiva en momentos amargos, proque supone un trabajo que supera cualquier tipo de ismos, y recuerdo cómo el Russell mño aplazaba el suicidio por no saber aún suficiente matemática, o cómo Buero Vallejo dedicaba a la matemática preferente atención en la cárcel, condenado a muerte, para abandonar dicha atención en el acto de la conmutación de la pena ...; y en este área cabría inCluir a Anaxágoras, a Tartaglia, a Pascal, a Cantor, a Wittgenstein ... A todos los que aceptan el aura de ejercitación y ascesis del individuo para alcanzar el orden cósmico con su belleza y armonía intrínsecas, ya apuntada por los pitagóricos y platónicos, y que encuentran en lo cerebral la base para sus sentimientos. Y ello al modo que Schónberg defiende el dodecafonismo de críticas paralelas a las aquí expuestas: <<El compositor no encuentra dificultades en dirigir mentalmente sus sentimientos, por lo cual el que se concentre en la precisión y en la lógica no significa que sus producciones hayan de resultar inevitablemente áridas y sin atractivoS>>.

Y si se quiere atribuir a la matemática y a la ciencia teórica a ella supeditada un papel de transformadora directa de la sociedad y del individuo, se comete nuevo error: confundir las burbujas conceptual y tecnológica. Y la matemática y la ciencia no son técnicas, aunque hayan tenido y tengan conexiones con la misma. Sin embargo, y aun cuando en ocasiones configuren la técnica, la mecánica, poseen un contenido conceptual diferente que puede satisfacer a algunos -y de hecho los satisface-, aunque detesten las aplicaciones técnicas que, por otro lado, dependen del mecánico, no de ellos. Achacar a Arquímedes que todo su estudio de la balanza es puramente teórico porque jamás podría aplicarse a la 'realidad' es una salida de tono, porque lo mismo podría afirmarse de cualquier otra disciplina científica. El estudio de Arquímedes supone varillas rígidas sin masa y no hay varilla rígida sin masa en la naturaleza, aunque el mecánico, en términos de Newton, comete errores, pero deberá tomar como modelo el estudio teórico arquimediano sabiendo que su plano no es el conceptual. Y el mecánico, el técnico, sí dependerá de la técnica de su momento. No hay ciencia estricta, puramente empírica, sino ciencia de hipótesis estructurantes, globalizadoras de lo previamente acotado, junto a la mecánica o técnica que limita su atención a los casos, a los experimentos singulares, que pretende repetir en cada ocasión porque han dado resultado en las ocasiones precedentes.

2. En cuanto a torre de marfil y trabajo para sólo una docena de individuos, los iniciados, hay que observar que más que crítica es la descripción de un fenómeno sociológico actual, propio de todas y cada una de las disciplinas científicas, de cada una de las especializaciones en que el saber total se ha escindido. El momento presente implica la existencia de villas amuralladas como en el medievo, aunque las mismas no se manifiesten o localicen en espacio geográfico físico alguno. Son centros de control invisible, centros de vanguardia en cada terreno de trabajo. Y, fundamentalmente, centros de decisión para la aceptación o rechazo de cada trabajador, de cada uno de sus productos de trabajo. Hoy el matemático, el científico en general, si creador, se encuentra inscrito en alguno de esos centros inmateriales de control y trabajo en los que se decide, a veces de modo no estrictamente racional, la línea de trabajo a seguir, las ideas que a ese grupo no interesan y que, por ello mismo quedan excluidas de la circulación... Para el resto de los matemáticos, de los científicos, para el público, tales centros se

muestran existentes, pero inaccesibles y hasta invisibles, como el Castillo para el agrónomo K. Y ello ha supuesto un cambio radical en la posición del matemático, del científico respecto a la sociedad que le entorna. Y este cambio en el papel del científico -incluso podría irse más allá e indicar que para el político y económico ocurre Jo mismo-, la medievalización sociológica existente, quizá sea el auténtico motivo de crítica que, atacando al método en cualquiera de sus frentes ataca pretendidamente el trabajo en el mismo y, consiguientemente, busca a ciegas el cambio de una estructuración social que se le escapa y en la que se encuentra inmerso, como en la red o malla en la que se encuentra prisionero.

Críticas y posición adecuadas -sin entrar en la faceta apuntada en el pltimo párrafo, que daría el contexto total, globalizador del fenómeno conscientemente acotado aquí- si las mismas fueran a su objetivo central, y no confundieran y contrapusieran el mito de la razón con el mito de la naturaleza al que se quiere volver y anteponer, vuelta para que la supuesta magia del individuo no continúe suplantada por la magia de la tecnología, dominadora y transformadora de la naturaleza pero ahora sin sujeto dominante, por lo que, en su dominio, pueda llegar a su destrucción. Mitos que se quieren contrapuestos, por falta de conocimiento, porque ambos son complementarios, nutriéndose uno al otro, dando paso a lo que he denominado 'creencia' subyacente a un hacer, a un trabajo, o elemento que lo posibilita. Trabajos que, sin esos mitos que se ocultan en el producto acabado, jamás podrán ser logrados.

E11 todo caso, parece que es el predominio acrítico del mito de vuelta a la naturaleza -con su intento de racionalización, que es una pseudorracionalización , como la ecología-, mito que se quiere identificado con el de la libertad e igualdad de todos los hombres -en el sentido de que tal vuelta suprimiría cualquier tipo de desigualdad, al estilo de la vida roussoniana, con la mejora de la vida individual, con su felicidad inherente, sin tener presente que, al menos, hay otros tipos de igualdad que he ido citando esporádicamente-, el que subyace en las críticas al método porque éste parece entrañar un trabajo alienado que conduce a una manifestación de 1desigualdad inherente a la capacidad del pensamiento humano, reafirmando la imposibilidad de la igualdad de capacidades, que no en el terreno material o económico. Manifestación de desigualdad y, a la vez, para algunos, de empobrecimiento mental al no dar a ese pensamiento más que formas abstractas y no sentimientas o percepciones que quieren enriquecedoras de la personalidad. De ahí que un formalismo se vea más como un factor de desequilibrio mental, como factor de ruptura de una pretendida armonía social, al mismo título que el urbanismo actual, que aleja al individuo de la captación de las formas naturales y provoca consiguiente reestructuración neurofisiológica, dada por la vida en la naturaleza y no en la 'nueva naturaleza de hormigón', no en las ciudades trazadas a cordel, por la vida en edificios de formas lineales empobrecedoras por empobrecidas... Y la superación de tales visiones se convierte en una vuelta a los orígenes, a la naturaleza ·madre', a la lectura de los 'creadores', al estado original del sonido, a los 'alimentos terrestres'...

No se tiene presente, sin embargo, el hecho de que los matemáticos, los geómetras, en general, no se mueven en su trabajo por el solo factor demostrativo formal, sino que en su hacer existen otras motivaciones, como un deseo de captación de la armonía que lo trasciende y que afinca sus raíces más allá del formalismo y de la burbuja de racionalidad, por lo que el hacer matemático exige un muy alto grado de imaginación y, consecuentemente, una muy alta capacidad, quizá deforme, quizá muy alejada de las raíces de la conciencia colectiva y que, por ello, provocan las crisis de carácter neurasténico tan típicas del matemático. El pitagorismo-platónico no es otra cosa que la concreción de una corriente interna al hombre, que no puede ser eliminada, suprimida; corriente de la que han participado, en su casi totalidad, los hombres de ciencia creadores. Y que sólo desde un enfoque de pretendido positivismo pragmático cientifista se ha querido olvidar y desterrar como algo no racional, no científico, en nombre de una pretendida calidad superior de la razón discursiva, enfoque originado quizá en el factor iconoclasta occidental que, como indiqué en las primeras líneas de este libro, plasma Descartes con su «pienso, luego existo...» frente al pensar por imágenes más típico y propio de los cultivadores del 'arte de la memoria', de los míticos... Es defecto de quienes sostienen el querido rigor lógico-exacto a ultranza, que no se corresponde con la marcha real del hacer matemático n· con la de cualquier trabajo intelectual que presenta sus limitac ones tanto por la existencia del hecho individual, imposible de estimarlo como consecuencia o teorema de estructura alguna, como por la propia entidad estructural de lo que construye, a la cual debe someterse posteriormente. Y es lo que he pretendido poner de manífiesta al remarcar tanto el papel del error en la conceptuación y en las demostraciones que todo matemático comete en su trabajo, como la apoyatura en una serie de creencias, a veces irracionales, a veces características de subconsciente bien individual, bien colectivo. Pero que no debe confundirse con la anulación radical de todo método, con la anulación de Jo racional que supondría, por modo exclusivo, una vuelta a la naturaleza, sino a la barbarie más o menos organizada. Y la barbarie no es, precisamente, el estado idílico roussoniano, tan ambiguo como su intelectualismo burgués, y que olvida que el término 'naturaleza' se usa con la misma y total ambigüedad de esa imagen intelectualizante; olvida que puede afirmarse, con Olivier Messiaen que «la Naturaleza es una gran fuerza en la cual puede uno perderse».

Tampoco se tiene presente, por otro lado, lo que se puede calificar de psicología de masas, de estructura de la sociedad, estrechamente ligado al punto 2. último. Tema globalizador en el que no entro salvo en su cita, pero que es factor a tener en cuenta y desde el cual estudiar y dar posible explicación de las motivaciones no sólo de las marchas de flagelantes, de los suicidios colectivos, de las histerias destructivas del nacismo o las de pueblo elegido, sino de las corrientes populistas, o de las admirativas y repulsivas hacia la tecnología y la naturaleza, y también de las sucesivas revueltas societarias para cambiar, no suprimir por imposible, de dominadores. Todas ellas caracterizadas por una radical disminución del espíritu crítico, por una masificación, por un deseo de autoengaño, por lo que no es otra cosa que la real necesidad de la sociedad de ser dirigida, dominada, de prestar vasallaje a un amo como el rebaño requiere del pastor *y* que sólo podría superarse por la autocontradictoria idea de la liquidación total de la propia sociedad. Necesidad de un Poimandres colectivo que no conduzca al hombre al ejercicio de su responsabilidad individual, sino que le impida, precisamente, tal ejercicio porque el mismo podría llevarle a conseguir esa su conciencia propia tan absolutamente difícil de ejercer, frente a la comodidad del sentirse acogido, protegido, inmerso en la masa. Idea superadora de creación de conciencia individual, de individualidad crítica que encuentra su total y radical oposición en las propagandas demagógicas de la igualdad socioeconómica, y con ellas, de un utópico comunitarismo societario, con sus consiguientes libertades entre iguales, libertades de los miembros del rebaño que, como tales, son igualmente libres, pero en la igualdad del redil o de los vasos comunicantes a la que ya hice referencia...

Uno de los elementos a considerar, en este campo, el factor moda que, en el caso del hacer matemático, se plasma por ejemplo en la enseñanza de carácter formalista con abandono de nociones geométricas, fuente siempre de recursos imaginativos. Corriente de enseñanza formal que no equivale a enseñar matemática, ni método axiomático constructivo..., pero que da paso, por el ambiente equívoco que implica, por la campana que tiende, y por reacción, a los ataques y revueltas contra un método que previamente han desvirtuado. No revelan otra cosa que un abandono del espíritu crítico y, con ello, un embaucamiento por información errónea, por la aceptación de la imagen frente al trabajo individual interno propiciado por la lectura y la meditación, por el ejercicio de la memoria y, consecuentemente, de la voluntad de la cual ésta procede.

En sentido contrario, en movimiento pendular pero con las mismas características y consecuencias, se tiene la corriente de irracionalismo ametódico como la que actualmente se manifiesta, corriente opuesta igualmente al trabajo interior que exige de un esfuerzo con método, porque sin él no habría trabajo y consiguiente realización humana; corriente de irracionalismo civilizado que no hace otra cosa que aumentar esa falta de rigor, de espíritu crítico y, con ella, de trabajo, aunque se enmascare con el mito de la igualdad de los individuos si no en la propiedad, al menos en la posesión. Consecuencia, aumento de alienación y esclavitud del individuo, por pérdida de esa nota, la individualidad, así como de la libertad, aunque en su nombre se le engañe y maneje con promesas de redención consumista, como las que también, salvo en tiempo y lugar, se hacían en el medievo para quienes no gozaban del habitat de la fortaleza gobernadora. En el fondo, una pérdida de la condición humana, siempre en tensión entre Jos dos polos, el del 'buen salvaje' y el de la razón y el pensamiento lógico; pérdida por amputación traumática de uno de los polos de su ambivalencia y, con ella, de su inherente tensión inestable.

Movimiento pendular en el cual una pugna contra la razón de tipo logicista, incluso de tipo moral, sería consecuente si se hubiera dado el caso de que dicha razón hubiera tenido algún papel, más o menos preponderante, tanto en la acción del individuo como en la de la sociedad. Lo cual no ha ocurrido en manera alguna, porqu. no es por la razón, por la conciencia plena, por la cual se manifiesta y actúa el individuo, ni es la razón logicista quien ha logrado impedir los absurdos catastróficos de las guerras, ni de ella han surgido los cambios afectivos de tipo religioso, ni los cambios tecnológicos... De hecho, la razón no ha jugado papel alguno en los grandes avatares de la especie humana, porque hay zonas donde esa razón ni existe ni tiene grandes posibilidades de ejercer influencia. La lucha contra la razón sólo podría acogerse favorablemente si es que esa 'razón hubiera impuesto su predominio en toda actividad humana. Pero quien ha llevado a un desarrollo, 'progreso' de la especie humana en cuanto a proceso consumista ha sido la tecnología, y lo sigue haciendo. Quiero decir, no es a la burbuja conceptual a la que se debe progreso material alguno en lo social. Los grandes cambios sociales se han debido a causas y fenómenos que nada tienen que ver con la racionalidad en su auténtica estructura profunda.

Sólo cabe una explicación contra los reiterados ataques actuales contra esa burbuja conceptual y, en ella, contra el método axiomático. El que el trabajo racional es un tipo de trabajo marcadamente individual, no de masa. Consecuentemente, provoca un aumento del proceso de conciencia y de capacida crítica, insolidaria con la masa. Y ello es siempre peligroso para ésta. Precisamente ha sido la burbuja conceptual la que, lentamente, ha logrado crear lo consciente, ha logrado superar el caos. Y no sólo a nivel individual, sino a nivel societario: y cuando la conciencia falla, surge una escisión en el individuo y queda dominado por el inconsciente o por los afectos; cuando el inconsciente colectivo prima surge el primitivo, el animal que devora y asesina, y ello a nivel colectivo. Es el regreso de la especie humana, permanente tentación contra la cual sólo ha logrado una leve campana protectora: la razón. Contra la que, a pesar de todo, se encuentra en permanente pugna y de ahí los constantes, reiterados ataques, la lucha en y por las ideas, los pensamientos. De ahí la necesaria afirmación, también agresiva, de que la razón no debe abandonarse sino consolidarse, a pesar de que ese aumento en la capacidad crítica del individuo le lleve a posiciones incómodas, al problema de tomar decisiones personales, a la difícil y ardua tarea del pensar, al dominio mediante el ejercicio consciente de voluntad...

De ahí la necesaria afirmación de que el movimiento pendular no debería arrastrar a quien mantiene, en su campo de trabajo, una posición crítica. Posición que, en el caso del hacer matemático, vendrá apoyada por la imaginación creadora como último recurso, pero también por el imprescindible uso del método axiomático, que ha sido uno de sus últimos logros en el manejo de la burbuja conceptual. Aun sabiendo que dicho método no es panacea, sino instrumento de trabajo al servicio de una imaginación. Instrumento de trabajo propio de la burbuja conceptual, del pensamiento puro, una de las caras que el hombre, como diamante en general mal pulido, presenta al cosmos.

CODA BIBLIOGRAFICA

Se han pretendido, en lo hasta aquí escrito, dos objetivos junto a otro haz de afirmaciones:

a) *Clarificación* respecto a qué llamar método axiomático y, con ello, de las fases y conceptos que en él, en su uso, intervienen, en sus dos manifestaciones o planos: enfoque postulacional o pragmático y formal constructivo o simplemente axiomático.

b) Afirmación de que todo hacer está sostenido por haces de creenc'ias que, cuando no explicitados, se cargan en el bagaje, contenido y método, pero implícita, acríticamente; creencias que, a su vez, actúan en dos planos: I. Racionalizado, y constituyen las condiciones espistemológicas que pueden incorporarse al trabajo, interiorizarse al mismo; 2. Inconsciente, y componen las leyendas, ontologías que sostienen el hacer, sea o no conceptual, de pensamiento puro.

Dos objetivos, con sus planos correspondientes, con los que se ha intentado defender el empleo del método axiomático de los ataques que, desvirtuando su sentido, se están realizando contra dicho método, contra un formalismo más extendido, fundamentalmente, en el hacer matemático, así como permitir aclararse en la maraña de argumentaciones contrapuestas que se enuncian, incluso en aquellas que acuden a la historia, nueva forma de conceptualización, en muchos casos deformadora, porque en la historia se busca aquéllo que previamente se desea buscar en el contexto de quien hace la búsqueda. Pero también debo declarar que la clarificación es sólo parcial, sólo en los terrenos de la matemática, cuando ésta y los ataques al método en ella empleados no son más que una muestra de todo un estado general de lo que denominar pensamiento. El ataque se hace igualmente contra los restantes modos de pensamiento, contra toda la burbuja conceptual, manifestación de una crisis societaria.

Por estos objetivos no he querido encumbrar este libro con notas, como ya indiqué al comienzo. Por estos objetivos tampoco parecería oportuno agregar aquí unas notas bibliográficas, que prestan un sabor de tratado metódico escolar a lo que, insisto, quiere ser, y primariamente, clarificador y, como consecuencia, se quiere la obligación de sostener como tesis la de que todo trabajo conceptual -incluso el crítico contra el método-, si lo es, lo es en tanto conversión racionalizadora de unas creencias, trasposición de la magia al mito, del mito a la razón, que también constituye un mito, con su ritual mágico, y creencia consiguiente, plasmada en el proceso deductivo.

Suponen, estas insistencias, que el lector debe conocer lo que aquí se trata, porque no es, no quiere ser este libro, en caso alguno, manual o texto de metodología o epistemología o, como hoy se lleva mucho, de filosofía de la matemática. A pesar de ello, y en gracia al lector, además de los títulos y autores que de modo explícito he señalado -Euclides, Arquímedes, Galileo, Newton, Frege, Hilbert ...–, pueden indicarse obras como las siguientes, en relación sumariamente indicadora, nunca pretendidamente completa, bien porque traten el tema -aunque el enfoque sea diferente, y de ahí que si lo traten sea básicamente en lo que aquí he calificado como etapa descriptiva-, bien porque entrañen el conocer que aquí se supone.

1. AGAZZJ. E. *Temi e prohlemi di.filo.wji a dellajisica*. Roma 1974. (Se anuncia versión española).

BLANCHt, R. *L'axiomarique*. PUF 1955.

BuNGt, M. *Philosophy oj phisics*. Reidei-Dordrecht 1973 (Se anuncia versión española).

CAVAILLES. J. *Métlwde axiomatique er jormalisme*. Hennann 1937.

CHAVARRI. E. *Natumleat de la demo.1tmci<Ín 'propter quid' en los Analíticos posteriores*. Estudios Filosóficos. Va. 1973.

GONSETH. F. *Les marhénwtiques er la réaliré*. Blanchard 1974.

KREISEL, J. L. «La méthode axiomatique». Apéndice 1 de *Eléments de logique mathématique*. En colab. con J. L. Krivine. Dunod 1%7. Versión inglesa North Holland.

DE LORENZO. J. *La jilosvjía d1' la matemática de Poincaré*. Tecnos 1974, en especial la 2 parte.

MuÑOZ. V. *De la axiomática a los sistemas jormales*. CSIC. 1961.

WANG, Hao. «The axiomatic method». Como cap. 1 de *Logic. computers and sets*. Chelsea 1970. (También caps. 111 y IV). La 1 ed. 1962, en Pekín; la 2 en North Holland con el título *A survey o} marh. logic*.

2. BARNES-MACK. *An algebraic immducrion ro Mathematical Logi('*. Springer 1975 (Hay versión española).

BELL-SLOMSON. *Mvdels and Ulrrapmducrs: an lntroduction*. North Holland, 19743_

CHANG-KEISLER. *Modeltheory*. North Holland 1973.
DuBREIL. P. *Th,;orie des l(mupes*. Dunod 1971. (Versión española}.
GRATZER. *Vnirer.w/ all(ehra*. Van Nostrand 1968. En distribución Springer.
HALL. M. *The tht'OI)' oj l(ri!Ups*. Mac Millan 1%7. (Versión española).
HENKIN-MONK-TARSKI. *Cylindric a/gebrtu l*. North Holland 1971.
JONES. J. P. «Three universal representations of recursively enumerable seiS» 1978. *J.S.L* 45. pp. 335-351.
LAWVIoRio. F. W. «The category of categones as a Foundation for mathematiCS». Coloquio La Jolla. California. p. 1-20. Springer.
DE LORENZO, J. *La matemtÍtica y el problema de su historia*. Tecnos 1977.
———————. «Matemática y Ciencias». Rev. *E.mlllio.1· .filtmificos*. 1978, p. 523-552.
MAL'CEV, A. I. *All(oritlrm.1· and rt•cursive .f unctimrL* Trad. del ruso en Wolters-Noordhorff, 1970.
ROGERS. *Tlreory oj recursive j unctions wrd ejjective computahifity*. Me Graw 1967.
SANTALO. L A. *Geometría proyectiva*. Eudeba 1961.

EN dos partes se estructura este libro. En la primera el autor ofrece una caracterización sistemática del método axiomático, sus componentes, las fases y conceptos que intervienen en su uso, así como los dos planos que presenta su pragmática: postulacional y formal constructivo. En la segunda parte Javier de Lorenzo desarrolla las distintas creencias que han soportado el método, desde sus orígenes hasta el momento presente. Análisis crítico tanto de los argumentos a favor como de las invectivas que se han lanzado contra el mismo, especialmente en los últimos años. La síntesis de ambas partes permite una clarificación de uno de los instrumentos fundamentales de la metodología matemática.

Javier de Lorenzo es autor de "La filosofía de la matemática de Henri Jules Poincaré", "Introducción al estilo matemático", "Iniciación a la teoría intuitiva de conjuntos" y "La matemática y el problema de su historia", también publicados por Editorial Tecnos.